

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE PUBLICATION

**ALGERIAN**

**JOURNAL  
OF TECHNOLOGY**

Revue Scientifique de l'ENP 1992 N°

**8**

ALGERIAN  
**JOURNAL**  
OF TECHNOLOGY

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
LABORATOIRE DE TELECOMMUNICATIONS

MODELISATION D'ANTENNES IMPRIMEES MULTICOUCHES  
DE FORME QUELCONQUE EN MODE QUASI-T.E.M

Par: **A.ZERGUERRAS et R.AKSAS**

ملخص :

في إطار هذا البحث نقترح نموذج للهوائيات المطبوعة على أساس تقنية خطوط الإرسال المقرونة والتي تشغل على طريقة شبه TEM هذا لكي نحلل الهوائيات المطبوعة والتي تكون منضودة بغض النظر عن شكلها . هذا النموذج يسمح بحساب ممانعة الدخل ، حزمة مرور التردد توزيع تيارات التوصيل والاستقطاب ، الرسم البياني للاتجاهية ، الكسب والتردد تظهر أهمية هذا النموذج في تصميم الهوائيات المطبوعة ذات الحزم العريضة للترددات فيما يخص الأشكال البسيطة أو التي تشمل موجه ، وجددا أن هناك توافق كبير بين النتائج المتخلفة من النموذج والنتائج التجريبية . وأخيرا نحن بصدد دراسة البنية التي تشمل ثلاثة خطوط مقرونة والتي يكون طرحها في بحث لاحق .

RESUME :

Nous proposons un modèle basé sur la technique des lignes de transmission couplées fonctionnant en mode quasi-TEM pour analyser les antennes imprimées de forme quelconque, stratifiées ou non. Ce modèle permet de calculer notamment l'impédance d'entrée, la bande passante, les distributions de courants de conduction et de polarisation, les diagrammes de directivité, le gain et le rendement.

Ce modèle s'avère très utile dans la conception d'antennes imprimées à large bande. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les mesures expérimentales en ce qui concerne les structures simples ou comprenant un directeur. La simulation a été étendue à une structure comprenant trois lignes couplées.

ABSTRACT :

In this paper, we propose a model that is based on the technique of coupled transmission lines functioning in a quasi-TEM mode. This is done to analyze microstrip antennas whether laminated or not regardless of their forms. This model allows the computation of the input impedance, the pass band, the distributions of conduction and polarization currents, directivity diagrams, the gain and the efficiency.

this models turns out to be very useful in microstrip antennas design with a large band. For the simple structures or those with a director, it is found that there is a good agreement between a simulation and experimental results. We are in the process of extending this study to a structure of tree coupled lines.



## LISTE DES SYMBOLES

- $a_i, a_i/\lambda_0$  : Longueur et longueur réduite suivant  $ox$  du conducteur  $i$ .
- $C_{ijn}$  : Capacité de couplage linéique des lignes superposées  $i$  et  $j$  au niveau du tronçon  $n$ .
- $d_{si}$  : Epaisseur de peau du conducteur de la ligne  $i$ .
- $\delta_i$  : Angle de pertes diélectriques de la ligne  $i$
- $f, \omega, \lambda_0$  : fréquence, pulsation et longueur d'onde dans le vide.
- $H_i, H_i/\lambda_0$  : Epaisseur et épaisseur réduite du substrat de la ligne  $i$ .
- $O_i$  et  $S_i$  : Points extrêmes de la ligne  $i$ .
- $R_{in}$  : Résistance caractéristique de la tranche  $n$  de la ligne  $i$ .
- $N$  : Nombre de tranches du découpage.
- $\epsilon_0, R_0$  : Constante diélectrique et impédance ( $120.\Pi$  Ohms) dans le vide.
- $[t_n]$  : Matrice de transmission du  $n^{me}$  tronçon de la structure.
- $y_{sin}$  et  $y_{sio}$  : Admittances de la ligne  $i$  respectivement aux extrémités  $S_i$  et  $O_i$ .
- $V_{jN}^i$  et  $V_{j0}^i$  : Ondes incidentes de la ligne  $j$  respectivement aux extrémités  $S_j$  et  $O_j$ .
- $V_{jN}^r$  et  $V_{j0}^r$  : Ondes réfléchies de la ligne  $j$  respectivement aux extrémités  $S_j$  et  $O_j$ .
- $W_{in}, W_{in}/\lambda_0$  : Largeur et largeur réduite du tronçon d'ordre  $n$  de la ligne élémentaire  $i$ .
- $Z_{cin}$  : Impédance caractéristique de la ligne  $i$  au niveau du tronçon  $n$ .
- $X_n, X_{n-1}$  : Extrémités de la tranche  $n$ , comptées à partir de  $O$ .
- $X_{rn} = X_n/\lambda_0$  : Grandeur précédente réduite.
- $\epsilon_{ri}, \epsilon_{ei}$  : Constantes diélectriques relative et effective de la ligne  $i$ .
- $\alpha_{in}, \theta_{in}$  : Coefficient d'atténuation et exposant de transfert du tronçon  $n$  de la ligne  $i$ .
- $k_{ij}$  : Coefficient de couplage entre les lignes  $i$  et  $j$
- $\Gamma_{in}$  : Coefficient de réflexion de la ligne  $i$  au niveau du tronçon  $n$ .
- $Z_{nor}$  : Impédance de normalisation.



## SOMMAIRE

### Listes des symboles

- I. Introduction
- II. Modélisation L.M.A en mode quasi-TEM
  - 2.1 Cas de  $m$  lignes couplées
  - t
  - 2.2 Cas de trois lignes couplées
  - 2.3 Antenne plaque avec deux directeurs circulaires co-centrés
  - 2.4 Conditions aux limites et calcul de l'impédance d'entrée
  - 2.5 Influence de la position du point d'excitation sur l'impédance d'entrée
- III. Résultats obtenus
  - 3.1. Cas d'un élément rayonnant isolé
  - 3.2. Cas de deux lignes couplées superposées
  - 3.3. Antenne plaque à deux directeurs
- IV. Conclusion
- Bibliographie

## I. Introduction

Ce travail constitue une suite à notre article [1] d'analyse et de modélisation des antennes imprimées planaires. La forme plane de ces antennes peut avoir une configuration quelconque, mais, physiquement on ne peut échapper à la nécessité de lui conserver un axe de symétrie ; cet axe donnant dans la majorité des cas la direction de propagation. L'application du modèle de la ligne de transmission en mode quasi-TEM n'est pas gênée par l'absence d'un tel axe de symétrie dans sa formulation mathématique.

Dans cet article, notre intérêt portera sur les formes circulaires multicouches. Nous avons vu [1] que l'adjonction d'un directeur à l'antenne plaque fait passer la bande passante de 6 à 17% pour un TOS inférieur ou égal à 2. Dans le modèle actuel, nous avons adjoint un second directeur, moins pour accroître la bande passante que pour améliorer la directivité, qui sera traitée dans un prochain article. Notre propos ici porte surtout à confronter les résultats théoriques de notre modélisation avec les résultats théoriques et expérimentaux fournis par d'autres auteurs.

La structure multicouches pose des problèmes technico-économiques, raison pour laquelle notre analyse est limitée à deux directeurs quoique le modèle permet d'en étudier plus.

## 2. Modélisation L.M.A. en mode quasi-TEM

### 2.1. Structure stratifiée de m lignes couplées

Les m lignes planaires sont couplées par capacité distribuée avec un taux de couplage  $k_{ij}$  entre les lignes i et j. L'ordre des conducteurs et des lignes est décrit dans le tableau 1.

Ordre	Conducteur	excitation directe	Ligne
m + 1	Plan de masse	non	m
m	Antenne plaque	oui	m - 1
m - 1	Premier directeur	non	m - 2
m - 2	Second directeur (accentueur de directivité)	non	
:		non	
1	Dernier directeur (accentueur de directivité)	non	1

Tableau 1. Ordre des conducteurs et des lignes de la structure.

Compte tenu de la structure superposée et du couplage par capacité distribuée, le coefficient de couplage entre deux lignes  $i$  et  $j$ , s'écrit :

$$\frac{1}{k_{ij}} = \sum_{p=1}^{j-1} \frac{1}{k_{p,p+1}} \quad (1)$$

### 2.1.1. Coefficient de couplage entre deux lignes superposées consécutives

Soit une ligne microruban élémentaire (Fig.1) de largeur  $W$ , de longueur  $\Delta x$  (ox étant la direction de propagation) et d'épaisseur  $H$ .

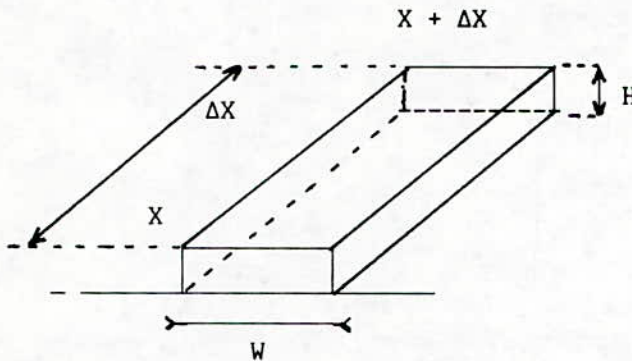


Fig.1 :Ligne microruban élémentaire.

Le flux d'énergie entrant en  $X$ , sort en  $X + \Delta X$ . La surface latérale totale est :

$$\Sigma = S + s$$

où :

$$S = 2.(\Delta X.W) \quad \text{partie métallisée}$$

$$\text{et } s = 2.(\Delta X.H) \quad \text{partie non métallisée}$$

Définissons le ratio d'ouverture par :

$$\rho = \frac{s}{\Sigma} = \frac{1}{1 + q} \quad (2)$$

$q$  étant le rapport  $W/H$

Comme la distribution des courants n'est pas uniforme, il faut tenir compte de l'effet de bord tant que  $q > 1$  et que la direction de propagation du centre de gravité de ces courants reste  $Ox$ .

Cet effet de bord se traduit physiquement, par le fait que l'ouverture effective est plus grande que celle définie matériellement; ce qui nous amène à introduire des grandeurs effectives  $W_e$ ,  $H_e$ ,  $\rho_e$  définies par les relations :

$$W_e = W + \Delta W$$

$$\frac{H_e}{H} = \frac{W_e}{W}$$



$$\rho_e = \frac{H_e}{W + H} = \rho \frac{H_e}{H} = \rho \frac{W_e}{W} \quad (3)$$

Pour deux lignes superposées consécutives, de ratio d'ouverture effectifs  $\rho_{e1}$  et  $\rho_{e2}$ , le coefficient de couplage s'écrit :

$$k_{12} = \sqrt{\rho_{e1} \cdot \rho_{e2}} \quad (4)$$

Dans le cas de deux structures circulaires de rayons  $a_1$  et  $a_2$  et d'épaisseurs  $H_1$  et  $H_2$ , superposées de façon cocentree, les ratios effectifs d'ouverture s'écrivent:

$$\rho_{ei} = \rho_i \frac{a_{ei}}{a_i} \quad (5)$$

avec:

$$\rho_i = (1 + q_i)^{-1}$$

$$a_{ei} = a_i \left[ 1 + \frac{2}{\pi q_i \epsilon_{r1}} \left( \text{Log} \frac{\pi q_i}{2} + 1.7726 \right) \right]^{1/2}$$

$$q_i = a_i / H_i$$

$$i = 1, 2$$

Exemple: Dans le cas où :

$$a_1 = a_2 = a = 6.84 \text{ mm} ; H_1 = H_2 = H = 1.6 \text{ mm} ; \epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon = 2.32$$

nous obtenons:

$$\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0.1896 ; \rho_e = \rho_{e1} = \rho_{e2} = 0.2108 ; k_{12} = 0.211$$

Cette valeur du coefficient de couplage est en bon accord [1] avec l'expérimentation où nous avons obtenu une valeur de 0.22.

Le modèle que nous allons présenter donne une bonne précision dans l'intervalle :

$$0.05 < q < 20$$

il vient donc d'après (2)

$$0.048 < \rho < 0.952$$

Comme les corrections par les grandeurs effectives ne sont valables que dans le cas où  $q > 1$  ou encore pour  $0.048 \leq \rho \leq 0.50$ ; dans ces conditions

nous pouvons alors écrire :

$$\rho_e = \rho \frac{W_e}{W} \quad \text{pour } q > 1 \quad \text{et } 0.05 \leq k \leq 0.500$$

$$\rho_e = \rho \quad \text{pour } q < 1 \quad \text{et } 0.50 \leq k \leq 0.952$$

Ainsi le ratio d'ouverture  $\rho$  et le coefficient de couplage  $k$  dépendent essentiellement du rapport des parties métallisées et non métallisées des deux structures juxtaposées. Ces conditions se traduisent par les relations :

$$s \ll S \quad ; \quad \rho \ll 1.0 \quad ; \quad k \ll 1.0$$

$$s = S \quad ; \quad \rho \approx 0.5 \quad ; \quad k \approx 0.5$$

$$s \gg S \quad ; \quad \rho \approx 1.0 \quad ; \quad k \approx 1.0$$

Dans cette représentation le coefficient de couplage s'identifie au ratio d'ouverture à un coefficient multiplicatif près ( légèrement supérieur à l'unité ).

Dans le cas d'un couplage maximal à 3 dB en transmission guidée, on modélise le coefficient de couplage par la relation :

$$k = \frac{A}{q + B} \quad (6)$$

avec:

$$q = (q_i \cdot q_{i+1})^{1/2}$$

$$q_i = a_i / H_i$$

$$i = 1 \dots , m$$

Pour déterminer les paramètres A et B, introduisons les hypothèses suivantes:

$$\text{pour } q = 0 \quad ; \quad k = (1/2)^{1/2} \approx 0.707 \quad (\text{couplage à 3 dB}) ;$$

$$\text{pour } q = 4.275 \quad ; \quad k = 0.220 \quad \text{d'après [1]};$$

$$\text{pour } q = \infty \quad ; \quad k \approx 0 ;$$

l'expression du coefficient de couplage s'écrit donc :

$$k = \frac{1.365}{q + 1.930} \quad (7)$$

Dans le domaine de validité du modèle à savoir :

$$0.025 \leq q \leq 10$$

nous obtenons :

$$0.114 \leq k \leq 0.698$$

Les variations du coefficient de couplage en fonction du rapport  $q$  (Fig.2) obtenues à partir des relations (2) et (7) montrent que les deux représentations peuvent être utilisées indifféremment lorsque  $(W/H)$  est supérieur à 1, avec un écart absolu inférieur à 0.05. Le terme correctif  $(W_e/W)$  réduit encore cet écart. Le coefficient de couplage donné par les relations (2) et (7) est doté d'un facteur de pertes  $(1/L_n)$ , qui dépend des épaisseurs de substrats  $H_{i+1}$  et dont les valeurs seront égales à 0.891, 0.794 et 0.707 selon que ces pertes sont estimées respectivement à 1,2, et 3dB.

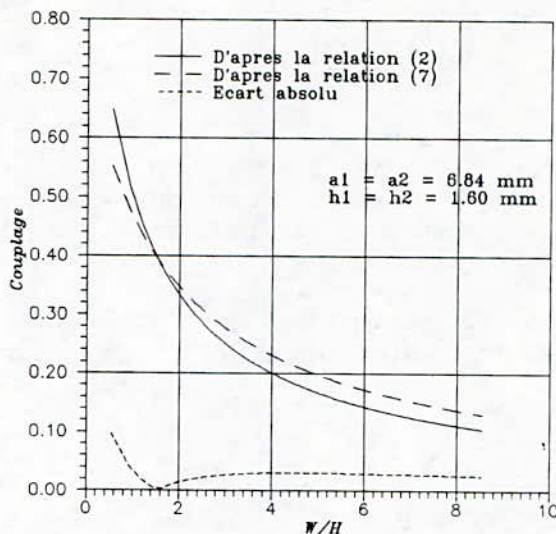


Fig.2 : Variations du coefficient de couplage en fonction du rapport  $W/H$  pour une structure bicouche circulaire.

### 2.1.2: Principe de la modélisation

Le point d'excitation  $E$  et le centre de gravité  $G$  de la structure plane de l'antenne plaque (conducteur d'ordre  $m$ ) détermine l'axe privilégié  $Ox$  porté par  $EG$  suivant lequel se propage le barycentre des courants de conduction (distribué selon l'axe  $Oy$ ).

La modélisation proposée consiste justement à décomposer la structure dans sa partie couplée en  $N$  tronçons élémentaires dans la direction de propagation  $Ox$ .  $N$  sera choisi aussi élevé que possible jusqu'à ce que les contours latéraux de la ligne élémentaire varient autour de la position moyenne dans les limites de la précision désirée. Cependant  $N$  ne doit pas dépasser une valeur seuil [2] aisément calculable.

Le modèle proposé est capable de prendre en considération une variation de l'épaisseur du substrat de chaque ligne dans la direction de propagation  $Ox$ . Une fois connue la ligne microruban d'épaisseur de substrat variable suivant la direction  $Oy$  de façon symétrique par rapport à l'axe  $EG$ , le modèle sera aussi en mesure de prendre en charge ce type de structure. L'état actuel de la technologie rend cependant peu probable l'éventualité de structure non



planaire.

La capacité linéique de couplage entre les lignes superposées  $i$  et  $j$  du  $n^{\text{me}}$  tronçon est défini par :

$$C_{ijn} = C_{jin} = k_{ijn} \cdot \epsilon_o \cdot \left[ \frac{W_{in} \cdot W_{jn} \cdot \epsilon_{ri} \cdot \epsilon_{rj}}{H_{in} \cdot H_{jn}} \right]^{1/2} \quad (8)$$

avec:  $n = 1, 2, \dots, N$  ;  $i \neq j$  ;  $i, j = 1, 2, \dots, m$

Pour des structures planes les épaisseurs des substrats sont indépendantes de l'ordre  $n$ . De même, nous supposons, dans une première approximation, que le coefficient de couplage entre deux lignes ne varie pas le long de l'axe  $Ox$ . Dans ces conditions la relation (8) devient:

$$C_{ijn} = k_{ij} \cdot \epsilon_o \cdot \left[ \frac{W_{in} \cdot W_{jn} \cdot \epsilon_{ri} \cdot \epsilon_{rj}}{H_i \cdot H_j} \right]^{1/2} \quad (9)$$

La ligne  $i$ , au niveau du tronçon  $n$ , est dotée d'une résistance caractéristique :

$$R_{in} = R_o \cdot (\epsilon_{ein})^{-1/2} \cdot F_{in} \quad (10)$$

où :

$$F_{in} = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \pi} \text{Log} \left[ \frac{8}{q_{in}} + \frac{q_{in}}{4} \right] & \text{si } q_{in} = \frac{W_{in}}{H_i} \leq 1 \\ \left[ q_{in} + 1.393 + 0.667 \text{Log}(q_{in} + 1.444) \right]^{-1} & \text{si } q_{in} > 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\epsilon_{ein} = \frac{\epsilon_{ri} + 1}{2} + \frac{\epsilon_{ri} - 1}{2} \cdot G_{in} \quad (12)$$

avec:

$$G_{in} = \begin{cases} \left[ 1 + \frac{12}{q_{in}} \right]^{-1/2} & \text{si } q_{in} > 1 \\ \left[ 1 + \frac{12}{q_{in}} \right]^{-1/2} + 0.04 (1 - q_{in})^2 & \text{si } q_{in} < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Soit  $a$ , la longueur suivant l'axe  $Ox$  de la partie couplée de l'antenne plaque multicouche. Un découpage en  $N$  tronçons dans cette direction donne pour les lignes élémentaires une longueur :

$$\Delta l = a/N$$

Deux lignes élémentaires  $i$  et  $j$  sont couplés, au niveau du tronçon  $n$ , par l'admittance:

$$2 Y_{1jn} = 2 Y_{j1n} = \Delta l \omega \cdot R_{1jn} \cdot C_{1jn} \quad (14)$$

$R_{1jn}$  étant la résistance caractéristique de couplage définie par:

$$R_{1jn} = (R_{1n} R_{jn})^{1/2} \quad (15)$$

Le coefficient d'atténuation et l'exposant de transfert de la ligne  $i$ , au niveau de la tranche  $n$ , sont donnés [2] respectivement par les relations:

$$\alpha_{in} = \frac{4\pi^3}{5} \frac{R_o}{R_{1n}} \frac{H_1^2}{\lambda_o^3} (\epsilon_{e1n})^{-1/2} + \frac{\pi}{\lambda_o} (\epsilon_{e1n})^{1/2} \left( \text{tg } \delta_1 + \frac{ds_1}{H_1} \right) \quad (16)$$

$$\theta_{in} = \left( \alpha_{in} + j \frac{2\pi}{\lambda_o} (\epsilon_{e1n})^{1/2} \right) \Delta l \quad (17)$$

Dans un but formel évident, posons:

$$d_{1jn} = \frac{1}{d_{j1n}} = \left( \frac{R_{1n}}{R_{jn}} \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$D_{1jn} = D_{j1n} = \frac{1}{2} \left( d_{1jn} + d_{j1n} \right) \quad (19)$$

$$S_{1jn} = -S_{j1n} = \frac{1}{2} \left( d_{1jn} - d_{j1n} \right) \quad (20)$$

A l'entrée  $(n-1)$  du tronçon d'ordre  $n$ , de la ligne  $j$ , on dispose d'un couple tension ondes incidentes et réfléchies :

$$\begin{bmatrix} V_{n-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{n-1,j}^i \\ V_{n-1,j}^r \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} n = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (21)$$

Les vecteurs ondes à l'entrée 0 et à la sortie N de la structure multicouches sont régis par [2] un système d'équations linéaires:

$$\begin{bmatrix} V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_N \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} t_n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} t_N \end{bmatrix}$$

$[t_n]$  étant une matrice carrée  $2m \times 2m$  dont les éléments  $t_{ijn}$  ( $i=1, 2, \dots, 2m$ ;  $j=1, 2, \dots, 2m$ ) s'expriment en fonction de  $\theta_{in}$ ,  $d_{1jn}$ ,  $D_{1jn}$  et  $S_{1jn}$  définis res-

pectivement par (17,18,19,20).

Entre les deux tronçons élémentaires n et N le système (22) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_N \end{bmatrix} \quad (23)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} T_n \end{bmatrix} = \prod_{j=n}^{j=N} \begin{bmatrix} t_j \end{bmatrix}$$

La résolution du système (22) à 2m inconnues (ondes incidentes et réfléchies des vecteurs  $V_0$  et  $V_N$ ) nécessite donc m conditions aux limites (ou d'excitations).

## 2.2. Cas de trois lignes couplées ( m = 3 )

### 2.2.1. Détermination des éléments de la matrice $[t_n]$

L'excitation se fait uniquement au niveau de l'antenne plaque  $D_3$ , conducteur commun aux lignes 2 et 3. Dans le but d'alléger le formalisme mathématique, nous poserons pour le terme de couplage interligne :

$$P_{1jn}(\theta_{1n}) = \frac{Y_{1jn}}{d_{1jn}} ( \text{Ch } \theta_{1n} + d_{1jn} \cdot \text{Sh } \theta_{1n} ) \begin{cases} i \neq j \\ i, j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (24)$$

et pour les termes de couplage, composants des éléments de la diagonale principale et de ces deux adjacents immédiates :

$$U_{1n}(\theta_{1n}) = \sum_{j=1}^3 d_{1jn}^2 \cdot P_{1jn}(\theta_{1n}) \quad (25)$$

$$V_{1n}(\theta_{1n}) = \text{Ch } \theta_{1n} + \text{Sh } \theta_{1n} \cdot \sum_{j=1}^3 Y_{1jn} \cdot D_{1jn} \quad (26)$$

$$Q_{1n}(\theta_{1n}) = \text{Sh } \theta_{1n} \cdot \sum_{j=1}^3 Y_{1jn} \cdot S_{1jn} \quad (27)$$

avec :

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ j \neq i \\ Y_{23n} = Y_{32n} = 1 \quad (\text{car } D_3 \text{ est commun aux lignes 2 et 3}) \end{cases}$$

Les autres  $Y_{1jn}$  sont donnés par l'équation (14).

Dans ces conditions les 36 éléments de la matrice  $[t_n]$  peuvent s'écrire:



$$\begin{aligned}
t_{i1n} &= V_{qn}(\theta_{qn}) + j.U_{qn}(\theta_{qn}) && \text{pour } i = 1,3,5 \text{ correspond} \\
&&& \text{respectivement } q = 1,2,3 \\
t_{i1n} &= V_{qn}(-\theta_{qn}) - j.U_{qn}(-\theta_{qn}) && \text{pour } i = 2,4,6 \text{ correspond} \\
&&& \text{respectivement } q = 1,2,3
\end{aligned} \tag{28}$$

Les relations (28) donnent les 6 éléments de la diagonale principale de la matrice [tn].

$$\begin{aligned}
t_{i,i+1,n} &= -Q_{qn}(\theta_{qn}) + j.U_{qn}(\theta_{qn}) \\
t_{i+1,i,n} &= -Q_{qn}(-\theta_{qn}) - j.U_{qn}(-\theta_{qn})
\end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{à } i = 1,3,5 \\ \text{correspond} \\ q = 1,2,3 \end{array} \right. \tag{29}$$

Les relations (29) donnent les 6 éléments t12, t34, t56, t21, t43 et t65.

Les 24 autres éléments de la matrice [tn] sont fournis par les termes de couplage interligne:.

$$\begin{aligned}
t_{13n} = t_{14n} &= -j.P_{12n}(\theta_{1n}) ; && t_{15n} = t_{16n} = -j.P_{13n}(\theta_{1n}) \\
t_{23n} = t_{24n} &= j.P_{12n}(-\theta_{1n}) ; && t_{25n} = t_{26n} = j.P_{13n}(-\theta_{1n})
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
t_{31n} = t_{32n} &= -j.P_{21n}(\theta_{2n}) ; && t_{35n} = t_{36n} = -j.P_{23n}(\theta_{2n}) \\
t_{41n} = t_{42n} &= j.P_{21n}(-\theta_{2n}) ; && t_{45n} = t_{46n} = j.P_{23n}(-\theta_{2n})
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
t_{51n} = t_{52n} &= -j.P_{31n}(\theta_{3n}) ; && t_{53n} = t_{54n} = -j.P_{32n}(\theta_{3n}) \\
t_{61n} = t_{62n} &= j.P_{31n}(-\theta_{3n}) ; && t_{63n} = t_{64n} = j.P_{32n}(-\theta_{3n})
\end{aligned} \tag{32}$$

Pour retrouver le cas de deux lignes couplées, on peut soit :

- prendre m = 2 dans la modélisation générale;
- prendre m = 3 et k1j = 0 ( j = 2,3 ); autrement dit découpler la ligne 1 des lignes 2 et 3. Ceci se traduit par:

$$Y_{1jn} = Y_{j1n} = 0 ; P_{1jn} = p_{j1n} = 0 \quad (j = 2,3) \tag{33}$$

$$Q_{1n}(\theta_{1n}) = 0 ; U_{1n}(\theta_{1n}) = 0 \tag{34}$$

ainsi la moitié des 36 éléments cités ci dessus s'annule et par conséquent la matrice [tn] devient:

$$\begin{bmatrix} t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_4 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_8 \end{bmatrix} \quad (35)$$

où: 
$$\begin{bmatrix} Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ch } \theta_{1n} & 0 \\ 0 & \text{Ch } \theta_{1n} \end{bmatrix} \quad (36)$$

est la matrice de transfert d'une ligne de transmission avec ondes progressives et régressives et  $Q_8$ , celle d'une structure bicouche développée dans [2].

L'augmentation du nombre de couches superposées complique les calculs et accroît le coût de fabrication, par conséquent nous avons peu de chance de rencontrer dans les applications pratiques le cas d'une structure ayant plus de deux directeurs. Le plus usité est le système à deux lignes couplées, mais qui peut avoir plus de deux couches diélectriques dont l'une peut être une couche d'air d'épaisseur appropriée afin d'élargir encore plus la bande passante.

### 2.3. Structure circulaires co-centrées

Sans rien enlever à la généralité du modèle, nous traitons des configurations circulaires co-centrées (Fig.3). Le cas des structures décalées sera pris en compte dans un prochain article.

#### 2.3.1. Détermination du nombre de cas possible

Selon les diamètres  $a_1, a_2, a_3$  des trois conducteurs, nous pouvons évaluer (Tab.2) 13 cas distincts, à savoir :

6 cas non dégénérés	6 cas monodégénérés	1 cas doublement dégénéré
$a_3 > a_2 > a_1$ (a)	$a_3 = a_2 > a_1$ (ad)	$a_3 = a_2 = a_1$ (g)
$a_3 > a_1 > a_2$ (b)	$a_3 > a_1 = a_2$ (ba)	
$a_2 > a_1 > a_3$ (c)	$a_2 = a_1 > a_3$ (ce)	
$a_2 > a_3 > a_1$ (d)	$a_2 > a_3 = a_1$ (dc)	
$a_1 > a_2 > a_3$ (e)	$a_1 > a_3 = a_2$ (ef)	
$a_1 > a_3 > a_2$ (f)	$a_1 = a_3 > a_2$ (fb)	

Tab.2. Les 13 configurations distinctes possibles

### 2.3.2. Admittances des parties non couplées

La méthode élaborée permet de calculer l'admittance des parties non couplées des 13 configurations possibles. Dans ce qui suit, nous l'appliquons au cas (a) illustré par la figure 3.

Si 
$$a_3 - a_1 \ll \lambda_0 / 2$$

ce qui est généralement le cas des antennes associées à des directeurs, les parties non couplées peuvent être assimilées à des condensateurs plans dont les admittances ramenées en N et O sont données [2] par:

$$Y_{Sip} = \left\{ \begin{array}{ll} j \omega \epsilon_0 \epsilon_{ei} \Sigma_i / H_i & \text{pour } i = 2, 3 \\ 0 & \text{pour } i = 1 \end{array} \right\} \quad p = 0, N \quad (37)$$

Les surfaces  $\Sigma_i$  des secteurs circulaires non couplés et les constantes diélectriques effectives  $\epsilon_{ei}$  s'écrivent [2] avec une bonne approximation :

$$4 \Sigma_i = a_i^2 \arccos(a_1/a_i) - a_1(a_i^2 - a_1^2)^{1/2} \quad (37.a)$$

$$\epsilon_{ei} = \frac{\epsilon_{ri} + 1}{2} + \frac{\epsilon_{ri} - 1}{2} \left[ 1 + 24 H_i (a_i^2 - a_1^2)^{-1/2} \right]^{-1/2} \quad (37.b)$$

$$i = 2, 3$$

### 2.4. Conditions aux limites et calcul de l'impédance d'entrée

Compte tenu de l'expression (37) et du fait que l'antenne D3 est alimentée en O par un courant de 1 Ampère, nous pouvons écrire les conditions aux limites et d'excitation suivantes:

$$\frac{V_{jp}^i - V_{jp}^r}{V_{jp}^i + V_{jp}^r} = Y_{Sjp} \cdot Z_{cjp} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } j = 1, 2, \quad p = 0, N \\ \text{pour } j = 3, \quad p = N \end{array} \right. \quad (38)$$

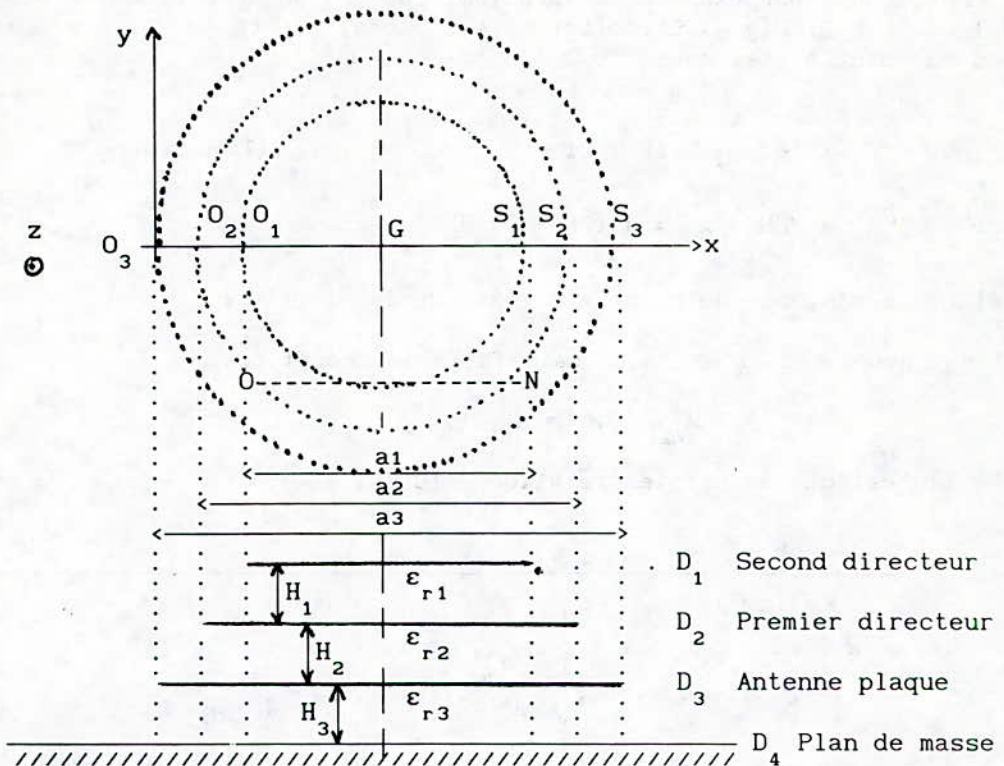
$$\text{avec: } Z_{cjp} = \left( R_{jp} (R_{sp} \cdot R_{tp})^{1/2} \right)^{1/2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } j = 1, \quad s = 2, \quad t = 3 \\ \text{pour } j = 2, \quad s = 3, \quad t = 1 \\ \text{pour } j = 3, \quad s = 1, \quad t = 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{V_{30}^i - V_{30}^r}{Z_{c30}} = 1 \quad (39)$$

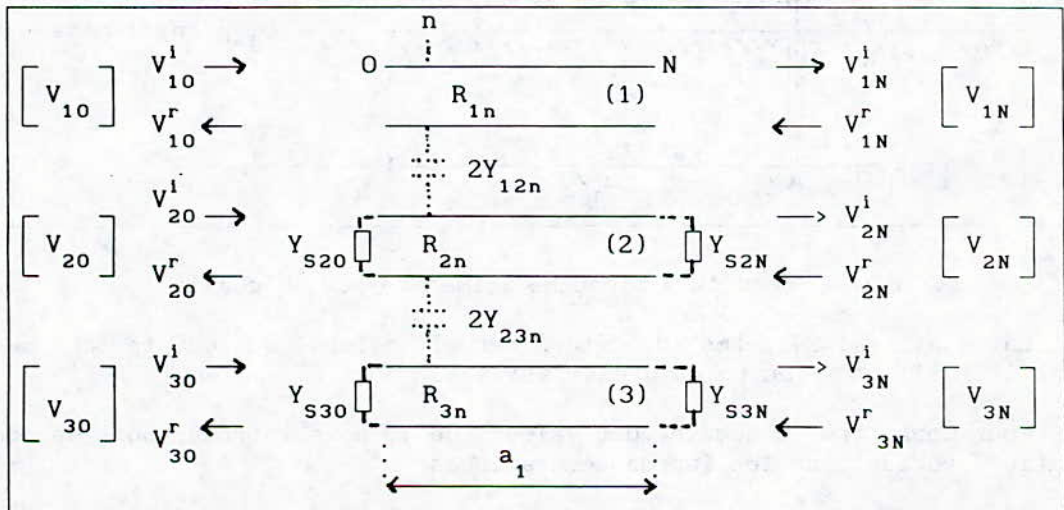
Les six conditions initiales (38,39) permettent la résolution du système (22), donnant les ondes incidentes et réfléchies au point d'excitation O de la structure tricouche dont l'impédance d'entrée s'écrit:



$$Z_e = \left[ \frac{1 - \Gamma_{30}}{1 + \Gamma_{30}} Y_{c3N} + Y_{s3N} \right]^{-1} \quad (40)$$



(a) : Antenne plaque circulaire munie de deux directeurs de même géométrie.



(b) : Schéma équivalent de la configuration à 3 lignes couplées.

Fig.3 : Structure circulaire co-centrée 3 lignes couplées.

## 2.5 Calcul de l'impédance d'entrée au point d'excitation

L'antenne plaque, conducteur  $D_m$ , sera excitée en un point A, se trouvant sur le tronçon élémentaire d'ordre  $l$ , présente une impédance caractéristique  $Z_{cjl}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) standard ( $50 \Omega$  ou  $75 \Omega$ ) ou égale à une impédance désirée  $Z_o$  afin de pouvoir l'adapter à la ligne d'excitation.

Résolvons, par exemple, le problème pour l'antenne plaque à deux lignes couplées ( $m = 2$ , Fig.4). L'excitation est localisée en ( $x = x_1$ ,  $y = 0$ ), coordonnées du point A, tel que:

$$x_1 = \frac{a_1}{2N} (2l - 1) = a_1 - x_a \quad (1 \leq l \leq N) \quad (41)$$

avec:  $a_1/2N \leq x_1 \leq a_1 (2N - 1)/2N$

$x_a$  étant la distance du point A à l'axe de la structure.

$Z_o$  étant donnée, il s'agit de satisfaire la condition:

$$Z_{c2l} = Z_o = R_{12}(l) \quad (42)$$

où  $R_{12}(l)$  est donnée par les relations (10,15).

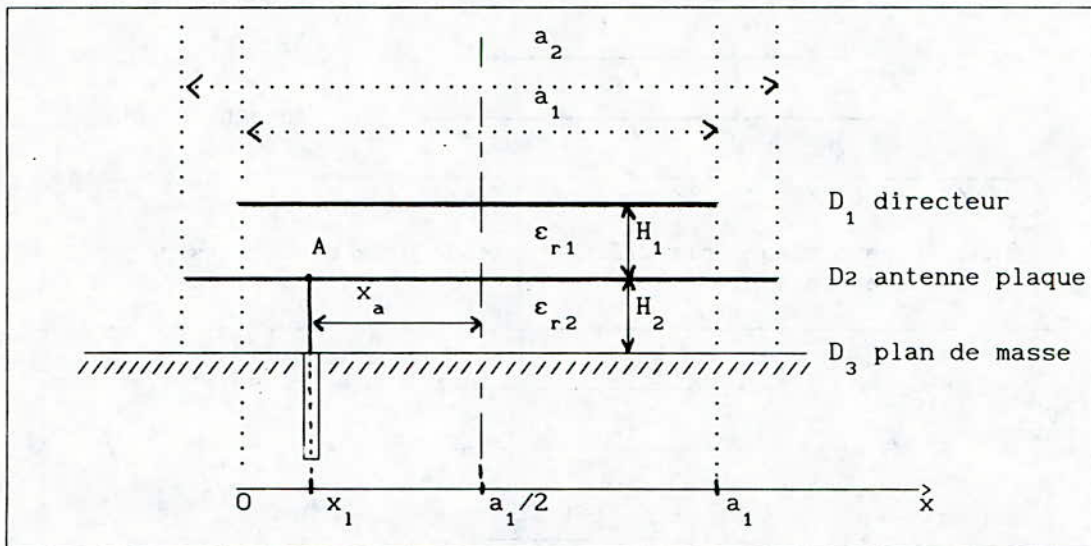


Fig.4. Structure bicouche alimentée par un coaxial

La relation (42) permet de déterminer l'entier  $l$  qui, compte tenu de (41) donne la position  $x_1$  du point d'excitation A.

Pour connaître le domaine des valeurs de  $l$ , nous introduisons des considérations portant sur les impédances ramenées:

- au centre du disque, l'impédance ramenée est nulle (une ligne quart d'onde transforme l'extrémité ouverte en un court circuit);

- en 0, l'impédance d'entrée est maximale.  
Ces considérations se traduisent par:

$$\begin{aligned} (Z_e)_{N/2} &= 0 & \text{pour} & & x_{N/2} &= a_1(N-1)/2N \\ (Z_e)_1 &= Z_{\text{emax}} & \text{pour} & & x_1 &= a_1/2N \end{aligned}$$

Il existe donc une valeur de l comprise entre 1 et N/2 pour laquelle:

$$(Z_e)_1 = Z_0 \quad (43)$$

la relation (43) permet également de déterminer la valeur de l et donc, de localiser convenablement l'excitation à condition d'avoir:

$$Z_0 \leq (Z_e)_1$$

ce qui ne constitue nullement une contrainte puisque  $(Z_e)_1$  croît quand le nombre de découpage N augmente.

La résolution du système (23), tenant compte des conditions aux limites et d'excitation (38,39), permet de calculer les ondes incidentes et réfléchies au point d'alimentation A où l'impédance d'entrée  $(Z_e)_1$  de la structure s'écrit :

$$(Z_e)_1 = \frac{1 + \Gamma_{21}}{1 - \Gamma_{21}} Z_{c21} \quad (44)$$

avec :

$$\Gamma_{21} = \frac{V_{21}^r}{V_{21}^i}$$

et :

$$Z_{c21} = (R_{11} \cdot R_{21})^{1/2}$$

### 3. Résultats obtenus

#### 3.1. Antenne disque sans directeur (m = 1)

##### 3.1.1. Excitation par ligne microruban

###### a) Influence de la constante diélectrique

Données :  $a_1 = x_a = 6.84$  mm ;  $h_1 = 1.59$  mm ;  $td_1 = 0.0012$

$$ds_1 = 22 \text{ e-6} ; N = 500$$

Pour des constantes diélectriques égales à 2.17 et 2.33 , les résultats obtenus, à partir de ces données, sont illustrés par les figures 5 et 6.



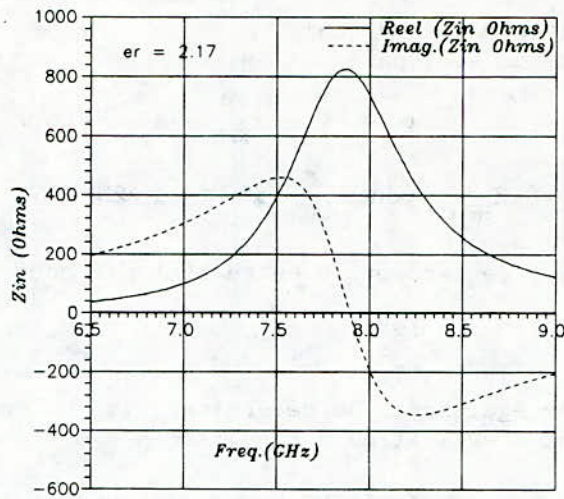


Fig.5 : Impédance d'entrée d'une antenne circulaire isolée en fonction de la fréquence ( $\epsilon_{r1} = 2.17$ )

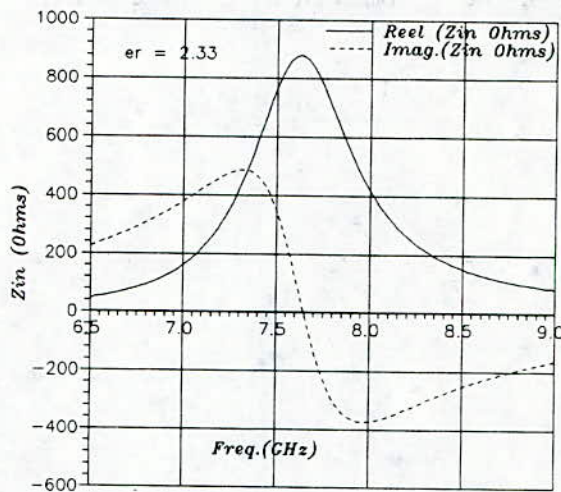


Fig.6 : Impédance d'entrée d'une antenne circulaire isolée en fonction de la fréquence ( $\epsilon_{r1} = 2.33$ )

La mise en évidence de l'effet de la constante diélectrique est représentée par les figures 7 et 8, correspondant respectivement aux parties réelles de l'impédance d'entrée et aux impédances d'entrée normalisées.

Les caractéristiques essentielles relevées à partir de ces résultats sont résumées dans le tableau 3.

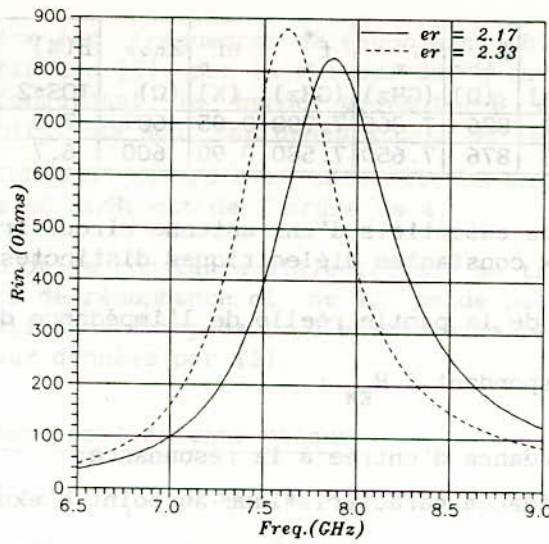


Fig.7 :Parties réelles des impédances d'entrée d'une antenne disque circulaire en fonction de la fréquence pour 2 constantes diélectriques distinctes.

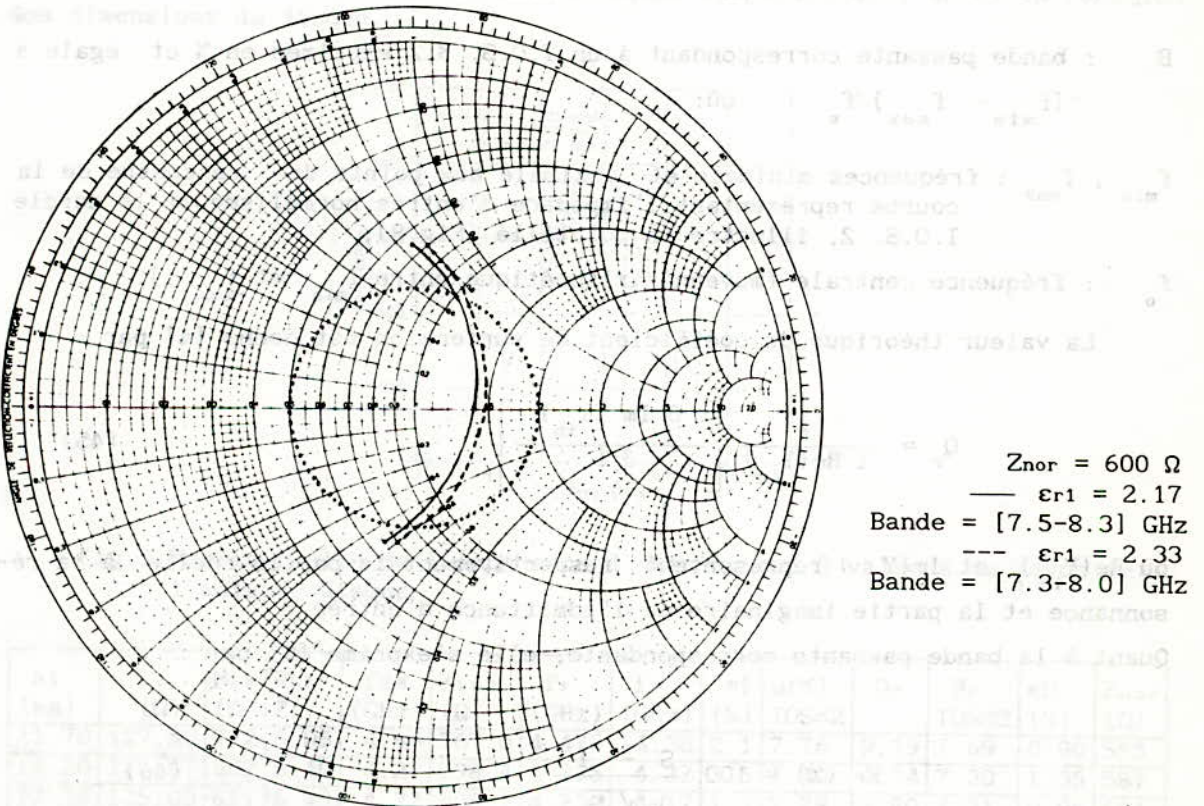


Fig.8: Influence de la constante diélectrique sur l'impédance d'entrée normalisée (par rapport à 600 ohms) d'une antenne disque



Ces résultats sont conformes à ceux obtenus ultérieurement [3] à l'aide d'autres modèles qui stipulent qu'au delà de 1GHz, la bande passante augmente avec la fréquence de résonance.

Les écarts relatifs entre les valeurs obtenues par notre modèle et celles obtenues par la méthode de la cavité [3] ne dépasse guère 2 % pour les fréquences de résonance et 1.35 % pour la bande passante.

### c) Influence de la position du point d'excitation

Données :  $a_1 = 6.84 \text{ mm}$  ;  $H_1 = 1.6 \text{ mm}$  ;  $\epsilon_{r1} = 2.17$  ;  $\text{tg } \delta_1 = 0.0012$   
 $ds_1 = 22 \cdot 10^{-6}$  ;  $N = 500$ .

Ces données nous ont permis de tracer à l'aide de notre modèle, l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence, et ce pour quatre positions distinctes du point d'excitation (Fig.10).

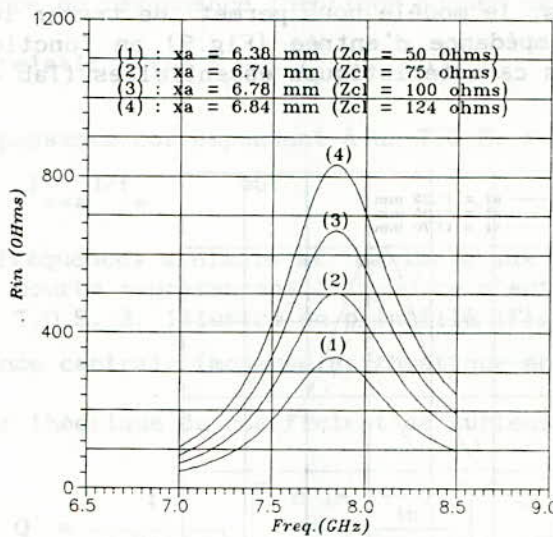


Fig.10:Partie réelle de l'impédance d'entrée pour quatre positions du point d'excitation.

Les paramètres essentiels déduits de ces résultats sont résumés dans le tableau 5.

$x_a$ (mm)	l	$Z_{c1}$ ( $\Omega$ )	REM ( $\Omega$ )	$\frac{REM}{Z_{c1}}$	$f_{rM}$ (GHz)	$Z_{inr}$ ( $\Omega$ )	$f_r$ (GHz)	$f_r^*$ (GHz)	$ef_r$ (%)	$Z_{nor}$ ( $\Omega$ )	B(%) TOS $\leq 2$	$Q_r$	Br(%) TOS $\leq 2$	eB %
6.84	1	124	829.6	6.7	7.84	826.0	7.865	7.79	0.95	607	7.0	10.14	6.97	0.42
6.78	2	100	660.7	6.6	7.84	658.0	7.865	7.79	0.95	483	7.0	10.14	6.97	0.42
6.71	5	75	502.0	6.7	7.84	500.0	7.865	7.79	0.95	367	7.0	10.14	6.97	0.42
6.38	17	50	336.5	6.7	7.84	335.2	7.860	7.79	0.89	246	7.0	10.38	6.80	0.42

Tab.5:Paramères essentiels de la structure pour 4 positions du point du point d'excitation



$l$  et  $Z_{c1}$  sont respectivement l'ordre de la tranche élémentaire et l'impédance caractéristique correspondante au niveau du point d'excitation.

Nous constatons d'abord que la bande passante et la fréquence de résonance sont pratiquement indépendantes de la position du point d'excitation. Ces deux paramètres dépendent essentiellement des dimensions du patch, de l'épaisseur et de la constante diélectrique du substrat.

Par contre, la résistance d'entrée et l'impédance caractéristique diminuent au fur et à mesure que le point d'excitation s'approche du centre du disque.

Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus [6] par la méthode de la cavité. Le rapport  $REM/Z_{c1}$  varie légèrement. Sa valeur moyenne se situe au voisinage de 6.67 conformément aux résultats obtenus [2] antérieurement. De plus, le rapprochement du point d'excitation vers centre du disque engendre une augmentation du rapport  $W_1/H_1$  ce qui se traduit par une diminution de l'impédance caractéristique en ce point.

### 3.2 Antenne circulaire associée à un directeur de même géométrie ( $m = 2$ )

#### 3.2.1 Système à large bande

Données:  $a_1 = 12.1$  mm ;  $a_2 = 12.2$  mm ;  $x_a = 11.8$  mm ;  $H_1 = H_2 = 3.18$  mm

$\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 2.33$  ;  $\text{tg } \delta_1 = \text{tg } \delta_2 = 0.0012$  ;  $ds_1 = ds_2 = 22 \cdot 10^{-6}$

$N = 500$ .

L'impédance d'entrée au point d'excitation, obtenue à partir de ces données, est représentée par les figures 11 et 12.

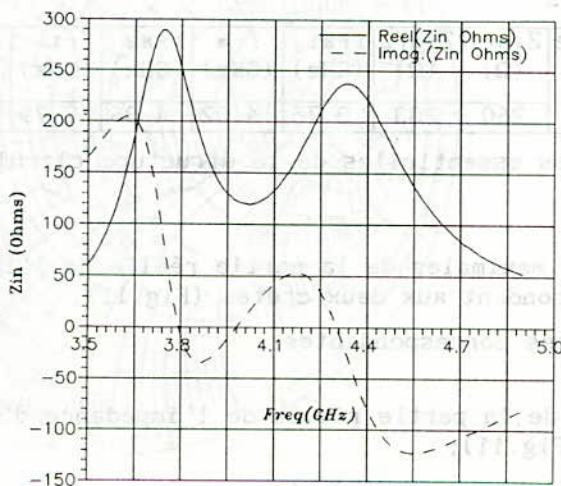


Fig.11: Impédance d'entrée d'une antenne circulaire associée à un directeur.

Entre 4 et 4.3 GHz les deux courbes sont pratiquement confondues. Les trois courbes passent par un point commun où l'impédance d'entrée est égale à  $Z_{in} = (210 + j50) \Omega$ , qui se présente sur notre modèle à une fréquence de 4.275 GHz. A partir de cette valeur, les deux courbes théoriques se confondent jusqu'à une fréquence de 4.6 GHz. Les écarts entre les résultats obtenus à l'aide de notre modèle et ceux obtenus expérimentalement [8] sont donc faibles et peuvent être améliorés en utilisant un coefficient de couplage linéique au lieu d'un coefficient de couplage global.

### 3.2.3 Influence de la position du point d'excitation

Données :  $a_1 = 12.1 \text{ mm}$  ;  $a_2 = 12.35 \text{ mm}$  ;  $H_1 = 1.59 \text{ mm}$  ;  $H_2 = 3.18 \text{ mm}$  ;  
 $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 2.33$  ;  $t_g \delta_1 = t_g \delta_2 = 0.0012$  ;  $ds_1 = ds_2 = 22.10^{-6}$ .

A l'aide de ces données le modèle nous a permis de tracer l'impédance d'entrée normalisée (Fig.14) à  $100 \Omega$  en fonction de la fréquence et ce, pour trois positions du point d'excitation.

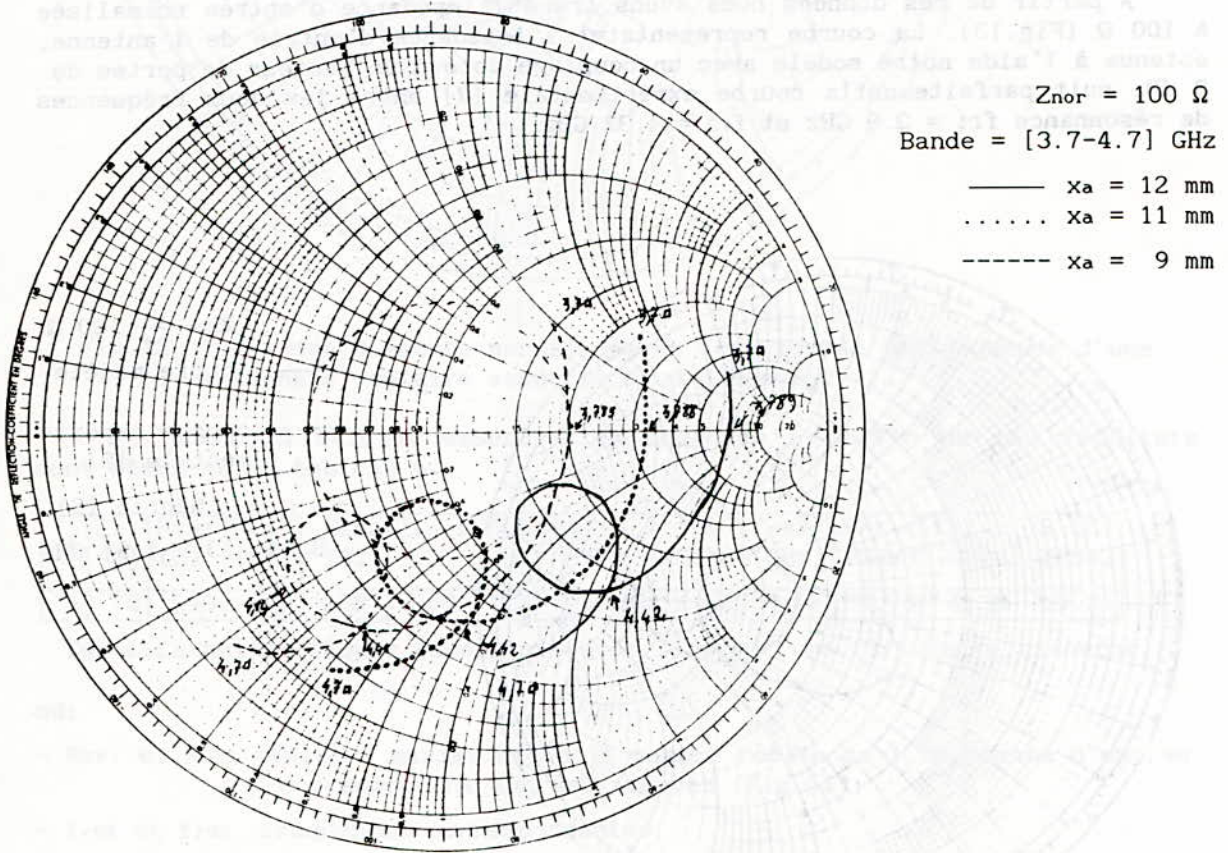


Fig.14: Impédance d'entrée normalisée en fonction de la fréquence pour trois positions du point d'excitation.

Le cas examiné est celui de la thèse de Doctorat (Fig.70, Page.152) de DAMIANO [8]. Son modèle, calcule des courants de surface en se basant sur la résolution d'une équation intégrale de réaction dans le domaine spectral, à l'aide de la méthode des moments (Méthode de GALERKIN). Les champs électriques



aux interfaces s'expriment en fonction des courants de surface à l'aide des fonctions dyadiques de GREEN, qui tiennent compte, des caractéristiques des substrats, des conditions aux limites et de l'alimentation choisie pour l'antenne.

Le choix des fonctions de base, dont les variations sont proches de celles des courants de surface à déterminer, constituent l'originalité de cette méthode.

Le modèle L.M.A. n'est pas spécifique à un mode particulier, contrairement à la méthode précédente, et ne nécessite aucune recherche de fonctions de base; d'où sa simplicité d'emploi. Le cas de la figure 70, chez DAMIANO, ne concerne que le mode TM<sub>11</sub>. Le modèle L.M.A. tient compte, implicitement, de tous les modes qui existent dans la structure.

Le modèle L.M.A. confirme que la fréquence de résonance est pratiquement indépendante de la position du point d'excitation. Cette position peut donc être choisie de façon à avoir l'adaptation désirée.

La mesure expérimentale du cas étudié, devrait donner des courbes avec des parties réactives relevées de  $x_1$  (impédance introduite par le conducteur central de la ligne d'excitation).

### 3.2.4 Influence des dimensions de l'antenne plaque

Données:  $a_1 = 12.1 \text{ mm}$  ;  $x_a = 11 \text{ mm}$  ;  $H_1 = 1.59 \text{ mm}$  ;  $H_2 = 3.18 \text{ mm}$  ;  
 $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 2.33$  ;  $\text{tg } \delta_1 = \text{tg } \delta_2 = 0.0012$  ;  $ds_1 = ds_2 = 22.10$  ;  
 $N = 500$ .

L'influence des dimensions de l'antenne est illustrée par les figures 15 et 16 représentant les variations de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence et ce, pour trois valeurs distinctes du rayon de l'antenne disque.

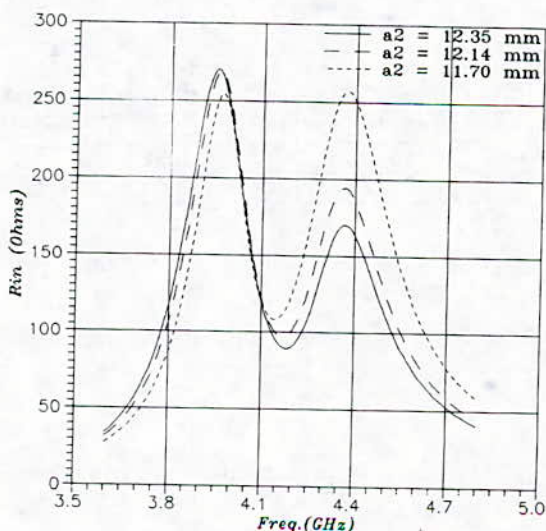


Fig.15:Partie réelle de l'impédance d'entrée pour trois valeurs du rayon de l'antenne.



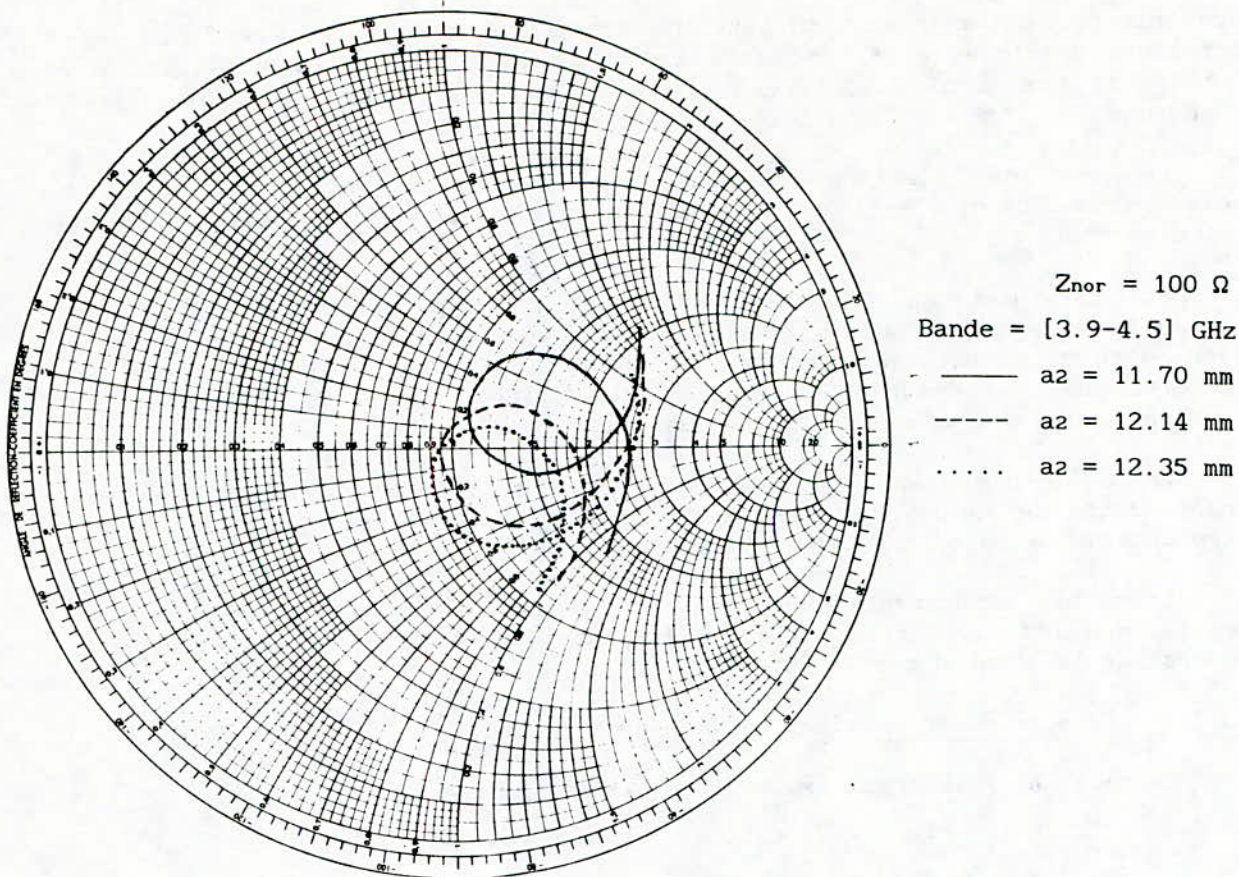


Fig.16: Influence des dimensions de l'antenne plaque sur l'impédance d'entrée.

Ces résultats permettent de relever les paramètres essentiels de la structure (Tab.7).

$a_2$ (mm)	REM1 ( $\Omega$ )	Rem ( $\Omega$ )	REM2 ( $\Omega$ )	$f_{rM1}$ GHZ	$f_{rm}$ GHZ	$f_{rM2}$ GHZ	$Z_{inr1}$ ( $\Omega$ )	$Z_{inr2}$ ( $\Omega$ )	$f_{r1}$ GHZ	$f_{r2}$ GHZ	$Z_{nor}$ ( $\Omega$ )	B(%) TOS $\leq 2$
12.35	271	89	170	3.95	4.18	4.37	266	155	3.97	4.32	157	13.10
12.14	270	97	194	3.96	4.17	4.36	263	185	3.98	4.33	165	13.45
11.70	255	108	257	3.97	4.14	4.37	223	256	4.01	4.36	172	13.49

Tab.7 : Paramètres essentiels de la structure en fonction des dimensions de l'antenne disque.

Ces résultats sont obtenus avec un coefficient de couplage doté d'un facteur de pertes de 3dB. On constate que:

- pour  $a_2 > a_1$ ,  $REM1 > REM2$ ;
- pour  $a_2 < a_1$ ,  $REM1 < REM2$ ;
- pour les trois cas, l'écart entre les deux fréquences de résonance  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$  est pratiquement constant.

la variation des dimensions de l'antenne, pour un directeur de dimension constante, permet de bien centrer la boucle. C'est la valeur de  $a_2$  (2.14 mm) la plus voisine de  $a_1$  (Fig.16) qui donne la boucle la mieux centrée. Au fur et



à mesure que  $a_2$  devient voisin de  $a_1$  le point double de la boucle se rapproche de l'axe réel et la bande passante augmente. Pour  $a_2$  inférieur à  $a_1$ , ce point double se trouve dans la partie inductive. Lorsque  $H_1$  est réduit de moitié, la bande passante passe de 19.24 % (Tab.6) à 13.2 % environ pour un T.O.S. inférieur ou égal à 2.

Il est donc possible de trouver une valeur du diamètre de l'antenne qui permet d'obtenir la boucle la mieux centrée avec un point double sur l'axe réel.

Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus antérieurement [8,10] à l'aide d'autres modèles.

### 3.3 Antenne circulaire associée à deux directeurs ( $m = 3$ )

Données:  $H_1 = H_2 = H_3 = 1.6 \text{ mm}$  ;  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon_{r3} = 2.17$  ;  $N = 500$

$$\text{tg } \delta_1 = \text{tg } \delta_2 = \text{tg } \delta_3 = 1.2 \cdot 10^{-3} ; \text{ds}_1 = \text{ds}_2 = \text{ds}_3 = 22 \cdot 10^{-6}$$

A partir de ces données fixes, nous nous sommes limités à l'étude de trois configurations distinctes à savoir:

- 2 cas non dégénérés type (a)
  - 1 cas doublement dégénéré type (g)
- } Tab.2

3.3.1 1<sup>er</sup> cas non dégénéré ( $a_1 = 6.60 \text{ mm}$      $a_2 = 6.70 \text{ mm}$      $a_3 = 6.84 \text{ mm}$ )

3.3.2 2<sup>ième</sup> cas non dégénéré ( $a_1 = 6.45 \text{ mm}$      $a_2 = 6.65 \text{ mm}$      $a_3 = 6.84 \text{ mm}$ )

3.3.3 Cas doublement dégénéré ( $a_1 = a_2 = a_3 = 6.84 \text{ mm}$ )

Ces trois configurations nous ont permis de tracer l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence. Les résultats sont illustrés respectivement par les figures 17,18,19,20,21,22 et permettent de déduire les caractéristiques principales suivantes:

cas	CK12	CK23	CK12	REM1 ( $\Omega$ )	frM1 (GHz)	Rem ( $\Omega$ )	frm (GHz)	REM2 ( $\Omega$ )	frM2 (GHz)	fr1 (GHz)	fr2 (GHz)	B(%) TOS $\leq$ 2
3.3.1	0.224	0.222	0.115	326	6.725	147	7.125	325	7.650	6.820	7.600	16.5
3.3.2	0.226	0.220	0.112	300	6.850	134	7.270	266	7.775	6.930	7.730	16.9
3.3.3	0.220	0.220	0.110	462	6.550	217	6.900	586	7.450	6.700	7.420	16.8

Tab.8:Caractéristiques principales d'une structure à trois lignes superposées.

#### Interprétation des résultats

a) Dans le cas 3.3.1, l'amplitude des deux pics est pratiquement la même (Fig.17) et le point double de la boucle (Fig.18) est proche de l'axe réel.

b) Dans le cas 3.3.2, la boucle est mieux centrée (Fig.19, 20) et le point double est sur l'axe réel pratiquement. Il constitue donc le cas le plus intéressant.

c) Dans le cas 3.3.3, doublement dégénéré, toute la boucle (Fig.21,22) est pratiquement dans la partie inductive, c'est la raison pour laquelle le point double de cette boucle s'éloigne de l'axe réel.

Au fur et à mesure que les dimensions des deux directeurs  $D_1$  et  $D_2$  décroissent, les fréquences de résonances  $f_{r1}$  et  $f_{r2}$  augmentent ce qui est

compatible avec les résultats obtenus dans le cas d'une antenne sans directeur et avec un seul directeur.

L'addition d'un deuxième directeur ne modifie pratiquement pas la bande passante. Il améliorera, sans doute, la directivité et le gain de la structure tricouche par analogie aux antennes filaires de type YAGI.

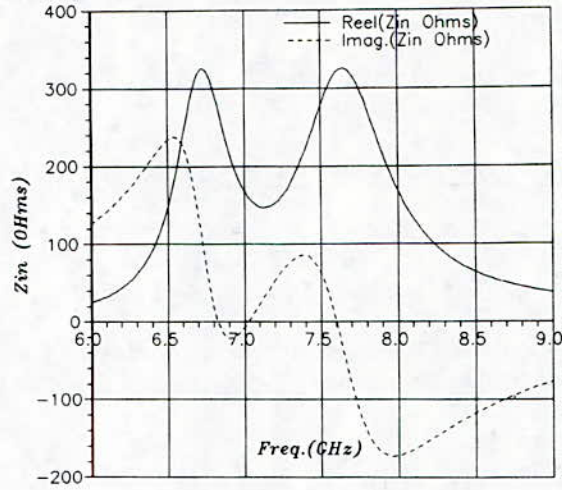
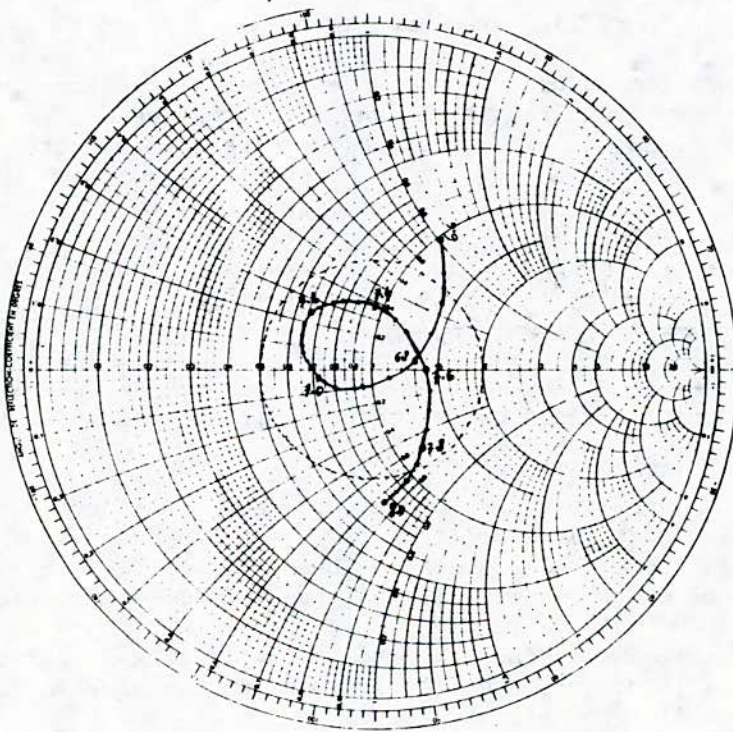


Fig.17: Impédance d'entrée en fonction de la fréquence cas 3.3.1.



$$Z_{nor} = 230 \Omega$$

Fig.18: Impédance d'entrée normalisée (cas 3.3.1).



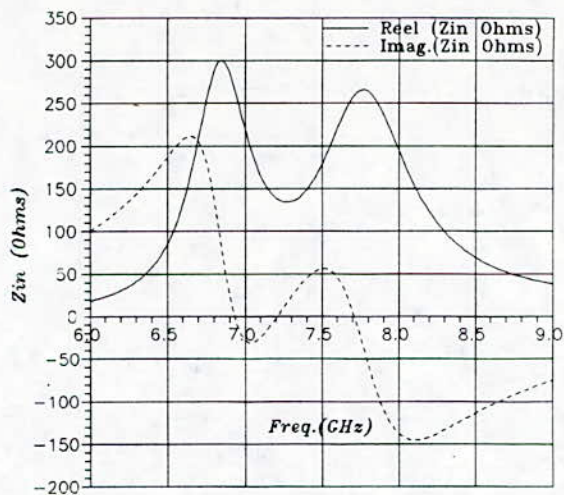
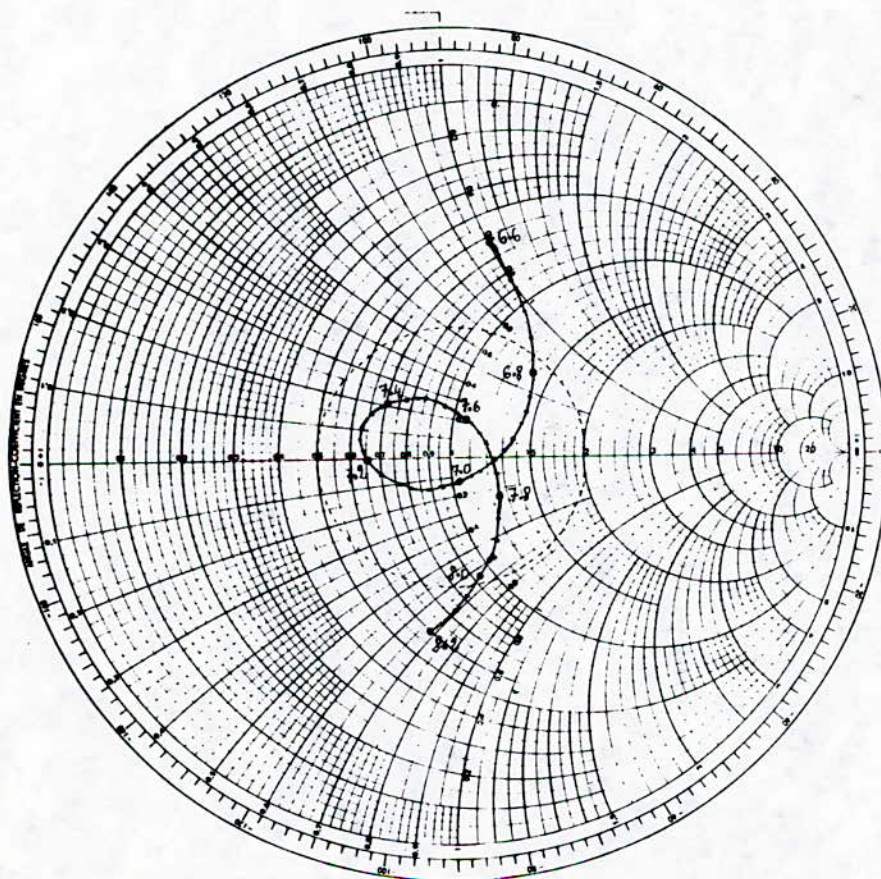


Fig.19: Impédance d'entrée en fonction de la fréquence cas 3.3.2.



$Z_{nor} = 210 \Omega$

Fig.20: Impédance d'entrée normalisée (cas 3.3.2).

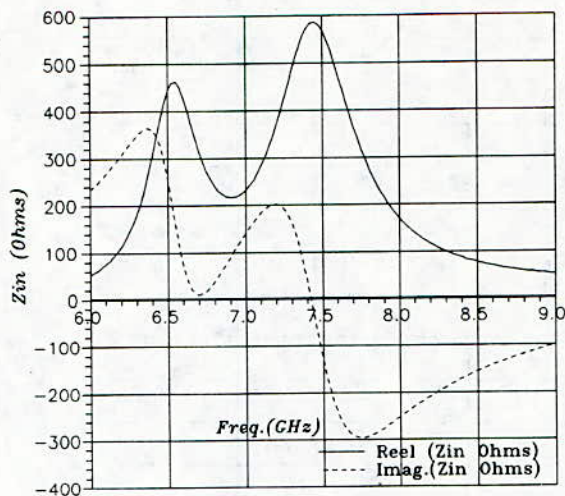
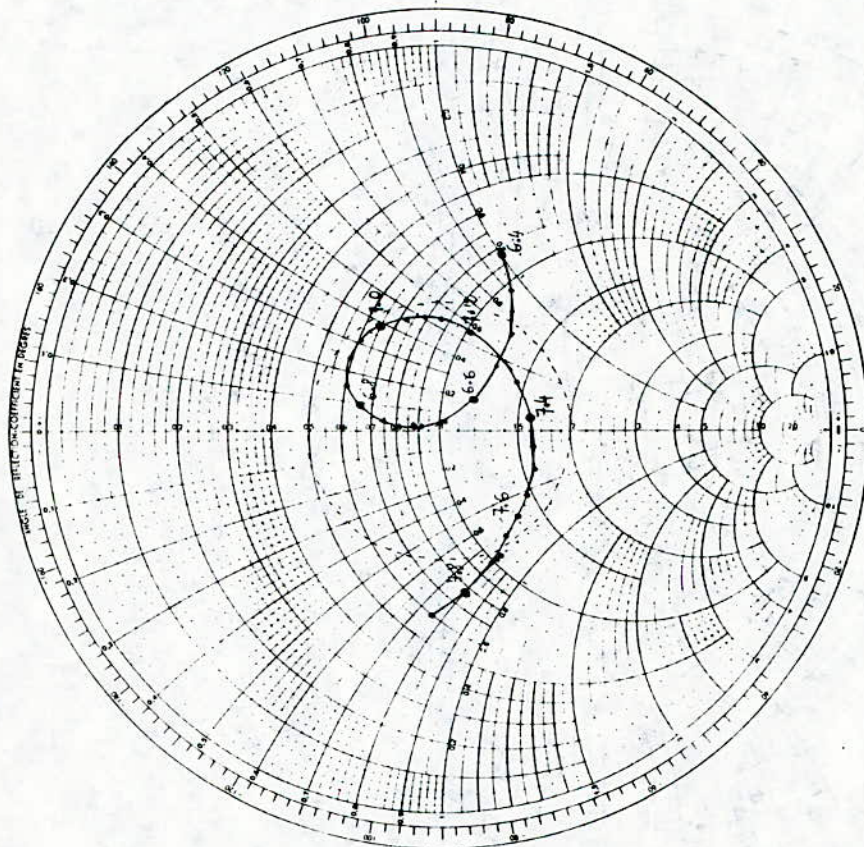


Fig.21: Impédance d'entrée en fonction de la fréquence cas 3.3.3.



$$Z_{nor} = 360 \Omega$$

Fig.22: Impédance d'entrée normalisée (cas 3.3.3).



## Conclusion

Le modèle utilisé, basé sur les formules d'analyse des lignes micro-rubans, est assez simple. Les résultats obtenus sont d'autant plus précis que le nombre de découpage  $N$  est grand, ce qui nécessite un temps de calcul important.

Si les pertes dans le diélectrique, dans le métal et par rayonnement sont prises en compte, il n'en est pas de même des pertes induites par les ondes de surface ni du rayonnement par le conducteur central de la ligne d'excitation.

Lorsque la différence des dimensions des deux conducteurs adjacents est supérieure à 9 %, le modèle perd son efficacité, car on ne peut plus assimiler les parties non couplées à des condensateurs plans.

Comparativement à d'autres théories [7,8], le modèle présenté ici calcule plus explicitement le coefficient de couplage et les résultats obtenus sont proches des valeurs expérimentales [2]. L'approximation faite en gardant ce coefficient constant pour toutes les lignes élémentaires sera levée dans un prochain article, ce qui permettra d'améliorer amplement ces résultats.

## Bibliographie

- [1] G.DUBOST, S.DECLOS et A.ZERGUERRAS

"Analyse d'antennes imprimées multicouches de forme quelconque à axe de symétrie en mode quasi-TEM".

l'onde électrique, Jan.-Fev. 1991, Vol.71, n°1, pp.48-57

- [2] A.ZERGUERRAS

"Contribution à l'étude d'antennes plaques de forme quelconque multicouche à large bande, application à l'antenne circulaire avec directeur"

Thèse de doctorat ès science soutenue le 13.Mai.1990 à l'E.N.P (Alger)

- [3] I.J, BAHL et P.BHARTIA

"Microstrip antennas" ARTECH-HOUSE, 1980

- [4] G.DUBOST, G.BEAUQUET

"Linear transmission line model analysis of a circular disc patch antenna"

Electronics letters, 23 rd october 1986, Vol.22, n°22, pp.1174,1176

- [5] JAMES J.R, HALL, P.S and WOOD,C.  
"Microstrip antennas theory and design"  
Peter Pengrinus Ltd, IEE electron waves series 12, 1981  
PP.24 et 246, 249
- [6] LONG S.A., SHEN, L.C., M.D., WALTON, M.R., ALLERDING  
"Impedance of a circular disc printed circuit antenna"  
electronics letters 12 Th october, 1978, Vol.14, n°21, PP.684,686
- [7] J.P DAMIANO, J.BENNEGEOUCHE, A.PAPIERNIK  
"Antennes microrubans multidiélectriques: Analyse de structures à géométrie mixte rectangulaire-disque"  
JINA, Nov.1988, Nice, PP. 225,228
- [8] J.P DAMIANO  
"Etude des antennes microrubans multicouches à éléments superposés ou décalés"  
Thèse de doctorat ès science 13.Jan.1989
- [9] DERNERYD,A.G "Microstrip array antenna"  
Proc. 6 th european Microwave Conference, 1976, pp.339-343.
- [10] LONG, S.A, and WALTON,W.D.  
"a dual frequency stacked circular disc antenna"  
IEEE Trans., 1979, A.P.27, pp. 270-273.



## Utilisation de l'algorithme LBG et du treillis en quantification vectorielle.

D. Berkani, G. Turgeon  $\diamond$ , A. Chekima, B. Derras.  
Départ. Electronique de l'Ecole Nationale Polytechnique.  
 $\diamond$  Département. Génie Electrique de l'Université de Sherbrooke.

### ملخص:

استعملت خوارزمية «ل.ب.ج.» (LBG) لإختيار أفضلى لقواميس الكممات و ذلك في حالة تطبيق طريقة إحصائية. والهدف من هذا البحث هو إيجاد خوارزميات تسمح بتصميم كممات شعاعية. نبين أيضا مدى تأثير خوارزمية «ل.ب.ج.» على البنيات المستطيلة والمستديرة و «1-6-9» وكذلك على المجموعات المكتلة في شكل «توزيع مجععاتي». في حالة منبع غوسي للإشارة، يجب استعمال عدد كبير من الإشعة في عملية التصميم. في هذا البحث نعطي أيضا أهم ما يتعلق بالتكميم الشعاعي المتشابك «ت.س.ك.» (TCQ) وكذلك خوارزمية «ل.ب.ج.» المرفوقة به. وبدلالة نسبة الإشارة إلى الضجيج، نجد أن بنية التشكيلة «1-6-9» تبقى الأفضل مقارنة بالتقنيات الأخرى للتكميم.

### Abstract:

The LBG algorithm has been used to optimize the dictionaries of quantizers in case of a statistical approach. The objective of this study is to obtain algorithms for design of vector quantizers. We show the LBG algorithm effects on the rectangular, circular and "1-6-9" structures and also, on the constellations configured in Set Partitioning. In the case of Gaussian excitation source, a great number of vectors is necessary to realise the design operation. The essential of Treillis Coded Quantization (TCQ) is given together with associated LBG algorithm. The performances in terms of SNR of the "1-6-9" structure turn out to be the best among all different quantization methods.

### Résumé:

L'algorithme LBG a été utilisé pour optimiser les dictionnaires des quantificateurs dans le cas d'une approche statistique. Le but de cette recherche est d'obtenir des algorithmes permettant un "design" de quantificateurs vectoriels. Nous montrons les effets de l'algorithme LBG sur les structures "rectangulaires", "circulaires" et la "1-6-9" ainsi que sur les constellations configurées en "Set Partitioning". Un nombre de vecteurs élevé, dans le cas d'une source d'excitation gaussienne, est nécessaire pour réaliser l'opération de "design". L'essentiel de la quantification par treillis (TCQ) est donné de même que l'algorithme LBG qui lui est associé. Les performances en terme de RSB de la structure "1-6-9" restent les meilleures pour les différentes techniques de quantification.

## Introduction

La quantification vectorielle [1, 2] consiste à grouper  $k$  échantillons  $x_i$  d'un signal de manière à former un ou plusieurs vecteurs  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ , dans un espace à  $k$  dimensions. Ces vecteurs sont par la suite quantifiés par un quantificateur  $Q$  de manière à obtenir un nouveau vecteur  $\mathbf{y} = Q(\mathbf{x})$ ; où  $\mathbf{y}$  est tiré d'un alphabet vectoriel  $\mathbf{Y}$ . Plusieurs références montrent que les performances de ce type de quantification sont supérieures ou au moins égales à celles obtenues par la quantification scalaire.

Le but de cette recherche est d'explorer divers algorithmes permettant de construire ces quantificateurs vectoriels et de comparer leur efficacité. Nous nous limiterons à des espaces vectoriels à deux dimensions et à des quantificateurs de 8 ou 16 vecteurs types. Ces quantificateurs seront utilisés pour coder du bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance égale à unité.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats obtenus à l'aide d'un algorithme dit LBG, du nom de ses auteurs Lynde, Buzo et Gray, ou "k moyenne" [3] que nous avons d'abord appliqué à des quantificateurs de 16 vecteurs types et ensuite à des quantificateurs de 8 vecteurs types. Dans un second temps, nous aborderons la technique de quantification par treillis.

## 1. L'algorithme LBG ou de la k moyenne

### 1.1 L'idée de base

Soit un nombre  $N$  de vecteurs dans un espace  $k$  dimensions formés à partir de  $kN$  échantillons. Nous disposons au départ d'un alphabet vectoriel  $\mathbf{Y}'$  contenant  $m$  vecteurs types  $\mathbf{y}'$  disposés d'une façon quelconque dans l'espace. Notre but est d'obtenir un alphabet vectoriel  $\mathbf{Y}$  qui permettra de coder les échantillons de  $\mathbf{X}$  avec une erreur moindre que celle que nous aurions obtenu en utilisant l'alphabet  $\mathbf{Y}'$ . L'algorithme de la  $k$  moyenne [2, 3] emploie un procédé itératif pour trouver  $\mathbf{Y}$  à partir de  $\mathbf{Y}'$ .

Lors du codage, chacun des vecteurs  $\mathbf{x}$  sera associé à l'un des vecteurs  $\mathbf{y}$  qui causera la plus petite erreur  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  possible au décodage. Cette erreur est obtenue par:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{k-1} (x_i - y_i)^2 \quad (1.1)$$

La relation (1.1) exprime la distance euclidienne entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .



Chacun des vecteurs  $y$  servira donc à coder ou à représenter avec plus ou moins de précision un certain nombre de vecteurs de l'ensemble  $X$ . La distance euclidienne  $d(x, y)$  reste le critère de fidélité de cette représentation.

Pour obtenir l'alphabet vectoriel  $Y$  à partir de  $Y'$ , nous commençons par associer chacun des vecteurs  $x$  à l'un des vecteurs  $y'$  qui est le moins éloigné (au sens de la distance euclidienne). La figure 1.1 montre cette association.

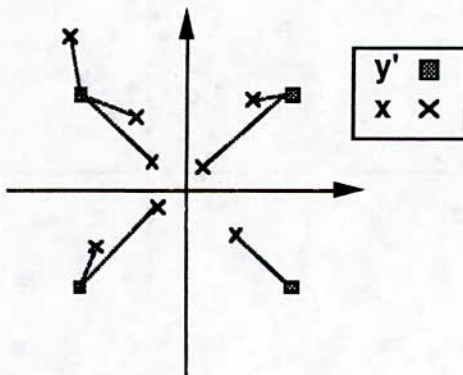


Figure 1.1: Chacun des vecteurs  $x$  est associé au vecteur  $y'$  le plus proche (au sens distance euclidienne).

La deuxième étape consiste à trouver le centre de chacune des classes ainsi constituées et à y placer le vecteur  $y$  comme le montre la figure 1.2.

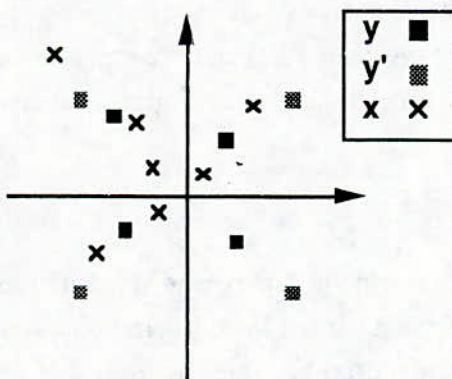


Figure 1.2: On positionne les vecteurs de l'alphabet résultant  $Y$  au centre des classes des vecteurs  $x$ .

Comme les vecteurs  $y$  changent de position, il est probable que plusieurs vecteurs  $x$  changeront d'allégeance. Nous recommencerons alors le processus de l'étape 1 jusqu'au moment où une certaine stabilité sera atteinte dans la formation des classes. On peut schématiser cette opération par la figure suivante (figure: 1.3).

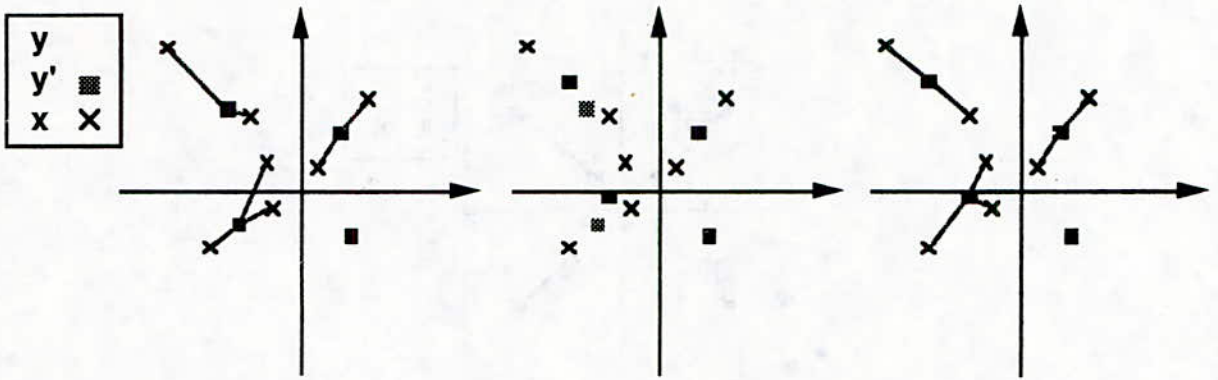


Figure 1.3: Succession des assignations  $x$ ,  $y$  et des changements d'allégeances des vecteurs  $x$ .

L'algorithme de la  $k$  moyenne peut être résumé comme suit :

1. Associer chacun des vecteurs  $x$  à un des vecteurs  $y$  qui est le plus proche; la distance  $d(x, y)$  est minimale.
2. Calculer le centre de gravité de chacune des classes ainsi formées.
3. Placer chacun des vecteurs  $y$  au centre de gravité de sa classe.
4. Recommencer à l'étape 1 si l'erreur de quantification est supérieure à un seuil prédéterminé.

## 1.2 Les résultats

Nous allons appliquer l'algorithme de la  $k$  moyenne sur deux types de configurations de vecteurs : la configuration rectangulaire et la configuration circulaire appelée également sphérique. Ces configurations sont décrites par les figures 1.4 et 1.5.



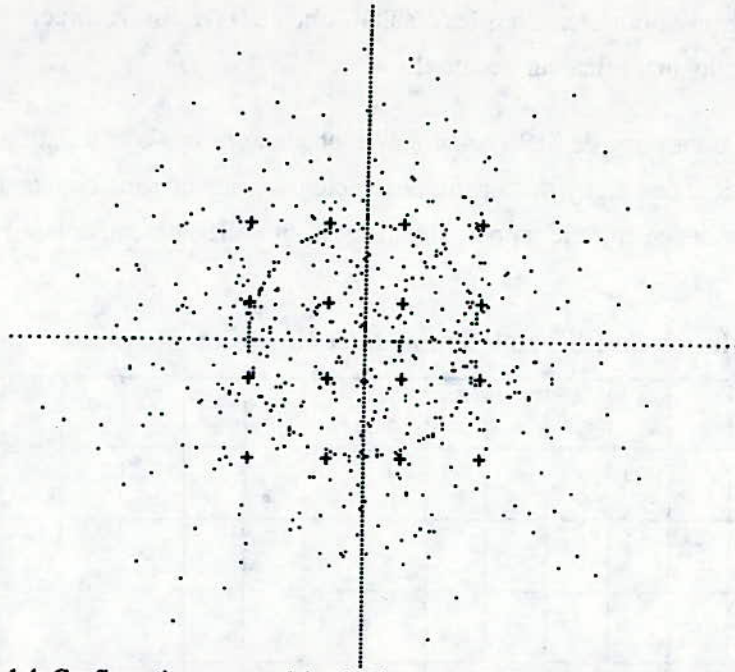


Figure 1.4: Configuration rectangulaire de dimension 0,67. Le mot dimension est ici interprété comme la distance en  $x$  ou  $y$  entre deux points voisins de la constellation.

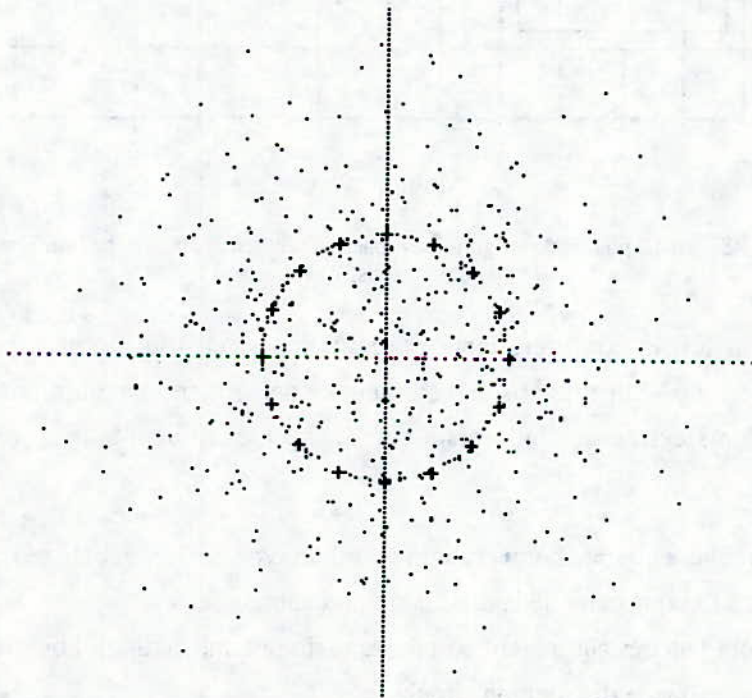


Figure 1.5: Configuration sphérique de rayon 1.

Dans un premier temps, nous analysons les résultats obtenus en utilisant directement ces constellations dans un quantificateur vectoriel.

Nous avons codés un groupe de 512 vecteurs avec chacune de ces constellations après avoir multiplié les coordonnées  $x$  et  $y$  de chacun des vecteurs types par une constante. La figure 1.6 montre la dépendance entre le rapport signal sur bruit (RSB) obtenu et la «dimension» de la constellation.

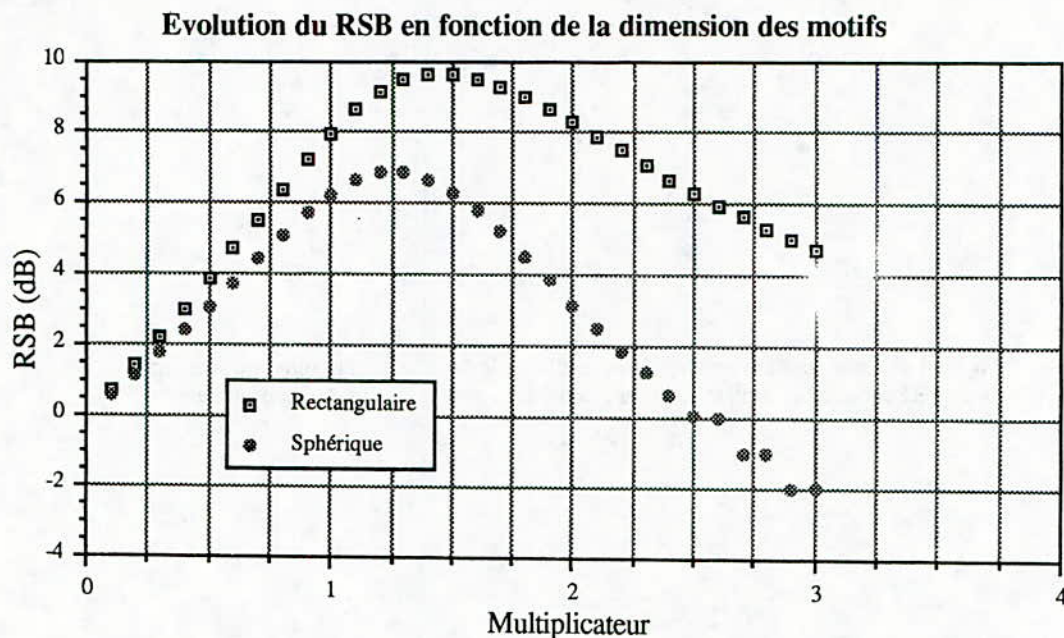


Figure 1.6: RSB en dB pour les configurations sphériques et rectangulaires pour différentes dimensions.

Comme on le voit ici, la configuration rectangulaire est en tout point supérieure à la configuration sphérique. Elle atteint son maximum de performances pour un multiplicateur de 1,445. Les points extrêmes sont alors à une distance euclidienne de 2 par rapport au centre.

La distribution circulaire atteint son maximum pour un rayon de 1,225 mais ce maximum est environ 1,5 dB plus bas que celui de la distribution rectangulaire.

Ces résultats ne sont pas très surprenant compte tenu du fait que la distribution rectangulaire remplit mieux l'espace que la distribution circulaire.

Nous avons appliqué la  $k$  moyenne à chaque configuration pour quatre multiplicateur différentes : 1; 1,5; 2; 2,5. Les résultats pour chacune des configurations sont présentés ci-dessous.



### Configuration rectangulaire

La  $k$  moyenne améliore assez peu la meilleure configuration rectangulaire. En effet, la configuration rectangulaire de «dimension» 1,445 avait au départ un RSB de près de 10 dB; alors que le RSB maximum trouvé après la  $k$  moyenne est de 10,479 dB (pour un rayon original de 1,5). De plus, l'erreur finale est approximativement la même pour tous les rayons initiaux.

La figure 1.7 montre les trajets de chacun des centres de classe sous l'influence de la  $k$  moyenne. Comme on le voit, les centres de classes montrent une tendance à se déplacer vers la même position.

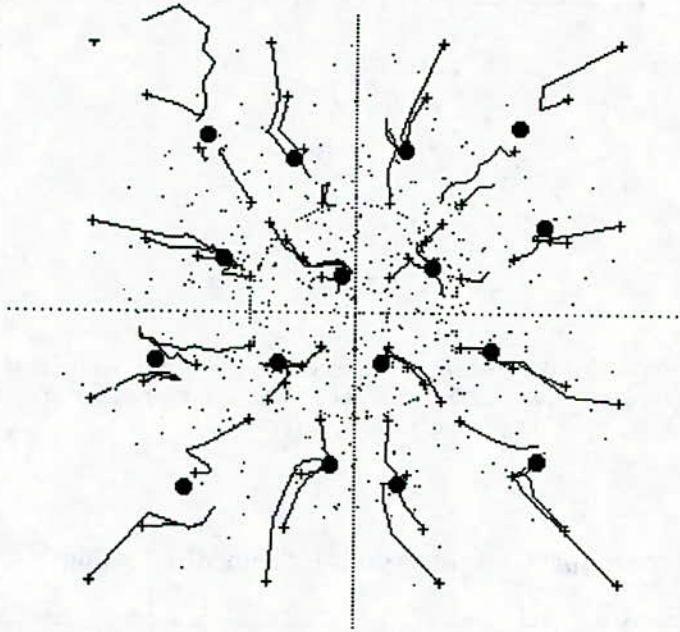


Figure 1.7: Trajets des centres de classe sous l'influence de la  $k$  moyenne. La figure montre les trajets pour quatre multiplicateurs initiaux (1, 1,5, 2, 2,5). Les points noirs représentent un estimé de la moyenne des centres de classe.

### Configuration sphérique

La configuration sphérique atteint des résultats légèrement supérieurs à ceux de la configuration rectangulaire et surtout plus constant que ces derniers.

La figure 1.8 montre en effet les trajets des centres de classe ainsi qu'un estimé de la moyenne des positions finales de ces mêmes centres.

On constate aisément que le rayon initial de la configuration n'a que fort peu d'influence sur la distribution finale.

La figure 1.9 montre les erreurs des différentes configurations après l'application de la  $k$  moyenne sur différentes configurations de base. Comme on le constate, c'est la

configuration sphérique qui semble conduire aux résultats les plus indépendants des dimensions initiales.

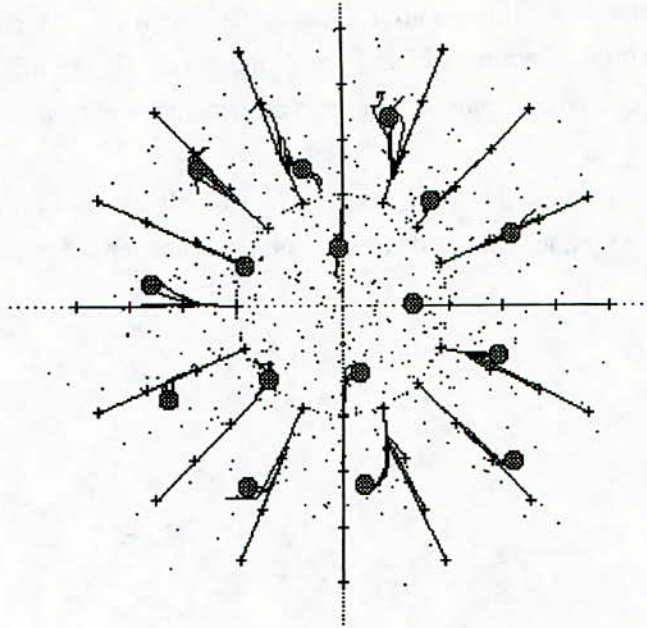


Figure 1.8: Trajets des centres de classe sous l'influence de la k moyenne. La figure montre les trajets pour quatre rayons initiaux (1, 1,5, 2, 2,5). Les points gris représentent un estimé de la moyenne des centres de classe.

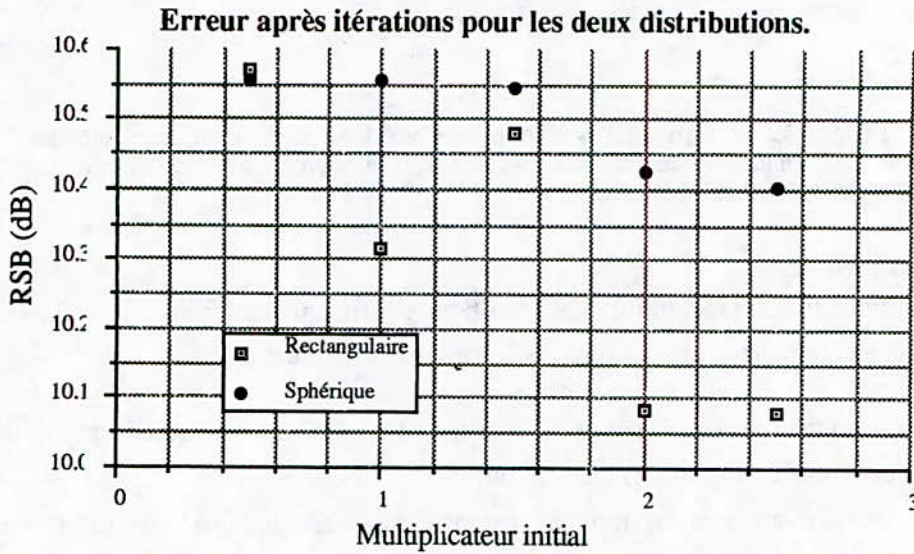


Figure 1.9: RSB final obtenu pour les configurations sphériques et rectangulaires pour les rayons 0.5, 1, 1.5, 2 et 2.5.



La figure 1.10 montre les positions finales des centres de classe tel qu'estimé sur les figures 1.7 et 1.8. Pour plus de clarté, nous les avons superposées sur un même graphique, débarrassées des trajets et des points de départs.

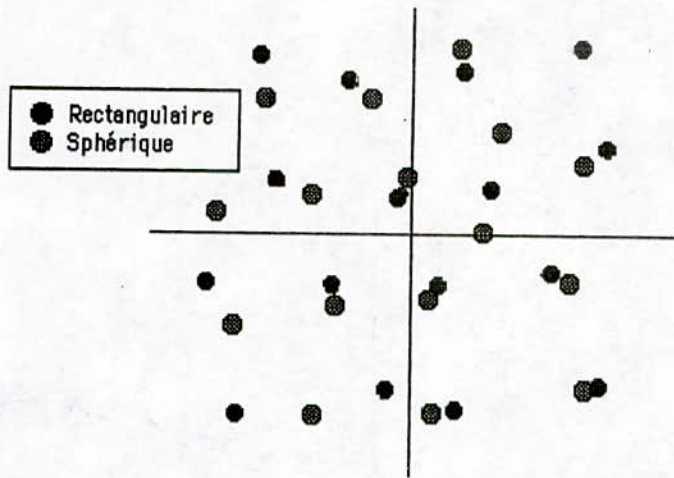


Figure 1.10: Titre

On constate que ces deux distributions sont en somme toutes similaires et qu'elles tendent toutes deux à celle présentée par [4] et que nous appellerons la distribution 1-6-9. Curieux, nous avons essayé d'entrer cette distribution dans notre algorithme de  $k$  moyenne pour voir ce qui allait lui arriver.

Au départ, la configuration 1-6-9 donne une performance en terme de RSB de 9,988 dB, valeur tout aussi acceptable que la configuration rectangulaire. Après quelques itérations, on en arrive à une performance de 10,522 dB; l'une des meilleures obtenues. La figure 1.11 montre de plus la très grande stabilité de la configuration.

Une question demeure alors. Pourquoi la  $k$  moyenne ne transforme-t-elle pas une configuration quelconque en configuration 1-6-9 si celle-ci est supérieure aux autres configurations obtenues? Pour répondre à cette question, il reste maintenant à essayer les trois quantificateurs obtenus sur un ensemble de vecteurs plus vaste que celui utilisé pour nos itérations. Cet ensemble sera formé de 16384 vecteurs formés par des échantillons tirés d'une distribution gaussienne à moyenne nulle et de variance égale à l'unité.

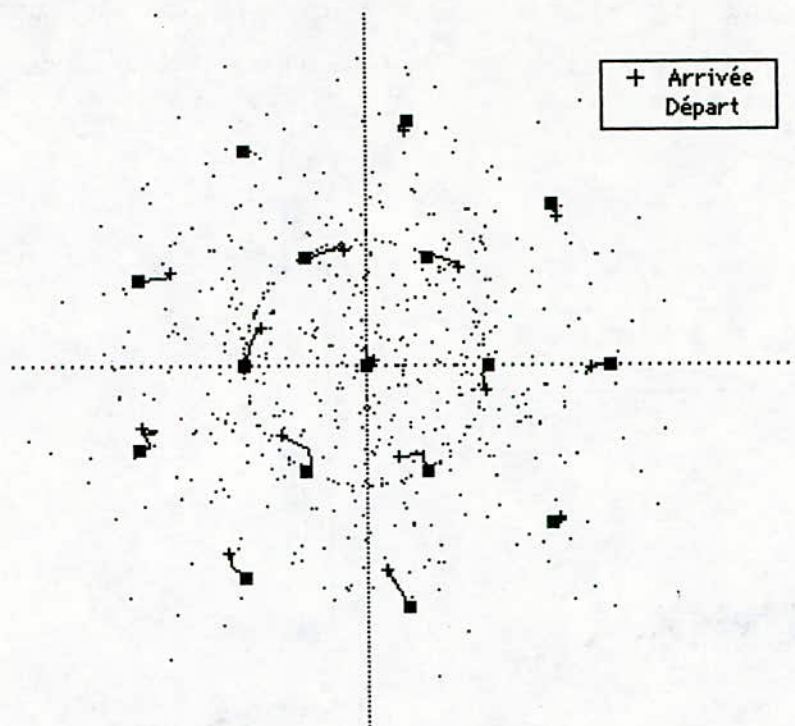


Figure 1.11:Évolution de la configuration donnée par [4] dans l'algorithme de la k moyenne.  
 Dans le reste de cette section, nous appellerons cette configuration (avant itération) la configuration 1-6-9.

Les résultats obtenus sont présentés par le tableau 1.1.

Constellations	Echelle	RSB
Rectangulaire	1,445	9,375 dB
Rectangulaire itérée	1,445	9,518 dB
sphérique	1,225	6,557 dB
sphérique itérée	1,225	9,582 dB
1-6-9	0,925	9,729 dB
1-6-9 itérée	0,925	9,885 dB

Tableau 1.1: Performance en terme de RSB des différentes constellations.



Comme le montre le tableau 1.1, la meilleure des trois configurations reste la structure 1-6-9 qui semble être une tendance de la  $k$  moyenne.

## 2. La quantification par treillis

La quantification vectorielle classique utilise un alphabet vectoriel de  $2m$  vecteurs  $y$  en  $k$  dimensions pour coder un ensemble  $X$  de vecteurs échantillons ; ce qui nous donne un débit de  $m$  bits par vecteurs ; ou encore de  $m/k$  bits par échantillons.

Avec la quantification par treillis (TCQ) [5,6,7,8,9,10], nous allons doubler la taille de l'alphabet vectoriel tout en conservant le débit intact. Il nous faudra bien sûr imposer quelques règles sur l'utilisation de notre nouvel alphabet.

### 2.1 Formation de l'alphabet

Supposons que nous disposions d'un alphabet vectoriel  $Y$ , composé de  $2m$  vecteurs  $k$  dimensions. Doublons le nombre de vecteurs afin d'obtenir un alphabet vectoriel  $Y'$  composé de  $2m+1$  vecteurs. Séparons maintenant notre nouvel alphabet en  $2m'+1$  sous-alphabets contenant chacun  $2m-m'$  vecteurs. Cette séparation devra se faire de telle sorte que chacun des sous-alphabets soit lui-même un bon quantificateur. On peut réaliser ceci en suivant les règles du "Set-Partitioning" exposées par Ungerboeck [5 et 7].

Jusqu'à maintenant, le problème n'a que fort peu changé par rapport à celui de la quantification vectorielle. En effet, nous disposons maintenant le  $2m'+1$  sous-alphabet contenant  $2m-m'$  vecteurs ; soit un total de  $2m+1$  vecteurs. Si nous utilisions cet ensemble de sous-alphabet dans un codeur de quantification vectoriel, il nous faudrait  $m'+1$  bits pour identifier le sous-alphabet et  $m-m'$  bits pour identifier le vecteur type ; ce qui nous donnerait un débit de  $m+1$  bits.

C'est là que le treillis intervient. Il nous permettra de ramener le débit à  $m$  bits en imposant des règles d'utilisation de notre alphabet.

### 2.2 Utilisation de l'alphabet

Le principe consiste à n'utiliser que  $2m$  des  $2m+1$  vecteurs types disponibles dans l'alphabet; mais en changeant les membres de ce groupe de  $2m$  vecteurs selon des règles connues tant du codeur que du décodeur.

Dans notre cas, nous avons utilisé un alphabet vectoriel de 16 vecteurs types séparés en 4 sous-alphabet nommés  $Q_0$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ . Notre codeur peut être représenté par un diagramme de transitions possédant quatre états. Deux transitions permettent de quitter un

état, et deux transitions arrivent à un état. Un quantificateur  $Q_n$  est associé à chacune de ces transitions. La figure 2.1 illustre ce diagramme de transition.

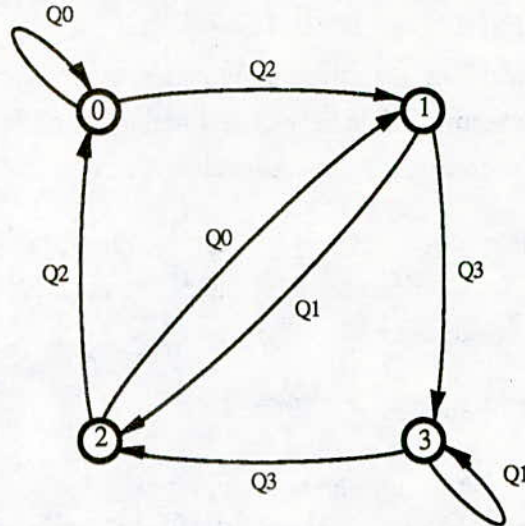


Figure 2.1: Diagramme de transition du quantificateur utilisé dans cette expérience. Les états du quantificateur (0, 1, 2 et 3) permettent d'utiliser soit les sous-alphabets  $Q_0$   $Q_2$  soit les sous-alphabets  $Q_1$   $Q_3$ . De plus, le choix de l'un ou l'autre des sous-alphabets permis dans un état occasionne une transition vers un nouvel état.

On remarque en fait qu'à chaque état du treillis, nous avons le choix d'utiliser soit les quantificateurs  $Q_0$  et  $Q_2$  ; soit les quantificateurs  $Q_1$  et  $Q_3$ . Toutefois, le choix entre les deux quantificateurs possibles a aussi une implication fort importante sur la façon dont seront quantifiés les vecteurs suivants.

Supposons en effet que nous nous trouvions à l'état 0 du treillis et que l'on tente de quantifier un vecteur  $x_0$  quelconque. Nous avons le choix d'utiliser l'un des vecteurs types de  $Q_0$  ou l'un des vecteurs types de  $Q_2$  pour représenter  $x_0$ . Si nous choisissons notre vecteur type dans  $Q_0$ , nous serons obligé de quantifier le prochain vecteur ( $x_1$ ) avec le même groupe  $Q_0$   $Q_2$ . Si par contre nous choisissons d'utiliser  $Q_2$  pour  $x_0$  ; nous serons obligé de quantifier le prochain vecteur  $x_1$  avec l'un des quantificateurs de l'ensemble  $Q_1$   $Q_3$ . Comme le choix entre  $Q_0$ - $Q_2$  et  $Q_1$ - $Q_3$  dépend des prochains vecteurs, attendons de les connaître pour prendre une décision.

Choisissons pour l'instant le meilleur représentant de  $Q_2$  et le meilleur représentant de  $Q_0$ . Trouvons l'erreur que chacun de ces représentants occasionne (le coût du choix) et portons le tout sur un arbre binaire tel qu'illustré à la figure 2.2.



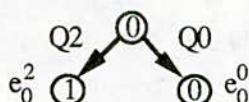


Figure 2.2: Transitions possibles pour le premier vecteur considéré (si on part de l'état 0 du diagramme). On tente de coder  $x_0$  par le meilleur représentant de  $Q_0$  et de  $Q_2$ .

Prenons maintenant le vecteur suivant ( $x_1$ ) et regardons tous les choix. Si nous avons codé  $x_0$  avec  $Q_0$ , les mêmes choix s'appliquent à  $x_1$  et nous répétons simplement la figure 2.2. Si par contre notre décision de coder  $x_0$  avec  $Q_2$  était judicieuse, c'est maintenant de  $Q_1$  et  $Q_3$  qu'il faudra se servir pour coder  $x_1$ . En choisissant encore le meilleur représentant de chacun des sous-alphabets  $Q_n$  et en reprenant la procédure développée sur la figure 2.2, nous obtenons un arbre binaire plus développé montré à la figure 2.3

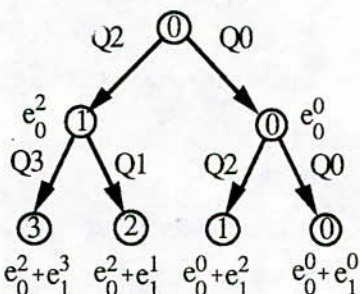


Figure 2.3: État de l'arbre binaire après la quantification du second vecteur  $x_1$ . Chacune des feuilles de l'arbre porte l'erreur accumulée sur les vecteurs  $x_0$  et  $x_1$ .

On voit dès maintenant apparaître l'essence de la quantification par treillis. Imaginons en effet que le premier vecteur ( $x_0$ ) soit mieux représenté par un vecteur du sous-alphabet  $Q_0$  et juste un peu moins bien représenté par un vecteur du groupe  $Q_2$ . Ceci revient à dire que  $x_0$  se situe approximativement à mi-chemin entre le meilleur vecteur de  $Q_0$  et le meilleur de  $Q_2$ , juste un peu plus près de celui de  $Q_0$ . L'erreur sur  $x_0$  est alors relativement grande. Si par contre le vecteur  $x_1$  est très bien représenté par l'un des vecteurs de  $Q_1$ - $Q_3$  mais mal représenté par l'un des vecteurs de  $Q_0$ - $Q_2$ ; l'une des feuilles 1-3 portera une erreur cumulée plus faible que les feuilles 1-2. L'arbre nous permet donc de choisir la meilleure erreur cumulée; c'est à dire que nous accepterons de faire une erreur plus grande sur  $x_0$  si ce choix s'avère payant pour les vecteurs suivants.

Continuons maintenant avec  $x_2$ . Chacune des quatre feuilles de l'arbre nous permet de faire deux choix de quantificateurs, mais ces choix ne sont pas indépendants les uns des autres. En effet, les feuilles 0 et 2 nous offrent les mêmes quantificateurs ( $Q_0$  et  $Q_2$ ) et ont des chemins qui aboutissent aux mêmes feuilles. Il est en de même pour les feuilles 1 et 3 qui nous offrent les quantificateurs  $Q_1$  et  $Q_3$  et aboutissent aux feuilles 2 et 3. Cette situation est illustrée sur la figure 2.4

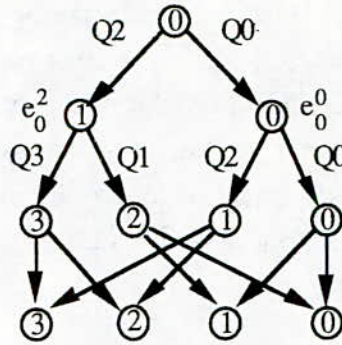


Figure 2.4: État de l'arbre binaire au troisième vecteur. Cette configuration porte le nom de treillis.

En fait, à partir du troisième vecteur, l'arbre se replie sur lui-même et devient un treillis. Des deux chemins arrivant à chacun des états, un seul présente un quelconque intérêt. En effet, chacun de ces chemins représente un passé différent mais ils auront le même avenir car ils aboutissent au même état. Il est donc évident que le chemin qui aura accumulé la plus forte erreur ne saurait nous intéresser. Le chemin restant (celui ayant la plus faible erreur cumulée) est nommé le survivant. Il représente, pour les chemins arrivant à un état donné, la meilleure stratégie de quantification pour les vecteurs passés. À chaque nouveau vecteurs  $x_i$  il y aura quatre de ces survivants et par conséquent quatre chemins arrivant à chacun des états. Après un nombre  $n$  de vecteurs, nous choisirons parmi ces quatre chemins celui qui a cumulé la plus faible erreur.

### 2.3 Algorithme de la quantification par treillis

1. Au départ, assigner une erreur cumulée nulle à l'un des états du treillis et une erreur infinie aux autres. Le codeur et le décodeur s'entendent préalablement sur le choix de l'état ayant une erreur nulle.
2. Prendre un vecteur de l'échantillon et calculer les erreurs  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ . L'erreur en est la plus petite erreur causée par un quantificateur  $Q_n$ .



3. Pour chaque état du treillis, calculer les deux erreurs cumulées en sommant l'erreur cumulée de l'état parent avec l'erreur en associée à la transition considérée. Conserver le chemin donnant l'erreur cumulée la plus faible.
4. Pour chacun des états, mémoriser le chemin survivant ( 1bit ) ainsi que l'indice du vecteur type dans le quantificateur associé au chemin ( $m - m'$  bits).
5. Si moins de  $n$  vecteurs ont été considérés, reprendre à l'étape 2. Si  $n$  vecteurs ont été considérés, choisir parmi les quatre chemins celui ayant la plus faible erreur cumulée et coder les informations le concernant (transitions et indices de chaque étage). Reprendre à l'étape 1. Un exemple simple mais très clair de cet algorithme est donné dans [9].

#### 2.4 La $k$ moyenne par treillis

Il reste maintenant à construire les quantificateurs vectoriels que nous allons utiliser dans le treillis. Nous allons procéder à une variante de la  $k$  moyenne que nous désignons par la  $k$  moyenne par treillis [10].

Il s'agit simplement d'utiliser le treillis lui-même pour classifier les points de la séquence d'apprentissage. On utilise un treillis codant d'un seul coup tous les vecteurs de la séquence et on associe ainsi les vecteurs à l'un des vecteurs types des quantificateurs. Ceux-ci sont alors replacés sur le barycentre de leur classe et on reprend le processus jusqu'au moment où le RSB cesse d'augmenter.

L'algorithme suivant illustre cette procédure :

- 1- Au départ, assigner une erreur cumulée nulle à l'état 0 du treillis, une erreur infinie aux autres états.
- 2 - Prendre un vecteur de l'échantillon et calculer les erreurs  $e_0, e_1, e_2$  et  $e_3$ . L'erreur en est la plus petite erreur causée par un quantificateur  $Q_n$ .
- 3 - Pour chaque état du treillis, calculer les deux erreurs cumulées en sommant l'erreur cumulée de l'état parent avec l'erreur en associée à la transition considérée. Conserver le chemin donnant l'erreur cumulée la plus faible.
- 4 - Pour chacun des états, mémoriser le chemin survivant (1 bit) ainsi que l'indice du vecteur type dans le quantificateur associé au chemin ( $m - m' = 2$  bits).
- 5 - Si moins de  $n$  vecteurs ont été considérés, reprendre à l'étape 2. Sinon, passer à l'étape 6.
- 6 - Si  $n$  vecteurs ont été considérés, choisir parmi les quatre chemins celui ayant la plus faible erreur cumulée.
- 7 - Pour chaque étape de ce chemin, assigner le vecteur de l'échantillon au vecteur type choisi.

8 - Positionner les vecteurs types au barycentre de leur classe et reprendre à l'étape 1 jusqu'à ce que l'erreur ne descende plus de façon significative.

Les résultats obtenus sont donnés ci-dessous. Dans tous les cas, un échantillon de 512 vecteurs d'apprentissage était présenté à un treillis 4 états.

### Constellation rectangulaire

Nous avons essayé l'algorithme de la k moyenne par treillis avec un échantillon de 512 vecteurs et les mêmes constellations rectangulaires déjà utilisées. Comme on le constate sur la figure 2.5, les constellations obtenues après itération se ressemblent beaucoup plus que celles présentées dans la première partie.

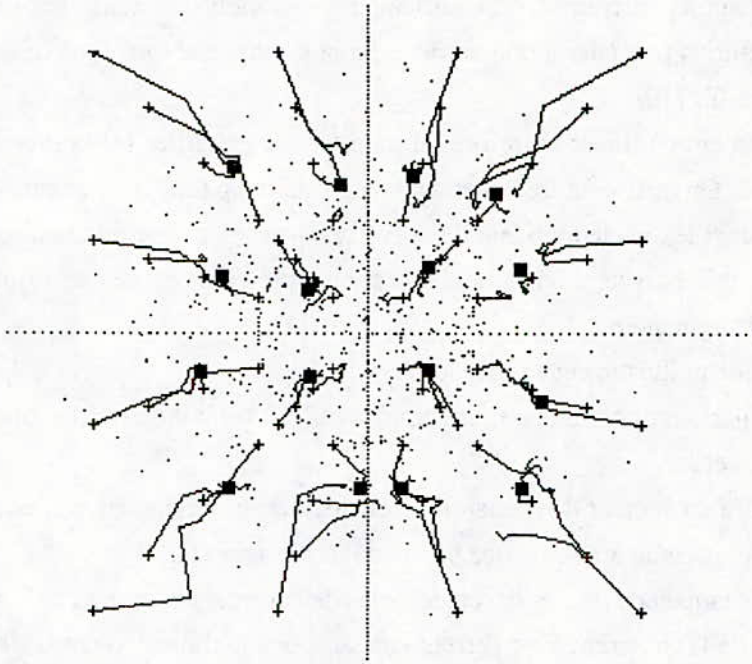


Figure 2.5: Trajets des constellations rectangulaires soumises à la k moyenne par treillis. Les points noirs représentent un estimé de la constellation moyenne résultante.

On remarquera de plus que la différence entre la constellation moyenne obtenue à la figure 2.5 et celle obtenue à la figure 1.7 est minime.

### Constellation sphérique

Comme pour la k moyenne classique, la configuration sphérique présente aussi une grande stabilité ; c'est à dire que la k moyenne par treillis trouve très vite une constellation optimale locale et que toutes les dimensions de départ de la configuration sphérique aboutissent à peu



près au même résultat. La figure 2.6 montre les trajets suivis et les estimés des points d'arrivés pour ces constellations.

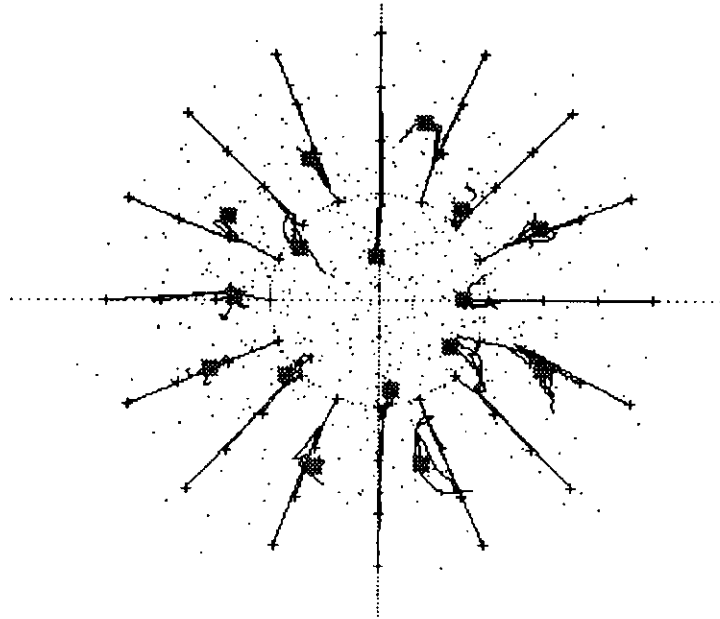


Figure 2.6: Trajets des vecteurs types des quatre quantificateurs soumis à la  $k$  moyenne par treillis. Les points gris représentent un estimé des positions finales.

Nous devons aussi remarquer que cette figure est très proche de la figure 1.8 obtenue à partir d'une  $k$  moyenne classique. Si la  $k$  moyenne classique trouve une constellation optimale locale, la  $k$  moyenne par treillis trouve approximativement la même constellation optimale locale avec une surprenante constance.

Pour ce qui est de la constellation 1-6-9, que nous avons aussi essayé dans notre algorithme de  $k$  moyenne par treillis, les résultats sont un peu plus surprenants. En effet, la  $k$  moyenne classique n'affectait pratiquement pas cette constellation, se contentant de la redimensionner légèrement (et bien sûr de la déformer quelque peu). Avec l'algorithme de la  $k$  moyenne par treillis, la modification de la constellation est beaucoup plus forte. Nous avons découvert par la suite que la constellation 1-6-9 utilisée pendant toute la session n'était pas, pour le treillis du moins, dimensionnée correctement. En effet, le maximum de RSB enregistré pour cette constellation se situe pour un rayon du cercle intérieur de 0,9 et non de 1. Nous devons en fait tirer la même conclusion que dans le cas de la  $k$  moyenne classique : un échantillon de 512 vecteurs d'apprentissage est nettement insuffisant pour obtenir un bon quantificateur.

## Bibliographie

- [1] J.P. Adoul, "La quantification vectorielle des signaux: approche algébrique," *Annales des télécommunications*, 41, no 3-4, 1986.
- [2] R.M.Gray, "Vector quantization," *IEEE ASSP Magazine*, vol., pp 4-29, April 1984.
- [3] Y. Linde, A. Buzo and R.M. Gray, "An algorithm for vector quantizer design," *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-28, pp 84-95, Jan. 1980.
- [4] R.T. Fisher and R.M. Dichary, "Vector quantizer design for memoryless Gaussian, Gamma and Laplacian sources," *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-32, September 1984.
- [5] G. Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel Phase Signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-28, January 1982.
- [6] G. Ungerboeck, "Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Part I : Introduction," *IEEE Communications Magazine*, Vol 25, no2, février 1987
- [7] G. Ungerboeck, "Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Part II : State of the Art," *IEEE Communications Magazine*, Vol 25, février 1987.
- [8] M.W. Marcellin and T.R. Fischer, "Treillis coded quantization of memoryless and Gauss-Markov sources," Submitted to *IEEE Trans. on Information theory*, 1988 .
- [9] G. Turgeons, D. Berkani, J.P. Adoul, "La Quantification par Treillis," *Congrès des Universités du Québec, Sherbrooke*, Mai 1991.
- [10] D. Berkani, A Chekima, J.P. Adoul, "Discretisation de la Spirale d'Archimède: Application à la Quantification et la Modulation," *Proceeding GRETSI Juan-Les-Pins*. Septembre 1991.



# LA SENSIBILITÉ DU COUT D'USINAGE AUX VARIATIONS DES PARAMETRES DE COUPE

DANIEL LEBLANC # 1

MOHAMMED KHALFOUN # 2

MARS 1990

---

# 1 Professeur agrégé, Département de génie industriel  
École Polytechnique de Montréal.

# 2 Doctorant, Département de génie industriel  
École Polytechnique de Montréal. Maître assistant titulaire,  
Département de génie industriel, École Nationale Polytechnique  
d'Alger.

## RÉSUMÉ

La vitesse, l'avance et la profondeur de coupe affectent le coût d'usinage. Ce travail étudie la sensibilité du coût unitaire à des variations de ces paramètres. On montre que le coût est significativement sensible aux variations de vitesse pour les outils en acier et carbure mais insensible pour les outils en céramique. Toutefois, la profondeur de coupe reste dans tous les cas la variable prédominante du point de vue économique.

Les résultats obtenus sont utiles tant pour la détermination des conditions de coupe sur les équipements existants que dans le choix et la conception de nouveaux équipements.

## ABSTRACT

Machining cost is a function of speed, feed and depth of cut. The present work examines the sensitivity of unit cost to variations in these parameters. This cost is significantly sensitive to changes in speed for steel and carbide inserts, but is not sensitive for tools with ceramic inserts. However, the depth of cut remains in all cases, the dominant variable from an economic standpoint.

The results obtained are useful as much for determining cutting conditions for existing equipment as for the choice and design of new ones.



## INTRODUCTION

Les vitesses de coupe qui correspondent au coût unitaire minimal et au taux de production maximal sont bien identifiées. De même, on sait qu'il n'existe pas de valeur optimale pour l'avance ou la profondeur de coupe pour ces objectifs si l'on ne prend pas en compte des contraintes additionnelles sur les équipements (puissance disponible, etc.) ou sur la nature du travail à effectuer ( finition, type de matériaux, etc.).

Ces contraintes ont été étudiées du point de vue de l'ingénierie. Par exemple, les calculs de force et de puissance requises permettent de choisir les spécifications des moteurs pour de nouvelles machines-outils, les limites sur la taille du copeau sur les machines existantes ou encore pour concevoir les porte outils et porte pièces pour différents travaux. D'autres facteurs comme le type de finition requis ou les propriétés du matériau travaillé projettent aussi des contraintes sur la vitesse, la profondeur et l'avance de coupe de l'outil.

Dans ce travail, on étudie les conséquences économiques de variations de ces paramètres de coupe. Plus précisément on s'intéresse aux écarts de coûts qui seront subis si l'on dévie pour quelque raison que ce soit de la vitesse au coût minimal. La formule générale qui est obtenue montre que la sensibilité du coût aux écarts de vitesse relatifs à celle correspondant au coût minimal, diminue fortement avec l'indice de l'outil utilisé. Ainsi un écart de vitesse de 10% accroîtra le coût d'environ 3.75% pour des outils en acier ( $n = 0.13$ ) mais cette augmentation de coût sera dix

fois moins élevée et donc négligeable pour des outils en céramique ( $n= 0.60$ ).

Pour ce qui est de l'avance et de la profondeur de coupe, la sensibilité du coût ne dépend pas de la nature de l'outil (toutefois le coût de départ n'est pas le même). On montre que le paramètre ayant le plus grand impact est la profondeur de coupe suivi de l'avance de coupe.

Les résultats obtenus sont utiles pour de multiples applications et entre autres:

- pour répondre à des contraintes de machines, quels paramètres faire changer dans l'ordre pour conserver les coûts le plus bas possible et quel sera l'effet sur ces coûts ?
- comment un changement d'outils donc un changement d'indice affectera-t-il les coûts ?
- si pour des raisons de productivité, l'opération aux taux de production maximal est retenue, quelle est la pénalité subie en terme de coûts ?
- dans une optique de choix ou de remplacements d'équipements, dans quelles performances doit-on investir pour minimiser nos coûts futurs de production ?

Dans une première étape, on dégage la fonction de coût minimal d'usinage qui sert dans la seconde étape à analyser la sensibilité du coût aux variations des paramètres de coût.



## I. LA FONCTION DE COUT MINIMAL D'USINAGE

Le coût d'usinage par pièce (CUP) est habituellement exprimé comme la somme des coûts de copeau, de changement d'outil et d'outil [1] [2] [4] [6], et décrit par:

$$(1) \quad \text{CUP} = C_m t_m + C_c \frac{t_m}{T} + C_g \frac{t_m}{T}$$

où:

$C_m$ , coût de copeau par minute,

$C_c$ , coût de changement d'outil par minute,

$C_g$ , coût d'affûtage ou d'achat par arête de l'outil,

$t_c$ , temps nécessaire pour changer l'outil en minutes,

$t_m$ , temps d'usinage par pièce en minutes,

$T$ , durée de vie de l'arête de l'outil en minutes.

Les coûts fixes relativement à l'usinage, comme les temps morts pour charger ou décharger les pièces ou encore déplacer et positionner l'outil et les temps de réglage ("set-up"), n'affectent pas les valeurs optimales des paramètres de coupe. A noter cependant que les frais généraux qui sont presque toujours inclus dans le coût de copeau  $C_m$ , et de changement d'outil  $C_c$ , sont aussi des coûts fixes par rapport à l'opération d'usinage proprement dite. En conséquence  $C_m$  et  $C_c$  ne doivent pas contenir de facteurs pour frais généraux, contrairement à ce qui est habituellement fait -voir [3] et [5] pour ce sujet.

La généralisation de Gilbert de la loi classique de Taylor sur la durée de vie de l'outil peut s'exprimer:

$$(2) \quad V T^n f a^d b = K$$

avec,

V, la vitesse de coupe exprimée en mètre par seconde ou tour par minute selon le cas,

n, l'indice de l'outil,

f, l'avance de l'outil en mm par révolution,

a, l'exposant pour l'avance,

d, la profondeur de coupe en mm,

b, l'exposant de l'avance de coupe,

K, une constante dont la valeur dépend de la nature de l'outil et du matériau usiné et déterminée dans le cas d'une usure régulière de l'outil sans bris.

La quantité y, de matière à être enlevée peut être alors écrite comme:

$$(3) \quad y = f d V t_m$$



dans le cas du fraisage. <sup>1</sup> On obtient alors en combinant (2) et (3), que  $t_m = y T^n / (f^{1-a} d^{1-b} K)$ . Le coût d'usinage par pièce devient alors,

$$(4) \quad CUP = \frac{y}{f^{1-a} d^{1-b} K} T^{n-1} (C_m T + C_c t_c + C_g),$$

qui est minimisé par rapport à T pour obtenir le résultat classique donnant la durée de vie qui correspond au coût d'usinage minimal,

$$(5) \quad T^* = \frac{1-n}{n} \frac{C_c t_c + C_g}{C_m}$$

Ce résultat classique a la propriété d'être indépendant des autres paramètres de coupe f, d, degré d'usure de l'outil, qualité de la finition, etc. Il dépend seulement de facteurs économiques et de la valeur de l'indice de l'outil n, laquelle peut être aussi considérée comme indépendante de f, d, a, b - voir par exemple (5 p. 255) et (7).

On peut alors facilement obtenir la fonction de coût d'usinage minimal par pièce (CUMP) en substituant T\* dans (4),

$$(6) \quad CUMP = \frac{y}{f^{1-a} d^{1-b} K} \frac{1}{1-n} C_m T^{*n}$$

---

1\*. Dans le cas du tournage, l'expression correspondante est  $y = (fd V t_m) / L\pi D$  si L est la longueur à usiner et D le diamètre de la pièce. Tous les résultats obtenus dans la suite restent valables aussi dans ce cas.

qui s'exprime aussi de façon équivalente,

$$(7) \quad \text{CUMP} = \frac{y}{f^{1-a} d^{1-b} K} \frac{1}{n} [C_c t_c + C_g] T^{n-1}$$

et finalement

$$(8) \quad \text{CUMP} = \frac{y}{f^{1-a} d^{1-b} K} \frac{1}{1-n} C_m \left[ \frac{1-n}{n} \right]^n \left[ \frac{C_c t_c + C_g}{C_m} \right]^n$$

Les équations (6) (7) (8) donnent la valeur du coût d'usinage minimal par pièce qui peut être atteint quand les prix sont  $C_m$ ,  $C_c$ ,  $C_g$  avec les paramètres techniques  $t_c$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $f$ ,  $d$ ,  $K$  et la quantité  $y$  de copeau à enlever. L'équation (8) a été dérivée initialement par Leblanc [5] pour évaluer l'impact sur les coûts de l'erreur faite habituellement d'inclure les frais généraux dans  $C_m$  et  $C_c$ .

## II- LA SENSIBILITÉ DU COUT D'USINAGE AUX PARAMETRES TECHNIQUES

Pour des raisons multiples, la valeur optimale théorique  $T^*$ , de la durée de vie ne sera pas retenue pour l'opération. Parmi ces raisons on peut certainement noter:

- l'objectif de maximisation du taux de production et non de minimisation des coûts. On sait que dans ce cas la valeur optimale de la durée de vie pour la maximisation du taux de production sera



$T_p = [(1-n) / n] t_c$ . Quel sera alors la pénalité encourue en terme de coût ?

- l'arbitrage entre durée de vie optimale et valeurs plus élevées de la profondeur et de l'avance de coupe en tenant compte des limites des machines. Par exemple, doit-on favoriser du point de vue économique une plus grande profondeur de coupe et par là s'éloigner de la durée de vie (et de la vitesse) optimale ?
- doit-on investir dans des équipements ayant des moteurs plus puissants et de combien, pour usiner en ébauche avec des profondeurs et avances plus grandes ?

Pour ces situations et d'autres, on peut mesurer la sensibilité du coût par des raisonnements du type, si la profondeur de coupe était augmentée de 10% par exemple, de quel pourcentage serait diminué le coût ? En conséquence on définit:

$t_T = T / T^*$ , le facteur de variation d'une valeur  $T$  de la durée de vie relativement à la durée de vie optimale  $T^*$ ;

$t_f = f / f_0$ , le facteur de variation de l'avance relativement à une valeur initiale  $f_0$ ;

$t_d = d / d_0$ , le facteur de variation de la profondeur de coupe relativement à une valeur initiale  $d_0$ .

L'impact de ces changements sur les coûts est alors donné par le facteur,

$$(9) \quad \frac{\text{CUMP}(T^*, f_0, d_0, t_T, t_f, t_d)}{\text{CUMP}(T^*, f_0, d_0)} = \frac{t_T^{n-1} ((1-n) t_T + n)}{t_f^{1-a} t_d^{1-b}}$$

ou encore par les variations exprimées en pourcentage,

$$(10) \quad \frac{\Delta \text{CUMP}(T)}{\text{CUMP}(T^*)} = \left[ \left(1 + \frac{\Delta T}{T^*}\right)^{n-1} \left(1 + (1-n) \frac{\Delta T}{T^*}\right) \right] \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta f}{f_0}\right)^{1-a} \left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right)^{1-b}} - 1$$

avec par exemple  $\Delta T = (T - T^*)$ . L'équation (9) est obtenue en combinant (4) et (5) avec (6). Pour illustration, on peut analyser la sensibilité du coût par rapport à chaque paramètre pris séparément.

Si l'on s'intéresse d'abord à la durée de vie, on obtient les spécifications correspondantes de (9) et (10),

$$(11) \quad \frac{\text{CUMP}(T^*, t_c)}{\text{CUMP}(T^*)} = t_T^{n-1} ((1-n) t_T + n), \text{ et}$$

$$(12) \quad \frac{\Delta \text{CUMP}(T)}{\text{CUMP}(T^*)} = \left[1 + \frac{\Delta T}{T^*}\right]^{n-1} \left[1 + (1-n) \frac{\Delta T}{T^*}\right] - 1$$

On constate que la sensibilité du coût à la durée de vie dépend de la nature de l'outil par  $n$ . Le tableau 1 et la figure 1 présentent les pénalités de coûts exprimées en pourcentage pour de grandes variations de  $T$  et de



V pour des outils ayant des valeurs extrêmes de  $n$  c'est-à-dire  $n = .13$  pour des arêtes en acier et  $n = .60$  pour des arêtes en céramique.

On constate qu'une variation de  $\pm 10\%$  dans la vitesse se traduira par une augmentation de coût de l'ordre de  $3.75\%$  pour des outils en acier ( $n = .13$ ) et une augmentation dix fois moins élevée de l'ordre de  $.37\%$  pour des outils en céramique. Pour illustration, considérons la pénalité de coût provenant du choix de la vitesse ou de la durée de vie correspondant à la maximisation du taux de production plutôt que celles de la minimisation des coûts.

Si l'on fait l'hypothèse que  $C_m \equiv C_c$ , on obtient que  $(T_p - T^*)/T^* = C_g / T_c C_m + C_g$ . Avec des valeurs réalistes de  $C_g$ ,  $C_m$  et  $T_c$ , on obtiendra toujours que  $0 > (T_p - T^*) / T^* > - 10\%$ . Par lecture du tableau 1 on constate que la hausse de coût sera toujours inférieure à  $.15\%$  donc très marginale.

De même, on sait que l'estimation des paramètres de la loi de Taylor ou de la loi de Gilbert peut être coûteuse et imprécise avec pour conséquence que l'estimation de  $T^*$  est elle aussi imprécise. Le résultat dérivé ici montre que cette imprécision a peu de conséquences économiques.

Il faut toutefois bien noter que ce résultat ne tient que pour des usures continues de l'outil et non pour des bris soudains de celui-ci. Dans ce dernier cas, l'immobilisation de la machine et les dommages

éventuellement infligés à la pièce surtout en phase de finition peuvent être plus sévères.

D'une manière similaire à l'étude de la durée de vie, on peut aussi considérer l'avance et la profondeur de coupe, on obtient alors,

$$(13) \quad \frac{\text{CUMP}(T^*, f_0, d_0, t_f, t_d)}{\text{CUMP}(T^*, f_0, d_0)} = t_f^{a-1} t_d^{b-1}$$

$$(14) \quad \frac{\Delta \text{CUMP}(f, d)}{\text{CUMP}(f_0, d_0)} = \left[1 + \frac{\Delta f}{f_0}\right]^{a-1} \left[1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right]^{b-1} - 1$$

On constate alors que la sensibilité du coût par rapport à l'avance et la profondeur ne dépend pas de la nature de l'outil.

Le tableau 2 et la figure 2 montrent comment chaque paramètre affecte le coût pour des valeurs vraisemblables des exposants a et b. On constate alors qu'économiquement la profondeur de coupe a plus d'influence que l'avance.

Dans une situation où on aurait par exemple une contrainte sur la force du moteur laquelle se projette sur la vitesse, l'avance et la profondeur de coupe, on constate que s'il n'y a pas d'autres considérations comme la finition désirée, il faudra d'abord choisir la profondeur, puis



l'avance et enfin la vitesse. Cependant, ces choix devront être équilibrés pour tenir compte du fait que les effets des variations induites sur les paramètres moins importants n'aient pas une ampleur trop grande et contrebalance l'effet du premier paramètre. Ceci sera facilement fait en utilisant les tableaux 1 et 2.

## **CONCLUSION**

Les résultats présentés dans ce travail permettent d'évaluer rapidement et facilement les conséquences au niveau des coûts de variations dans les paramètres de coupe. Il est intéressant de noter que l'application de la méthode proposée ne nécessite aucune information supplémentaire par rapport à celle déjà disponible et ne nécessite donc aucun coût pour être implantée.

## RÉFÉRENCES

- (1) BARLIER, C., GIRARDIN, L., "Memotech Productique: matériaux et usinage", 2ième édition, Educavivre, Paris, 1986.
- (2) BOOTHROYD, G., "Fundamentals of Metal Machining and Machine Tools", Scripta Book Company, Washington D.C., 1975.
- (3) BOUCHER, TH., O., "The Choice of Cost Parameters in Machining Cost Models", The Engineering Economist, vol. 32, Spring (1987).
- (4) BOURDET, P., "La coupe des métaux", mimeograph, École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Cachan.
- (5) LEBLANC, D., "A note on the Choice of Cost Parameters in Machining Cost Models", The Engineering Economist, Forthcoming.
- (6) LUDEMA, K., CADDELL, R., ATKINS, A., "Manufacturing Engineering: Economics and Processes", Prentice Hall, 1987.
- (7) YEO, S.H., RAHMAN, M., WONG, Y.S., "Towards Enhancement of Machinability Data by Multiple Regression", Journal of Mechanical Working Technology, 19, 1989.

	arêtes en acier				arêtes en carbure				arêtes en céramiques			
n°	0.130				0.25				0.6			
ecart/V*	ecart/i*	OCP/MOCP	var% coût	ecart/i*	OCP/MOCP	var% coût	ecart/i*	OCP/MOCP	var% coût	ecart/i*	OCP/MOCP	var% coût
-25.00%	814.25%	1.179	17.90%	216.05%	1.105	10.55%	61.52%	1.029	2.85%			
-22.50%	610.44%	1.146	14.62%	177.20%	1.084	8.41%	52.93%	1.022	2.24%			
-20.00%	456.50%	1.117	11.67%	144.14%	1.066	6.55%	45.05%	1.017	1.71%			
-17.50%	339.20%	1.090	9.04%	115.87%	1.049	4.95%	37.80%	1.013	1.26%			
-15.00%	249.05%	1.067	6.73%	91.57%	1.036	3.59%	31.11%	1.009	0.93%			
-12.50%	179.31%	1.047	4.75%	70.60%	1.025	2.46%	24.93%	1.006	0.60%			
-10.00%	124.90%	1.031	3.09%	52.42%	1.016	1.56%	19.20%	1.004	0.37%			
-7.50%	82.16%	1.018	1.77%	36.59%	1.009	0.87%	13.88%	1.002	0.20%			
-5.00%	49.37%	1.008	0.80%	22.77%	1.004	0.35%	8.92%	1.001	0.09%			
-2.50%	21.50%	1.002	0.20%	10.66%	1.001	0.09%	4.31%	1.000	0.02%			
-0.00%	0.00%	1.000	-0.00%	0.00%	1.000	-0.00%	0.00%	1.000	0.00%			
2.50%	-17.30%	1.002	0.21%	-9.40%	1.001	0.09%	-4.03%	1.000	0.02%			
5.00%	-31.25%	1.009	0.88%	-17.73%	1.004	0.37%	-7.81%	1.001	0.08%			
7.50%	-42.67%	1.020	2.02%	-25.12%	1.008	0.82%	-11.35%	1.002	0.17%			
10.00%	-51.96%	1.037	3.69%	-31.70%	1.015	1.45%	-14.69%	1.003	0.30%			
12.50%	-59.59%	1.059	5.93%	-37.57%	1.023	2.26%	-17.82%	1.005	0.46%			
15.00%	-65.87%	1.088	8.78%	-42.82%	1.032	3.24%	-20.78%	1.006	0.64%			
17.50%	-71.08%	1.123	12.29%	-47.54%	1.044	4.39%	-23.57%	1.009	0.85%			
20.00%	-75.40%	1.165	16.54%	-51.77%	1.057	5.70%	-26.20%	1.011	1.09%			
22.50%	-79.01%	1.216	21.58%	-55.59%	1.072	7.18%	-28.70%	1.013	1.35%			
25.00%	-82.03%	1.275	27.43%	-59.04%	1.088	8.83%	-31.06%	1.016	1.62%			
27.50%	-84.57%	1.343	34.31%	-62.16%	1.106	10.64%	-33.30%	1.019	1.92%			
30.00%	-86.71%	1.422	42.17%	-64.99%	1.126	12.62%	-35.42%	1.022	2.24%			

V\* et T\*, vitesse et durée de vie donnant le coût minimal

TABLEAU 1: Sensibilité du coût d'usinage relativement à des variations de la vitesse (et de la durée de vie) pour différents outils.



avance a= 0.75		profondeur b= 0.3	
ecart%fo	var% cout	ecart/do	var% cout
-50.00%	18.92%	-50.00%	62.45%
-40.00%	13.62%	-40.00%	42.99%
-30.00%	9.33%	-30.00%	28.36%
-20.00%	5.74%	-20.00%	16.91%
-10.00%	2.67%	-10.00%	7.65%
-0.00%	0.00%	-0.00%	0.00%
10.00%	-2.35%	10.00%	-6.45%
20.00%	-4.46%	20.00%	-11.98%
30.00%	-6.35%	30.00%	-16.78%
40.00%	-8.07%	40.00%	-20.98%
50.00%	-9.64%	50.00%	-24.71%

TABLEAU 2: Sensibilité du coût d'usinage relativement à des variations de l'avance et de la profondeur de coupe.

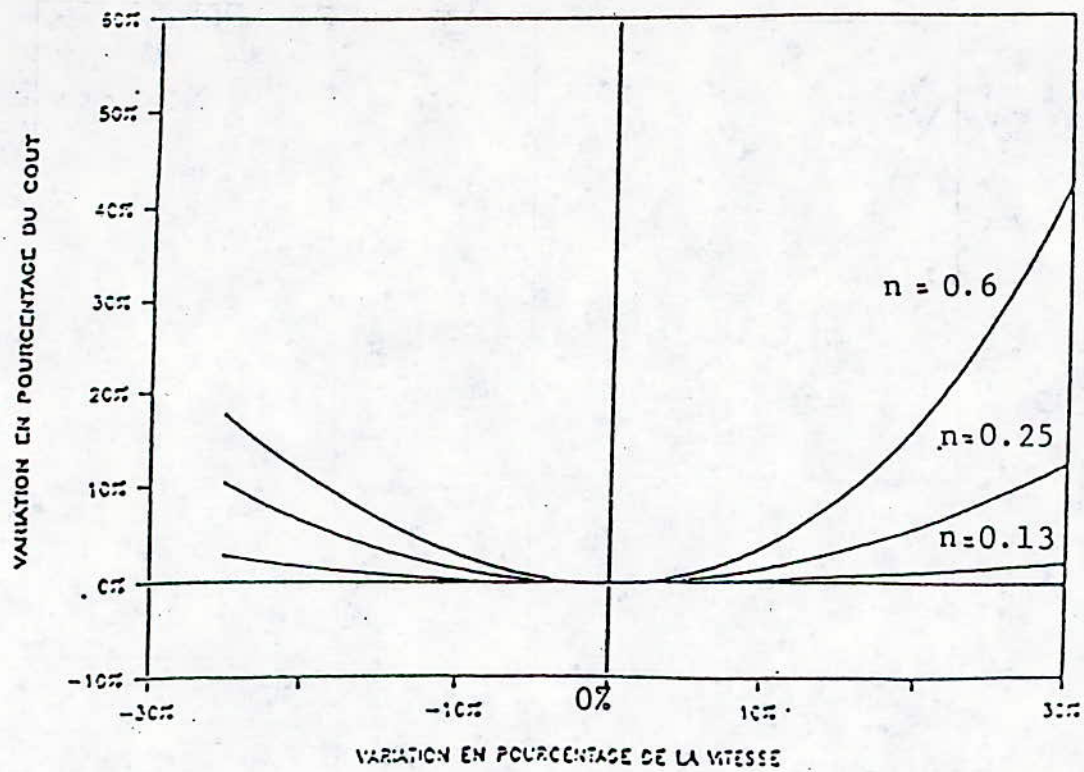


FIGURE 1: Sensibilité du coût d'usinage à la vitesse pour différents outils.

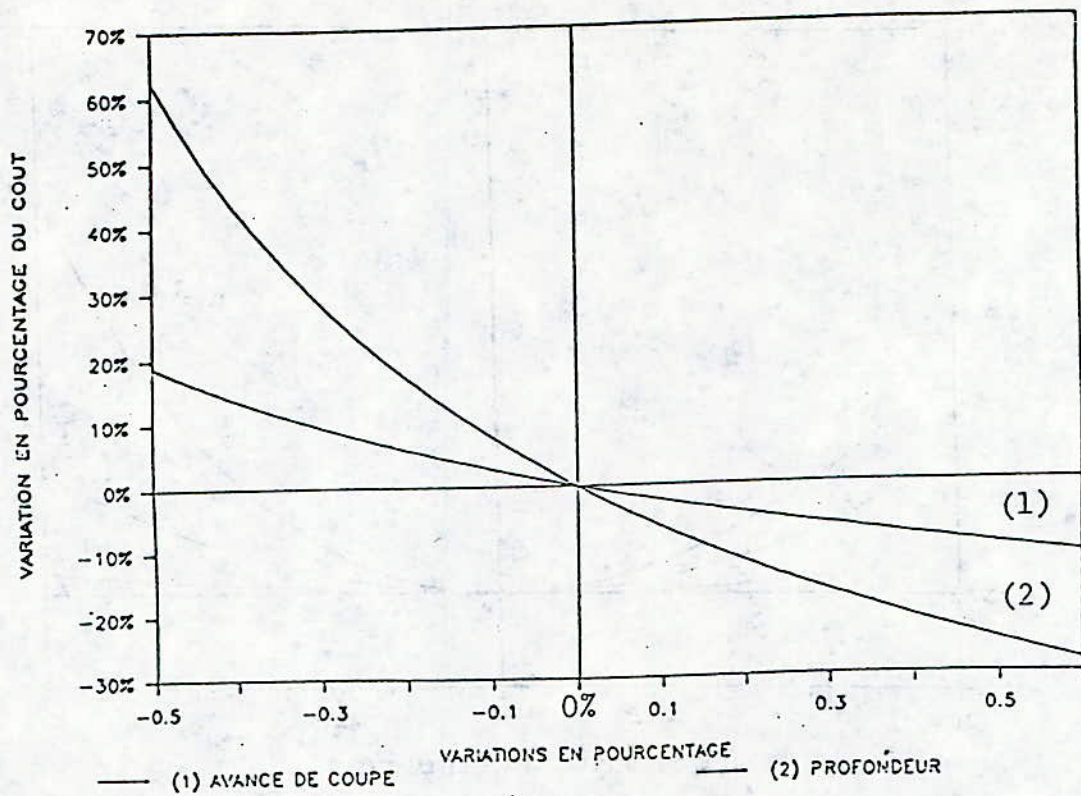


FIGURE 2: Sensibilité du coût relativement à l'avance et à la profondeur de coupe.



**NOTE TECHNIQUE RELATIVE À L'ARTICLE DE  
MM. LEBLANC ET KHALFOUN  
INTITULÉ "LA SENSIBILITÉ DU CÔUT D'USINAGE  
AUX VARIATIONS DES PARAMETRES DE COUPE"**

par  
M.A. AIT-ALI  
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

---

Le coût d'usinage par pièce formulé par LEBLANC et KHALFOUN dans leur article intitulé "la sensibilité du coût d'usinage aux variations des paramètres de coupe".

$$CUP = C_m t_m + C_c t_c t_m / T + C_g t_m / T \quad (1)$$

comprend:

- . le coût d'enlèvement de copeaux,  $C_m t_m / T$ ,
- . le coût de changement d'outil entre deux affûtages,  $C_c t_c t_m / T$
- . le coût d'affûtage de l'outil,  $C_g t_m / T$ .

Le problème posé consiste à minimiser le coût d'usinage par pièce CUP, sujet aux contraintes égalités,

$$VT^n f_a d^b = K \quad (2)$$

exprimant la durée de vie de l'outil entre deux affûtages et fonction de l'avance de l'outil, de la profondeur et de la vitesse de coupe, et:

$$f dV t_m = Y \quad (3)$$

exprimant la quantité de matière Y enlevée en un temps  $t_m$  en fonction de l'avance de l'outil, la profondeur et de la vitesse de coupe.

Dans la formulation de ce problème, il est également admis que le temps d'usinage par pièce  $t_m$  est au plus égal à la durée de vie de l'arête de l'outil T entre deux affûtages, c'est-à-dire  $t_m / T \leq 1$ .

Ce problème peut être écrit sous la forme:

$$\text{Min } Z \equiv C_1 t_m + C_2 t_m / T \quad (4-1)$$

$$\text{t. q. } t_m f dV/Y \geq 1 \quad (4-2)$$

$$T^n f^a V/K \leq 1 \quad (4-3)$$

dans laquelle on a posé les définitions suivantes:

$$C_1 \equiv C_m$$

$$C_2 \equiv (C_c t_c + C_g)$$

et orienté les contraintes égalités (4-2) et (4-3) pour borner les variables indépendantes  $t_m$  par une limite inférieure et  $T$  par une limite supérieure.

Il y a lieu de noter également que les contraintes (4-2) et (4-3) bornent la variable indépendante  $v$  par le haut et par le bas respectivement.

Le problème défini par les équations (4) étant ainsi vérifié bien posé peut être maintenant résolu par la méthode de lagrange. Avant de procéder de la sorte, il serait intéressant de normaliser la fonction objectif et les contraintes et de les exprimer dans la terminologie "Géométric programming" [1,2].

$$\text{Min } g_0 \equiv W_{01} + W_{02} \quad (5-1)$$

$$\text{t.q. } g_1 \equiv W_1 \geq 1 \quad (5-2)$$

$$g_2 \equiv W_2 \leq 1 \quad (5-3)$$

avec:

$$W_{01} \equiv C_1 t_m$$

$$W_{02} \equiv C_2 t_m/T$$

$$W_1 \equiv t_m f dV/Y$$

$$W_0 \equiv T^n \text{ fa } V/K$$

Le degré de difficulté de ce problème est zéro, [3], ce qui nous permettra de connaître la distribution optimale du coût unitaire CUP, entre le coût d'enlèvement de copeaux et le coût de changement d'outil, avant de connaître les valeurs optimales des variables indépendantes.

Les conditions d'orthogonalité sont données par les dérivées semi-logarithmiques par rapport à  $t_m$ , T et V respectivement, soit:

$$t_m: W_{01} + W_{02} - \lambda_1 W_1 = 0 \quad (6-1)$$

$$T: -W_{02} + n\lambda_2 W_2 = 0 \quad (6-2)$$

$$V: -\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 = 0 \quad (6-3)$$

Les conditions de normalité sont:

$$W_{01} + W_{02} = 1 \quad (7-1)$$

$$W_1 = 1 \quad (7-2)$$

$$W_2 = 1 \quad (7-3)$$

La solution du système linéaire en six équations et six inconnues donne simplement:

$$W_{01} + W_{02} = \lambda_1 = 1 \quad (8-1)$$

$$W_{02} = n \quad (8-2)$$

$$W_{01} = 1-n \quad (8-3)$$

Ainsi la répartition optimale du coût CUP minimal normalisé à l'unité est égale à:

- . n, pour le coût de changement d'outil y compris le coût d'affûtage
- . 1-n, pour le coût d'enlèvement de copeaux



Ce résultat constitue une règle optimale invariante [4] qui caractérise ce problème d'optimisation. Ainsi, il suffirait de vérifier la répartition du coût d'usinage par pièce CUP entre ses deux éléments constitutifs pour vérifier si celui-ci est optimal ou pas, sans avoir à faire d'autres calculs.

Cependant, il est entendu que ce résultat n'est économiquement acceptable dans une situation donnée que pour autant que les valeurs de  $n$  et la modélisation utilisées reproduisent effectivement un coût d'usinage minimal; D'où le soin particulier qu'il y a lieu d'apporter au choix des valeurs de  $n$  à adopter pour la formulation d'un problème d'usinage donné.

Les valeurs optimales des variables indépendantes sont maintenant obtenues comme suit:

$$W_{01} = 1 - n = C_m t_m, \quad \text{d'où:}$$

$$t_m = \frac{1-n}{C_m} \quad (9)$$

$$W_{02} = n = (C_c t_c + C_g) t_m / \Gamma, \quad \text{d'où:}$$

$$\Gamma = \frac{1-n}{n} \frac{C_c t_c + C_g}{C_m} \quad (10)$$

$$V^* = \frac{Y}{f_d t_m} \quad \text{d'où}$$

$$V^* = \frac{Y}{f_d} \frac{n}{1-n} \quad (11)$$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient  $CUP = 1$  comme il fallait s'y attendre puisque la valeur de l'objectif a été normalisée à l'unité dans la solution du problème défini par les équations (4).

Le coût d'usinage minimal par pièce sera obtenu en tenant compte des contraintes (2) et (3) et en remplaçant dans la fonction objectif (1):

$$CUP^* = f^{a-1} d^{b-1} \frac{Y}{K} \frac{C_m}{1-n} \left( \frac{1-n}{n} \right)^n \left( \frac{C_{ctc} + C_g}{C_m} \right)^n \quad (12)$$

Il y a lieu de noter que les valeurs 0 et 1 sont à exclure du domaine de définition du problème. Le mérite de la solution présentée ci-dessus au problème résolu par LEBLANC et KHALFOUN est de révéler l'existence de la règle d'invariance qui définit la distribution optimale du coût minimal d'usinage par pièce entre les coûts constitutifs d'enlèvement de copeaux d'affûtage et de changement de l'outil.

S'agissant d'un "programme géométrique" de degré de difficulté égal à zéro selon la terminologie de Zener et al. [3], sa solution dans le domaine dual serait immédiate mais sans grand intérêt ici puisque les autres paramètres du problème sont donnés sous forme littérale.

Pour ce qui concerne l'analyse de sensibilité, qui n'est pas l'objet de cette note technique, il serait utile d'examiner simplement l'influence de la variation de l'indice d'outil  $n$ , sur la répartition du coût optimal CUP, entre le coût d'usinage et le coût de changement d'outil.

L'examen des relations (8-2) et (8-3) montre qu'une augmentation de l'indice d'outil  $n$  augmente le coût optimal d'affûtage au détriment du coût d'enlèvement de copeaux. Ainsi, la substitution d'un outil céramique à un outil en acier rapide par exemple augmenterait le coût de changement d'outil alors qu'on pourrait penser que l'arête de l'outil en céramique possède une durée de vie plus longue.

Ce résultat est en fait conforme aux informations contenues dans les relations (9), (10) et (11) qui montrent bien que la durée de vie de l'arête de l'outil  $T$  diminue avec les grandes valeurs de  $n$ , alors que le temps d'usinage  $t_m$  diminue et que la vitesse de coupe  $V$  augmente avec les grandes valeurs de  $n$ .

Il reste à expliquer au profane pourquoi les outils à pastille de carbure auraient une durée de vie plus faible entre deux affûtages que celle des outils en acier rapide, par exemple, alors qu'en se basant sur la dureté de ces matériaux on pourrait penser le contraire. Une plus grande fragilité qui généralement va de paire avec l'augmentation de la dureté de ces matériaux serait-elle l'explication recherchée?

## BIBLIOGRAPHIE

1/ R.J. Duffins and E.L. Peterson, "Geometric Programming with signomials", JOTA; Vol. II, No. 1, 1973.

2/ V. Passy and D.J. Wilde, "Generalized Polynomial Optimisation", SIAM J. APPL. Math, Vol. 15, No. 5, September 1967.

3/ Richard J. Duffin et al., "Geometric Programming Theory and Application", p. 11, John Wiley and Sons, 1967.

4/ M.A. AIT-ALI, "Optimal Mixed Refrigerant Liquefaction of Naturel gaz", PhD Thesis, Stanford University Mechanical Engineering Department, June 1979, pp. 143-150.

BIBLIOGRAPHIE



OPTIMISATION DES PARAMETRES D'AMORTISSEMENT D'UN CAMION  
SOUS L'EFFET DES EXCITATIONS ALEATOIRES.

Ksiazek M. et Meddad A.

Département de Génie Mécanique,  
Ecole Nationale Polytechnique, Alger.

ملخص:

هذا المنشور يصف دراسة تحليلية و رقمية للسلوكات  
الدينامكية لشاحنة. انه يتناول ايجاد أمثل وسائط الاخماد  
لتعليق تحت تأثير تحريصات عشوائية. كتب مقياس التعليق  
الأمثل على شكل دالية، كما قدمت نتائج الحد الأدنى له هذه  
الدالية.

Résumé:

Cette publication décrit une étude analytique et numérique du comportement dynamique d'un camion. Elle consiste dans l'optimisation des paramètres d'amortissement de suspension sous l'effet des excitations aléatoires. Le critère d'optimisation de suspension a été établi sous la forme d'une fonctionnelle. Les résultats de minimisation de cette fonctionnelle ont été présentés.

Abstract:

This paper describes an analytical and numerical study of the dynamic behaviour of truck. It consists of the optimization of suspension damping parameters of the truck subjected to random excitations. A Performance Index of the optimization has been established. The numerical results showing the values of PI for various values of damping have been presented.

## INTRODUCTION

Les problèmes de dynamique des voitures de toute les gammes sont très largement considérés dans la littérature mondiale.

Parmi les plus importants sont les problèmes du comportement dynamique de suspension, par exemple /1/, /2/, /5/, /7/.

L'optimisation antivibratoire de suspension est très largement traitée dans la bibliographie. Nous nous limitons à citer que quelques positions où le problème d'optimisation de paramètres des structures et de suspensions passives est en particulier considéré /4/, /5/, /8/, /9/.

Le problème d'optimisation de suspension peut être défini en fonction de l'irrégularité de la route parcourue, en fonction de distribution des marchandises transportées, etc.

Dans ce travail on a présenté la procédure d'optimisation des paramètres de suspension en tenant compte d'un critère complexe, décrivant le comportement du camion sur la route, avec le microprofil qui est une fonction aléatoire.

## FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME.

### Modèle adopté.

Comme la représentation du camion on a pris le modèle présenté sur la fig.1, où:

- $M_1$  - masse de l'essieu avant,
- $M_2$  - masse de l'essieu arrière,
- $M_3$  - masse du châssis, cabine, carrosserie et l'ensemble de ces accessoires,
- $I_G$  - moment d'inertie par rapport au centre de gravité G,



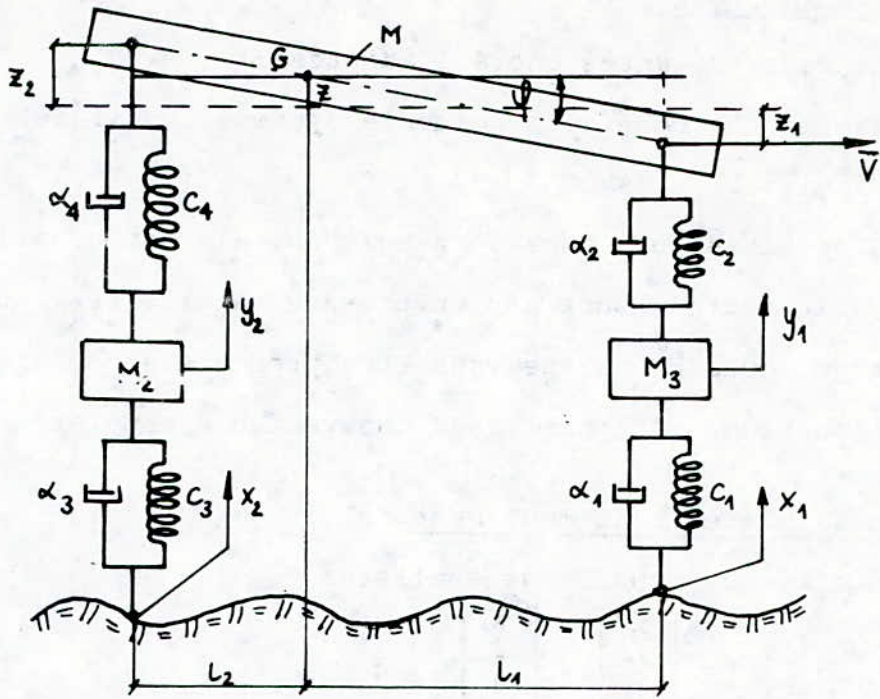


Fig.1.

- $l_1$  - distance entre roues avant et centre de gravité,
- $l_2$  - distance entre roues arrière et centre de gravité,
- $c_1, c_3$  - rigidité des pneumatiques avant et arrière,
- $\alpha_1, \alpha_3$  - coefficients d'amortissement en pneumatiques avant et arrière,
- $c_2, c_4$  - rigidités des suspensions avant et arrière,
- $\alpha_2, \alpha_4$  - coefficients d'amortissement en pneumatiques avant et arrière,
- $x_1, x_2$  - les excitations agissant,
- $y_1, y_2$  - translations des roues avant et arrières,
- $z$  - translation verticale du centre de masse de la carrosserie,
- $\psi$  - l'angle de tangage,
- $V$  - vitesse du camion.



### Hypothèses adoptées.

Les hypothèses suivantes ont été adoptées:

- 1) Le camion est considéré comme le système dynamique discret et linéaire.
- 2) Que les vibrations dans le plan vertical sont considérées.
- 3) Les excitations sont des processus aléatoires, normaux et ergodiques. Elles peuvent être présentées sous les formes des fonctions rationnelles d'une variable complexe  $s$ .

### Equation matricielle du mouvement.

Soient quatre coordonnées généralisées:

$$\text{col}(q_i)_{i=1,..4} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \varphi \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

et en appliquant successivement les équations de Lagrange de deuxième espèce et les transformations de Laplace, on trouve les équations du mouvement du système sous la forme matricielle:

$$[A][q_i] = [B_1]\bar{X}_1 + [B_2]\bar{X}_2 \quad (2)$$

où:  $[A] = a_{ij}$  ( $i=1,..4; j=1,..4$ ) est une matrice symétrique

$$\text{avec } a_{11} = M_1 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) s + (c_1 + c_2)$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{13} = -(\alpha_2 s + c_2)$$

$$a_{14} = \alpha_2 l_1 s + c_2 l_1$$

$$a_{22} = M_2 s^2 + (\alpha_3 + \alpha_4) s + (c_3 + c_4)$$

$$a_{23} = -(\alpha_4 s + c_4)$$

$$a_{24} = -(\alpha_4 l_2 s + c_4 l_2)$$

$$a_{33} = M_3 s^2 + (\alpha_2 + \alpha_4) s + (c_2 + c_4)$$

$$a_{34} = (\alpha_4 l_2 - l_1 \alpha_2) s + (c_4 l_2 - l_1 c_2)$$

$$a_{44} = I_G s^4 + (\alpha_2 l_1^2 + \alpha_4 l_2^2) s + (c_2 l_1^2 + c_4 l_2^2) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} [B_1] &= b_{i1} \quad (i=1, \dots, 4) \\ \text{avec } b_{11} &= \alpha_1 s + c_1 ; \quad b_{21} = b_{31} = b_{41} = 0 \\ [B_2] &= b_{i2} \quad (i=1, \dots, 4) \\ \text{avec } b_{12} &= \alpha_3 s + c_3 ; \quad b_{22} = b_{32} = b_{42} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Comme la deuxième roue est en retard par rapport à la première d'un temps

$$\tau = -\frac{l_1 + l_2}{V} \quad (5)$$

on aura encore

$$\bar{X}_2(s) = \bar{X}_1(s) E(s) \quad (6)$$

$$\text{avec } E(s) = \exp(-s\tau) \quad (7)$$

Densités spectrales énergétiques et dispersions des accélérations des masses et des déplacements relatifs des essieux.

En supposant que:

$$H_{ik}(s) = \frac{\bar{q}_i(s)}{x_k(s)} \quad (i=1, \dots, 4; k=1, 2) \quad (8)$$

on peut écrire l'expression pour la densité spectrale énergétique d'i-ème coordonnée généralisée:

$$S_{q_i}(s) = H_{i1}(s) S_{x_1}(s) + H_{i2}(s) S_{x_2}(s) \quad (i=1, \dots, 4) \quad (9)$$

Pour les déplacements relatifs des essieux avant et arrière

on trouve:

$$S_{z_1-y_1}(s) = (H_{31} - l_1 H_{41} - H_{11}) S_{x_1}(s) + (H_{32} - l_1 H_{42} - H_{12}) S_{x_2}(s) \quad (10)$$

$$S_{z_2-y_2}(s) = (H_{31} + l_2 H_{41} - H_{21}) S_{x_1}(s) + (H_{32} + l_2 H_{42} - H_{22}) S_{x_2}(s) \quad (11)$$

De (11) et (12) on peut trouver les dispersions correspondantes:

$$\sigma_{z_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} s^4 S_{q_i}(s) ds ; \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

$$\sigma_{z_i-y_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{z_i-y_i}(s) ds \quad (13)$$

$$\sigma_{z_2-y_2}^2 = \frac{1}{2\ddot{u}} \int_{-j\infty}^{+j\infty} S_{z_2-y_2}(s) ds \quad (14)$$

CRITERE D'OPTIMISATION DE SUSPENSION.

Pour estimer l'efficacité de suspension du camion on a choisi le critère suivant:

$$C = \sigma_{\ddot{z}}^2 + \beta \sigma_{\ddot{\varphi}}^2 + \lambda_1 \sigma_{z_1-y_1}^2 + \lambda_2 \sigma_{z_2-y_2}^2 = \min. \quad (15)$$

ou  $\beta$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  sont les coefficients de pondération de Lagrange. Le critère (15) est un compromis entre les grandeurs contradictoires  $\sigma_{\ddot{z}}^2$ ,  $\sigma_{\ddot{\varphi}}^2$  et  $\sigma_{z_1-y_1}^2$ ,  $\sigma_{z_2-y_2}^2$ . Les valeurs trop petites des accélérations correspondent aux valeurs trop grandes des déplacements relatifs et par conséquent aux claquements de suspension.

De l'autre coté les petites valeurs de  $\sigma_{z_1-y_1}^2$  et  $\sigma_{z_2-y_2}^2$  demandent une grande rigidité de suspension et en conséquence l'augmentation des accélérations.

Le critère C est une fonction de paramètres de la structure du système ( $M_1, M_2, M_3, I_G, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c_1, c_2, c_3, c_4, l_1, l_2$ ), des paramètres des excitations ( $\tau, V, S_{x_k}(s)$ ) ainsi que des coefficients de pondération ( $\beta, \lambda_1, \lambda_2$ ).

On voit donc, que l'optimisation paramétrique globale devient difficile à cause du grand nombre des paramètres existants.

Dans ce travail on s'est concentré sur l'optimisation des paramètres d'amortissement de suspension en considérant tous les autres paramètres comme connus.

On a été motivé de faire ce choix pour des raisons suivantes:

- les valeurs des coefficients d'amortissement sont difficiles à établir en avance,



- étant donné une large gamme des amortisseurs produits par l'industrie on peut choisir celui qui rend la valeur de critère (15) minimale.

## APPLICATION NUMERIQUE.

### Procédure appliquée.

- 1/ Pour la vitesse choisie  $V = 50$  km/h on a calculé  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{\psi}$ ,  $\sigma_{z-\gamma_1}$ ,  $\sigma_{z-\gamma_2}$  en fonction de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  successivement en tenant compte que les trois coefficients restants sont constants.
- 2/ Sur la base des résultats obtenus on a établi les coefficients  $\beta$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de telle sorte que C soit de même ordre que  $\sigma_z$ .
- 3/ En partant des valeurs initiales  $\alpha_{i0}$  pour  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) admissibles on a cherché successivement  $C_{1\min}(\alpha_1, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40})$ ,  $C_{2\min}(\alpha_{10}, \alpha_2, \alpha_{30}, \alpha_{40})$ ,  $C_{3\min}(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_3, \alpha_{40})$ ,  $C_{4\min}(\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_4)$ .
- 4/ Parmi  $C_{i\min}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) on a choisi la valeur minimale  $\min [C_{i\min}]$  et par conséquent les valeurs optimales  $\alpha_1^0$ ,  $\alpha_2^0$ ,  $\alpha_3^0$ ,  $\alpha_4^0$  des coefficients d'amortissement.

Ainsi on a obtenu les valeurs qui donnent une sécurité maximale et une bonne rigidité de suspension dans le cadre des valeurs admissibles.

### Données.

Pour le calcul numérique on a utilisé les caractéristiques correspondantes au camion K66 normal à cabine avancée, en charge, produit par SNVI Rouiba /Algérie/.

Ces caractéristiques sont les suivantes:

$$M_1 = 233 \text{ kg} ; M_2 = 410 \text{ kg} ; M_3 = 5957 \text{ kg} ; I_G = 11828,485 \text{ kgm}^2$$

$$c_1 = 1032000 \text{ Nm}^{-1} ; c_2 = 287857 \text{ Nm}^{-1} ; c_3 = 2227000 \text{ Nm}^{-1}$$

$$c_4 = 795160 \text{ Nm}^{-1} ; l_1 = 2,34 \text{ m} ; l_2 = 0,26 \text{ m} .$$

Pour les coefficients d'amortissement on a admis les plages correspondantes:

$$\alpha_1 = 4000 - 13000 \text{ Nsm}^{-1}, \quad \alpha_2 = 4000 - 13000 \text{ Nsm}^{-1},$$

$$\alpha_3 = 10000 - 19000 \text{ Nsm}^{-1}, \quad \alpha_4 = 4000 - 13000 \text{ Nsm}^{-1}.$$

Parmi les différents types des routes on a choisi la route herbeuse. Cette route est caractérisée par la densité spectrale suivante:

$$S_{x_1}(s) = \frac{12,2 V (4,3 \cdot 10^{-2} V^2 - s^2)}{s^4 + 7 \cdot 10^{-2} V^2 s^2 + 18,4 \cdot 10^{-4} V^2}$$

où:  $s = j\omega$ ,  $V$  - vitesse du véhicule en km/h.

On a établi selon le critère mentioné auparavant:

$$\beta = 1,1 \text{ m}^2 ; \lambda_1 = 51 \text{ s}^{-4} ; \lambda_2 = 34 \text{ s}^{-4}$$

On a pris également  $V = 50 \text{ km/h}$ .

### Résultats.

Les résultats concernant  $C_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) en fonction de l'amortissement ont été présentés sur la figure 2.

Pour les  $C_{i \min}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) on a obtenu les valeurs suivantes:

$$C_{1 \min} = 0,24446 \text{ m}^2 \text{ s}^{-4}, \quad C_{2 \min} = 0,2315 \text{ m}^2 \text{ s}^{-4},$$

$$C_{3 \min} = 0,03842 \text{ m}^2 \text{ s}^{-4}, \quad C_{4 \min} = 0,03706 \text{ m}^2 \text{ s}^{-4}.$$

On voit donc que

$$\min [C_{i \min}] = 0,03706 \text{ m}^2 \text{ s}^{-4}$$

d'où on obtient finalement:

$$\alpha_1^0 = 4000 \text{ Nms}^{-1}, \quad \alpha_2^0 = 4000 \text{ Nms}^{-1},$$

$$\alpha_3^0 = 10000 \text{ Nms}^{-1}, \quad \alpha_4^0 = 11000 \text{ Nms}^{-1}.$$

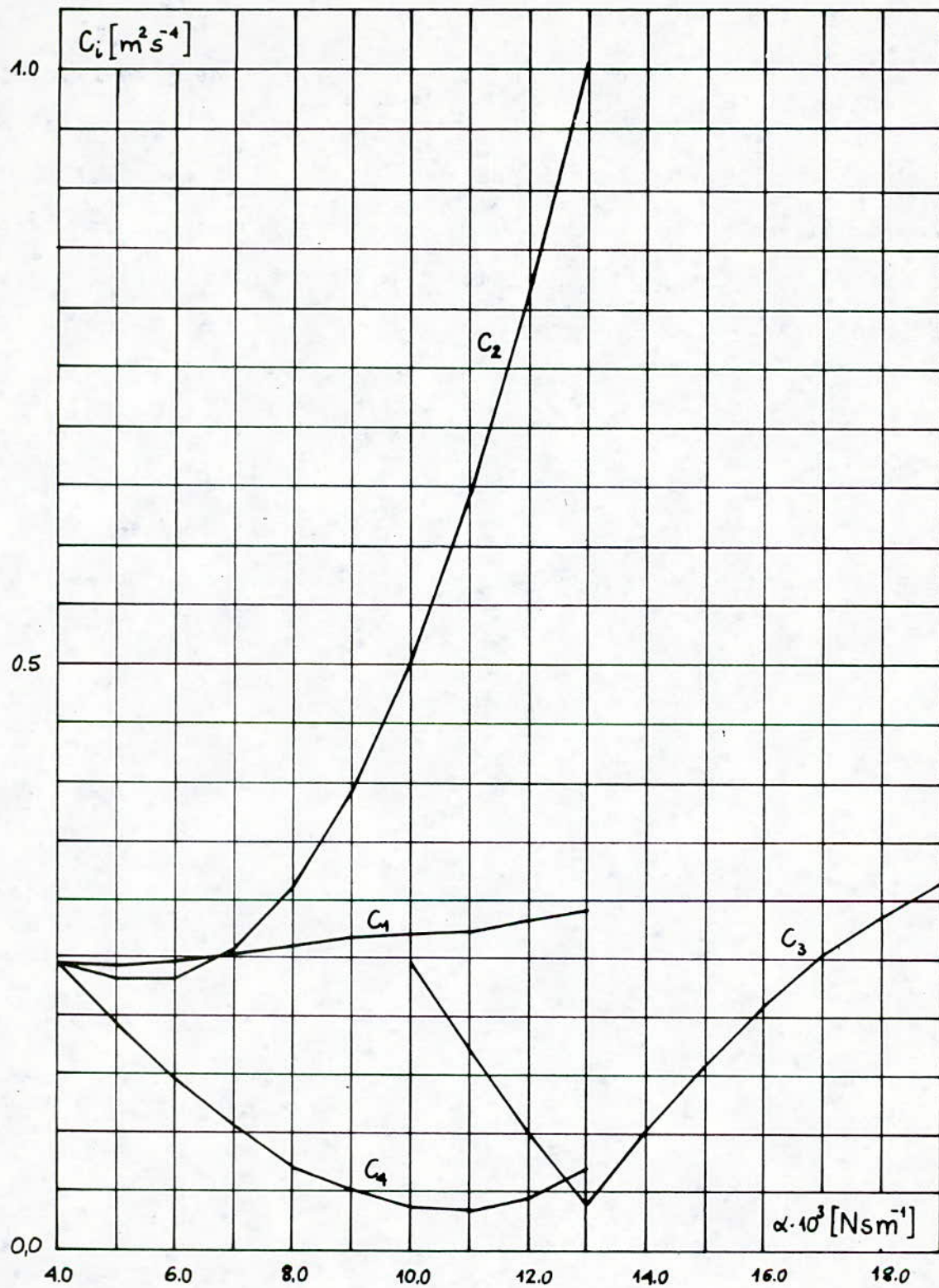


Fig.2.



## CONCLUSIONS.

Dans le travail présenté les valeurs optimales des coefficients d'amortissement dans les suspensions du camion K66 produit par SNVI Rouiba, Algérie ont été obtenus.

Le modèle du camion considéré dans ce travail nous permet également d'optimiser la rigidité des suspensions avant et arrière. En fin, en appliquant la procédure évoquée on peut trouver les valeurs optimales de n'importe quel paramètre du modèle présenté. Le logiciel appliqué ici et élaboré dans le travail /8/ peut être adopté pour les modèles et les critères plus complexes.

Il nous permet de faire l'optimisation pour les routes pavées assez régulières, pavées, herbeuses ainsi que les routes en béton et en asphalte.

BIBLIOGRAPHIE.

- /1/ Rotenberg R.W.- "Podvieska avtomobila",Izd.Masinstrojenje, Moskva 1972.
- /2/ Khatschurov A.A.et coll.- "Dinamika sistiemy doroga,schina, avtomobil,voditel",Izd.Masinstrojenje,Moskva 1976.
- /3/ Svetlickij V.A.- "Vibrations aléatoires des systèmes mécaniques",Technique et documentation,Paris 1980.
- /4/ Done G.T.S. and Hughes A.D.- "The response of a vibrating structure as a function of structural parameters", Journal of Sound and Vibration 1975,38(2),255-267.
- /5/ Ryba D.-"Improvement in Dynamics Characteristics of Automobile Suspension Systems",Vehicle Systeme Dynamics 3(1974),pp.17-46.
- /6/ Howell L.J.-"Power Spectral Density Analysis of Vehicle Vibration Using the "NASTRAN" Computer Program",Research Laboratories,General Motors Corpor. nr.740328,pp.1415-1424
- /7/ Mitschke M.-"Les vibrations du moteur et son influence sur la voiture particulière",La 2 Section Technique de S.I.A, "Mécanique et Structure",Paris,Juin 1988,L'automobile Journale Octobre 1988,pp.109-118.
- /8/ Meddad A. - "Microprofil de la route et son influence sur la dynamique du vehicule",Projet de fin d'études,Juin 1989, Ecole Nationale Polytechnique,Alger.
- /9/ Ebrahimi N.D. - "On Optimum Design of Vibration Absorbers" Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design,April 1987,vol.109,pp.214-215.



## PROFILS DES TUYERES SUPERSONIQUES

R.HAOUI & A.GAHMOUSSE.  
Département Génie-Mécanique.  
Ecole Nationale Polytechnique.  
10. Avenue Hassen-Radi. Alger.

### ملخص :

تمكننا هذه الدراسة باستعمال طريقة المميزات ، رسم منحى الأبواق مافوق الصوتية بحيث تعطي في النهاية انسياب متوازي ومنتظم .  
كما تسمح بالحصول على أطوال مختلفة الأبواق لها نفس الماك ، وذلك بتغيير عدد انعكاسات الموجات على جدار البوق .

### ABSTRACT:

The characteristic method was used in this study in order to draw the supersonic nozzle's profiles giving at the exit section uniform and parallel flow. Also to have different lengths at the same Mach number at variable number of wave reflexions on the nozzle's walls .

### RESUME:

Cette étude permet, en utilisant la méthode des caractéristiques, de tracer les profils des tuyères supersoniques donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle, et d'avoir pour un même nombre de Mach plusieurs longueurs en jouant sur le nombre de reflexions des ondes sur la paroi de la tuyère.



## 1. Introduction

Le problème actuel des tuyères supersoniques est tel que l'écoulement dans leurs sections de sortie n'est ni uniforme ni parallèle. Au col de la tuyère, le fluide subit une variation brusque de direction, qui donne naissance à des ondes de Mach se propageant dans tout le volume de la tuyère à cause de leurs réflexions sur la paroi et la variation continue de celle-ci.

La solution revient à chercher des profils convenablement tracés de telle façon que l'écoulement à la sortie soit uniforme et parallèle, donc sans ondes de Mach (fig.1). Pour réaliser cet écoulement on doit éliminer toutes les ondes de Mach avant la sortie de la tuyère. Entre  $A_1$  et  $A_2$ , les ondes de Mach sont réfléchies. Entre  $A_2$  et  $A_3$  les ondes de Mach sont éliminées successivement.

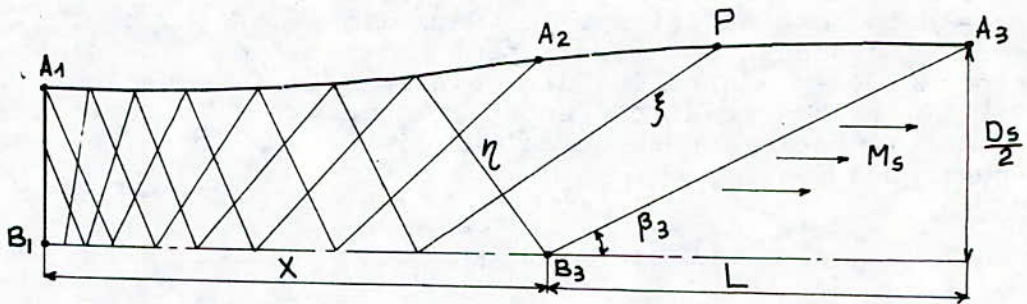


Fig.1 Construction de la maille des lignes caractéristiques.

## 2. Equations

L'écoulement à l'intérieur de la tuyère est supposé bidimensionnel, permanent et isentropique. Les équations de base utilisées sont:

- Equation de continuité.
- Equation de quantité de mouvement.
- Equation d'énergie.
- Equation d'état pour un gaz parfait.

La résolution de ce système d'équations conduit, après certaines transformations et opérations, à l'équation de base ou l'équation générale de la dynamique des gaz. cette équation est explicitée en coordonnées  $(x,y)$  qui sont mal adaptées à une description de l'écoulement [3]. Pour trouver de nouvelles coordonnées, des observations relatives à la nature même d'un écoulement supersonique sont utiles (fig.2).

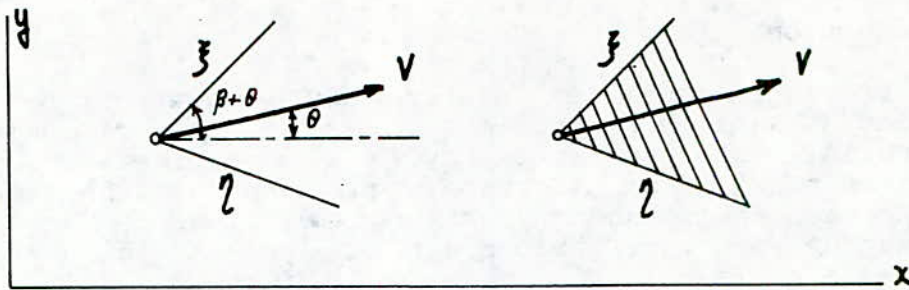


Fig.2 Lignes de Mach  $\xi$  et  $\eta$  constantes définissant un domaine d'influence dans le plan physique.

Ainsi une perturbation à un point  $P(x,y)$  du champ d'écoulement peut seulement se faire sentir dans un domaine en aval du point  $P(x,y)$ , délimité par les deux lignes de Mach  $\xi$  et  $\eta$  constantes. Par l'introduction complémentaire de l'angle local de l'écoulement  $\theta$  au point  $P$ , le domaine d'influence en ce point est défini par les deux lignes de Mach. De la figure précédente, on peut tirer des relations différentielles entre les deux systèmes de coordonnées  $(x,y)$  et  $(\xi,\eta)$ , et des relations entre l'angle  $\theta$  et les composantes de la vitesse. après un calcul laborieux on aboutit à l'équation suivantes:

$$\left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \cos(\theta - \beta) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \sin(\theta - \beta) \right] \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\cotg \beta}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \cos(\theta - \beta) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \sin(\theta - \beta) \right] \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\cotg \beta}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1)$$

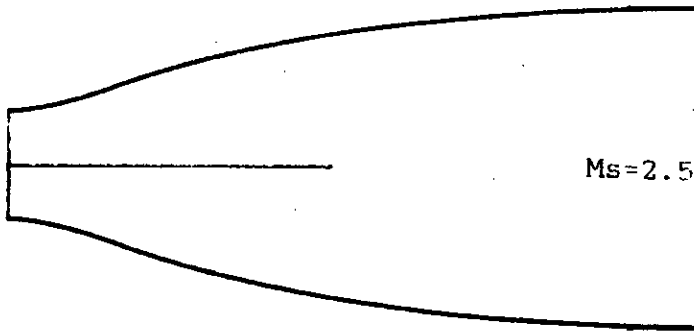
L'intégration de l'équation précédente suivant chaque ligne caractéristique, donne les deux relations suivantes:

$$\theta + \mathcal{V} = Q = \text{constante} \quad (\text{suivant la ligne } \eta) \quad (2)$$

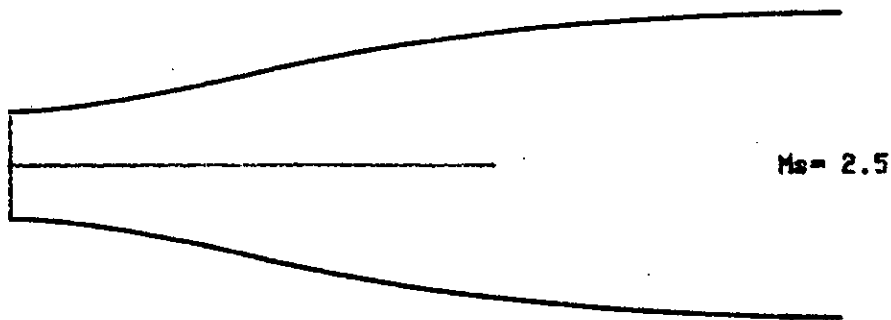
$$\theta - \mathcal{V} = P = \text{constante} \quad (\text{suivant la ligne } \xi) \quad (3)$$

où  $\mathcal{V}$  est la fonction de Prandtl-Meyer sur laquelle se base le calcul.

En réalité les lignes de Mach  $\xi$  et  $\eta$  sont des courbes, et l'application de la méthode des caractéristiques nous oblige à introduire un maillage fin de caractéristiques comme indiqué sur la figure 1. Les côtés de chaque maille sont approchés par des segments de lignes droites. les caractéristiques d'un point quelconque de l'espace peuvent être déterminées à partir des caractéristiques des deux point qui le précèdent et ainsi de suite. Pour la paroi on a



Ondes réfléchies une fois sur la paroi.



Ondes réfléchies deux fois sur la paroi.

Fig.3 Deux longueurs différentes pour une même tuyère.



remplacé la déviation continue d'inclinaison par une succession de déviations finis et suffisamment petites. La précision du calcul, et l'obtention des bons profils dépendent de la construction fine de la maille des caractéristiques, donc au choix de l'angle  $\Delta\theta$ , qui doit être le plus petit possible. Finalement, connaissant les conditions aux limites des points situés dans la section droite du col et sur la paroi de la tuyère, on peut déterminer les caractéristiques de tous les points en utilisant le système d'équation (2) et (3).

A partir du point A2, on commence a faire diminuer l'angle d'inclinaison de la paroi pour éliminer la réflexion des ondes de Mach jusqu'au point A3. L'écoulement devient parallèle et uniforme juste après la dernière onde non réfléchié B3 A3 tel que :

$$\operatorname{tg} \beta_3 = (M_s^2 - 1)^{-1/2} \quad (4)$$

ou  $M_s$  est le nombre de Mach de sortie.

En jouant sur la position du point A2, les ondes de Mach peuvent être réfléchies plusieurs fois sur la paroi, et dans ce cas on peut obtenir plusieurs tuyère de différentes longueurs donnant à la sortie le même nombre de Mach (fig.3).

Pour le calcul des coordonnées des lignes caractéristiques dans le domaine non simple, le point 3 peut être positionner en connaissant les coordonnées des point 1 et 2 (fig.4).

$$X_3 = \frac{Y_2 - Y_1 + m_1 X_1 - m_2 X_2}{m_1 - m_2} \quad (5)$$

$$Y_3 = m_2 (X_3 - X_2) + Y_2 \quad (6)$$

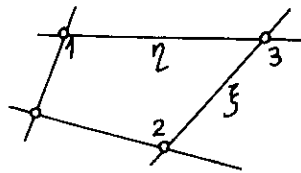


Fig. 4

$m_1$  et  $m_2$  sont respectivement les pentes de  $\eta$  et  $\xi$ .

Si le point appartient à la paroi, les coordonnées peuvent être calculées par les équations suivantes (fig.5) :

$$X_3 = \frac{Y_2 - Y_1 + X_1 \operatorname{tg} \theta_1 - m_2 X_2}{\operatorname{tg} \theta_1 - m_2} \quad (7)$$

$$Y_3 = \operatorname{tg} \theta_1 (X_2 - X_1) + Y_1 \quad (8)$$

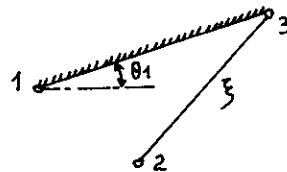


Fig. 5

## Résultats :

La figure (6.a) montre le profil de la tuyère pour  $M_s=2.5$ , l'angle d'inclinaison maximum de la paroi est  $\vartheta_s/2=19.56^\circ$ , le pas est  $0.93^\circ$ . Toutes les ondes sont réfléchies une seule fois sur la paroi. La figure (6.b) est pour  $M_s=3.5$ ,  $\vartheta_s/2=29.26^\circ$ , le pas est de  $1.39^\circ$ .

La figure (7) montre la variation du rapport des sections  $S^*/S$  en fonction du nombre de Mach de sortie  $M_s$  dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, qui est différent à celui d'un écoulement unidimensionnel, ligne continue, donnée par l'équation :

$$S^*/S = M \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (9)$$

$S^*$  est la section au col de la tuyère.

L'évolution du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère est illustré sur la figure (8) pour  $M_s=2$  et  $M_s=5$ .

Le domaine des vitesses uniformes est limité vers l'amont par la ligne de Mach inclinée de l'angle  $\beta_3$  qui correspond au nombre de Mach calculé  $M_s$ . Sa longueur vers l'amont, comptée à partir du plan de sortie de la tuyère est :

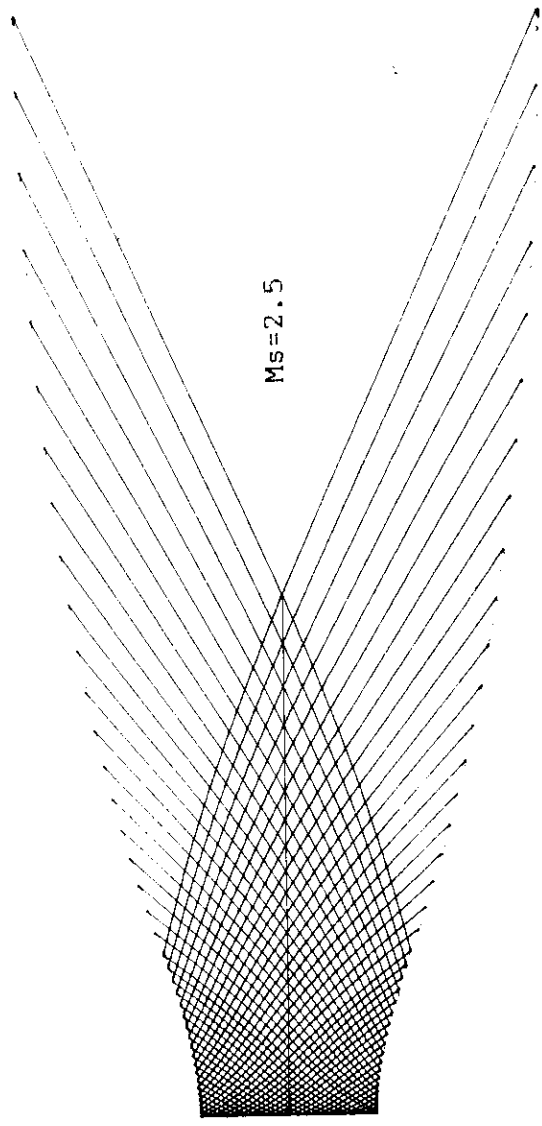
$$L = \frac{D_s}{2 \operatorname{tg} \beta_3} \quad (10)$$

$D_s$  est le diamètre de sortie de la tuyère.

Plus le nombre de Mach est grand, plus la longueur de la tuyère -depuis le col- diffère peu de  $L_a$ . voir (fig.9 et 10).

## Bibliographie

- /1/ SHAPIRO, A. "Compressible Fluid Flow". New York, The Ronald Press, 1953.
- /2/ HOWARTH, L. "Modern Developments In Fluid Dynamics High Speed Flow". Volume 2. Oxford At The Clarend On Press, 1953.
- /3/ RYHMING, L. "Dynamique des fluides". Presses polytechniques Romandes, 1984.



**Fig.6.a** Tuyère supersonique calculée par la méthode des caractéristiques, donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle.  $Ms=2.5$  .



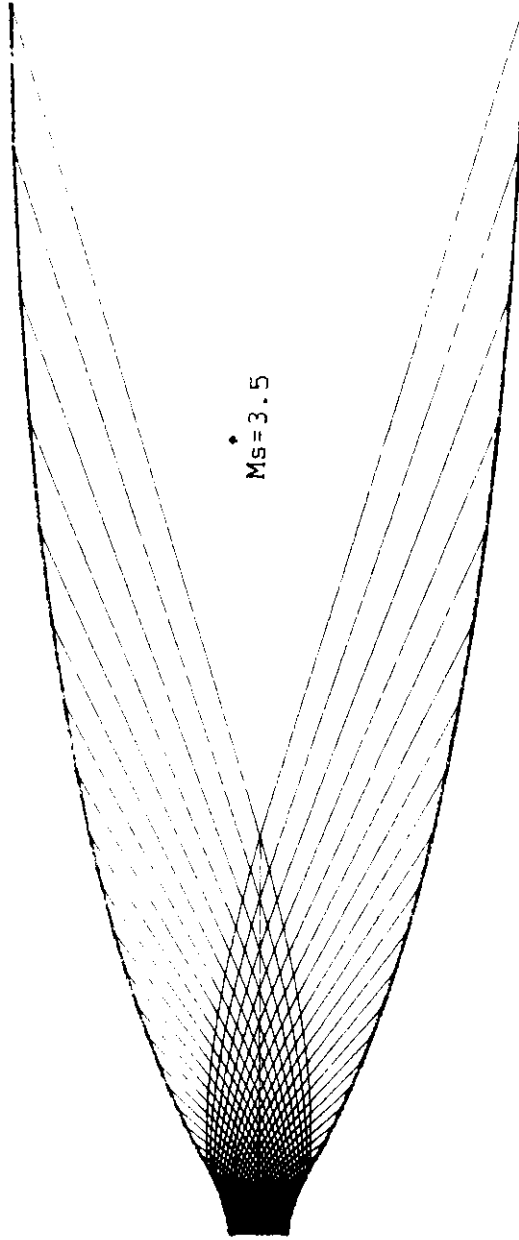


Fig.6.b Tuyère supersonique calculée par la méthode des caractéristiques, donnant à la sortie un écoulement uniforme et parallèle.  $Ms=3.5$  .

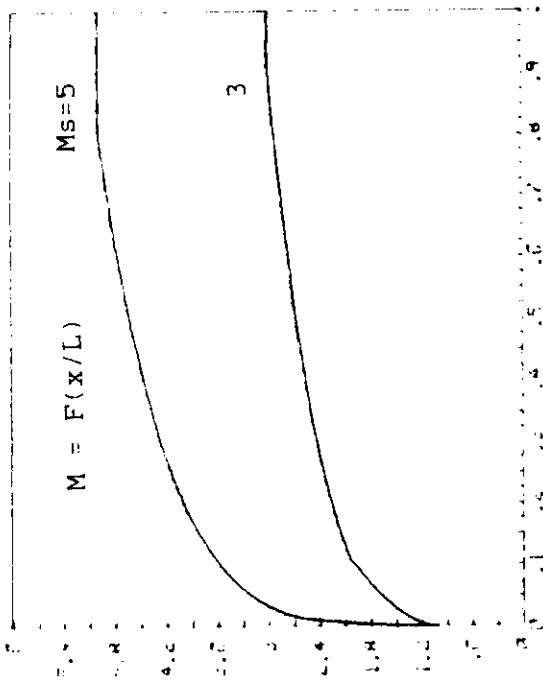


Fig. 8 Variation du nombre de Mach le long de la paroi de la tuyère.

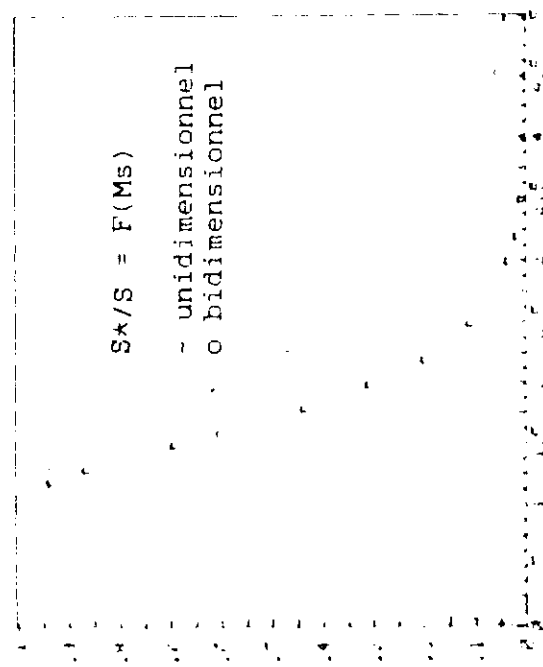


Fig. 7 Rapport des sections en fonction du nombre de Mach de sortie.

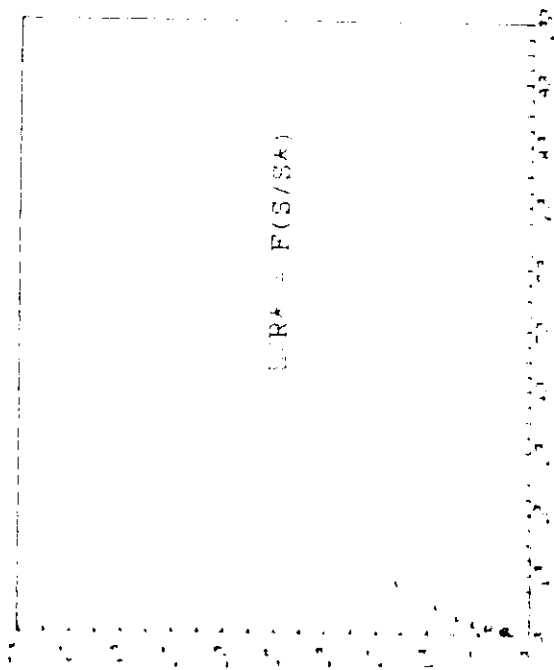


Fig.9 Rapport de la longueur de la tuyère au rayon au col en fonction du rapport des sections.

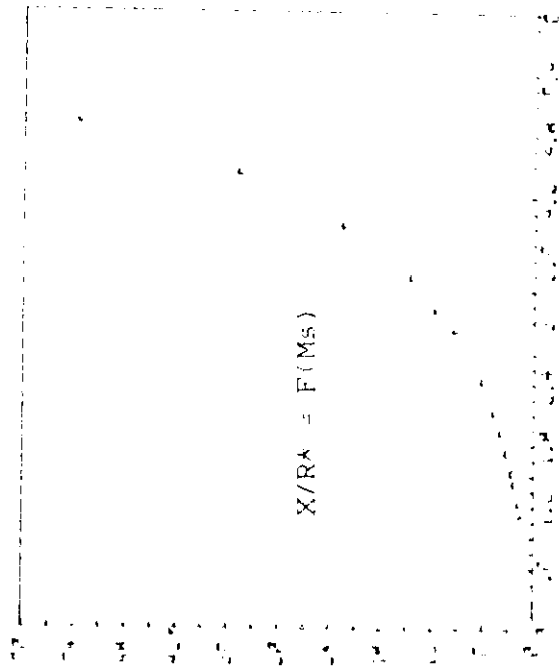


Fig.10 Rapport De  $X/R^*$  en fonction du nombre de Mach de sortie.



# ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN CONDUITES VERTICALES

## PART. I : ÉCOULEMENTS LIQUIDE-LIQUIDE EN CONDUITES VERTICALES ET LÉGEREMENT DÉVIÉES

A. KETTAB\*, A. LINE\*\*, L. MASBERNAT\*\*

ملخص : يشتمل هذا المقال على مجموعة من النتائج النظرية و التجريبية تخص جريان سائلين ماء - زيت في قناة عمودية أو قليلة الإنحناء. بعد تحليل و شرح النتائج التجريبية ، نقدم نموذج لبعض مغلقات تفاعلات سائل-جدار. نتائج هذا النموذج المتحصل عليها حسابيا ، سيقع مقارنتها بالنتائج المتحصل عليها تجريبيا (نسبة حضور سائل و آخر و تقديرات تدرج الضغط) . هذه المقارنة جيدة

**Résumé :** Cet article présente un ensemble de résultats théoriques et expérimentaux sur l'écoulement eau-huile en conduites verticales ou légèrement déviées. Après l'interprétation des résultats expérimentaux, un modèle basé sur des fermetures des interactions fluide-fluide et fluide-paroi est proposé. Les résultats de ce modèle, résolu numériquement, sont comparés à nos résultats expérimentaux (prédétermination du gradient de pression et du taux de présence de phase). Les prédictions du modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

**Abstract :** In this paper, a set of theoretical and experimental results for liquid-liquid systems is presented (oil-water, two-phase flow in vertical and weakly inclined pipes). Experimental results are interpreted and a model, based on fluid-fluid and fluid-wall interactions closure is proposed. Results of this numerically solved model are compared with experimental results (predetermination of pressure gradient and oil holdup). Theoretical results are in reasonable agreement with experimental data.

\* ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE, 10 AVENUE HACENE-BADI EL-HARRACH 16000 ALGER

\*\* INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES, AVENUE DU PROF. CAMILLE SOULA 31400 TOULOUSE

# 1. INTRODUCTION

## 1.1. Généralités

Les études des écoulements diphasiques eau-huile en conduites verticales et inclinées sont faites afin de mieux comprendre certains phénomènes essentiels dans les écoulements diphasiques eau-huile co-courants ascendants, établis.

Ces problèmes sont fréquemment rencontrés dans le génie pétrolier, à l'intérieur des puits, en particulier cette dernière décennie, où la course à l'énergie a rendu compétitive l'exploitation des gisements d'hydrocarbures sous-marins situés parfois à plusieurs centaines de kilomètres du continent. Ces études permettront d'avoir des moyens de calcul appropriés du gradient de pression et du taux de présence de phase à l'intérieur des puits, et donc de dimensionner beaucoup mieux les installations, d'où une diminution du coût de production.

L'élaboration d'un modèle physique ne peut pas faire abstraction de la configuration à laquelle se rattache le mélange. Cette donnée géométrique qualifie les conditions aux limites et sélectionne les mécanismes à prendre en compte. Nous noterons que si la recherche d'une représentation la plus universelle pour les cartes de configurations en gaz-liquide a fait l'objet de nombreux travaux (DUKLER et al 1983,1985; BARNEA 1987; LINE et al 1985, ... ) relatives à la compilation des divers points expérimentaux disponibles, en liquide-liquide, très peu d'études ont été faites (GOVIER 1961 ; FRECHOU et al 1985; CHENAIS et al 1988 ). A noter que les travaux de FRECHOU (1986), sont surtout orientés vers les écoulements triphasiques ( eau-huile-air ). l'intérêt pratique des modèles réside essentiellement dans leur faculté à prévoir les deux grandeurs globales suivantes:

- Taux de présence de phase ( propriétés géométriques de l'interface )
- Gradient de pression ( prix énergétique du transport )

De nombreuses technologies anciennes, ou récentes sont souvent tributaires des progrès réalisés dans la connaissance de ces écoulements; à titre d'exemple:

- Le génie nucléaire ( sûreté, échanges thermiques,...)
- Le génie chimique ( transferts aux interfaces)
- Le génie pétrolier ( extraction et transport des hydrocarbures)
- Le génie de l'environnement (phénomènes de renouvellement de la couche superficielle des océans, l'absorption de gaz dissous)
- Le génie hydraulique (pompage,...)

La viscosité du mélange est un paramètre important, et plusieurs auteurs ont élaboré des lois donnant le comportement rhéologique d'une émulsion diluée de deux fluides Newtoniens. La phase dispersée est constituée de gouttelettes, mais souvent de particules sphériques. La taille de ces gouttelettes ou particules est très petite.

C'est EINSTEIN (1906), qui pour une émulsion diluée, contenant des particules

sphériques indéformables et non interagissantes proposa une formule donnant la viscosité moyenne :

$$\mu_m = \mu_c (1 + a_1 \cdot \alpha) \text{ avec } a_1 = 2,5$$

Tandis que HATSCHEK (1911) a étudié les émulsions non Newtonniennes et a trouvé que lorsque  $\alpha < 0,5$  la partie linéaire de la courbe contrainte-déformation pouvait être présentée par:

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = (1 - \alpha^{1/3})^{-1}$$

TAYLOR (1932) , pour des gouttes sphériques en concentration très faible, a proposé un modèle théorique permettant de calculer une viscosité apparente du mélange, en fonction du titre volumique, et des viscosités des phases:

$$\mu_m = \mu_c \left[ 1 + 0,5r_d \frac{2\mu_c + 5\mu_d}{\mu_d + \mu_c} \right]$$

TAYLOR (1934) a étudié le traitement hydrodynamique d'EINSTEIN pour des suspensions de sphères solides et des gouttes liquides. Il a pris comme hypothèses que le film émulsifiant autour des gouttelettes n'altérait pas la transmission des contraintes tangentielles et normales de la phase continue à la phase dispersée, et qu'il n'y avait pas de glissement à l'interface. Il propose:

$$\text{LOG} \frac{\mu_m}{\mu_c} = 1 + a_1 \frac{\mu_d + \frac{2}{5}\mu_c}{\mu_d + \mu_c} \alpha$$

Nous voyons que lorsque  $\mu_d$  est très supérieur à  $\mu_c$  , on retrouve la formule d'EINSTEIN.

Par la suite GUTH et SIMHA (1936) améliorèrent la formule d'EINSTEIN (1906) en posant :

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = 1 + 2,5\alpha + 14,1\alpha^2$$

Certains auteurs ont analysé le changement de viscosité en rapport avec la taille des particules. Ainsi LEVITON et LEIGHTON (1936) ont observé que la viscosité d'émulsions diluées huile-eau ne changeait pas si le diamètre des gouttes passait de 3 à 0,7 $\mu$ m, et ils ont suggéré que la taille des particules n'avait que peu d'effets, lorsque celles-ci n'étaient pas serrées les unes contre les autres, c'est à dire ( $\alpha < 0,5$ ) .

Pour les fortes concentrations, on utilise aussi la relation d'EILERS (1941) qui donne des résultats comparables à ceux de THOMAS.

$$\mu_m = \mu_c \left[ 1 + \frac{1,25r_d}{1 - 1,3r_d} \right]^2$$

BRINKMAN (1947) propose l'équation:



$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = (1 - \alpha)^{-a''} \quad \text{avec } a'' = 2,5$$

Par contre RICHARDSON (1953) restreint son attention aux émulsions huile-eau concentrées ( $\alpha < 0,75$ ), il remarque que le produit  $\mu_m \cdot d_m$  était constant, lorsque la distribution des diamètres est autour de  $d_m$  (diamètre moyen), n'est pas trop dispersée

THOMAS (1967) propose :

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = 1 + 2,5\alpha + 10,05\alpha^2 + 0,00273 \text{ Exp}(16,6\alpha)$$

$$\text{avec } \alpha < 0,6$$

Nous noterons que rares sont les équations de viscosité dans la littérature faisant intervenir la taille des particules. La taille des gouttes exerce une influence prononcée sur la viscosité des émulsions d'huile-eau ou eau-huile stabilisées avec des tensio-actifs non ioniques, pour une large gamme de taux de présence. Les gouttes de  $16\mu\text{m}$  de diamètre environ des émulsions huile-eau sont déformées pour des cisaillements élevés, mais elles se déforment aussi à cause de l'empaquement ou l'empilement.

Nous remarquerons que les auteurs cités ont travaillé sur des particules solides, ou des gouttelettes, mais à des diamètres très petits (de l'ordre du micron), alors que dans notre cas, le diamètre des gouttes est de l'ordre du mm. C'est pour cela qu'après de vaines tentatives d'applications de ces lois, nous avons déduit que ces lois ne sont pas directement applicables dans notre cas, mais nous donnent une façon d'approche du problème.

Nous avons proposé des lois applicables à notre cas, et qui sont très satisfaisantes (KETTAB et al 1989a, KETTAB et al 1989b, CHENAIS et al 1988.)

$$\mu_m = \mu_c^{(1-\alpha)} * \mu_d^\alpha$$

$$\frac{1}{\eta_m} = \frac{(1-\alpha)}{\eta_c} + \frac{\alpha}{\eta_d}$$

## 1.2. Coefficients de frottements

On peut considérer qu'en l'absence de paroi, et sans changement de phase, en écoulement monophasique dominé par la gravité, et stationnaire, et en négligeant les effets des tensions superficielles, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_m g$$

et posons  $C_D$  défini par la relation  $F_D = -C_D \frac{1}{2} \rho_c \cdot v_r \cdot |v_r| \cdot A_d$

$A_d$  = aire projetée ; et  $v_r = v_d - v_c$

et  $F_D = M_{id} \cdot B_d / \alpha_d$

$B_d$  = le volume de la particule

$M_{id}$  = La force de traînée généralisée

$$= \alpha_k \rho_k g + \alpha_k \frac{\partial P}{\partial z}$$

Il vient donc:

$$v_r |v_r| = \frac{8}{3} \frac{r_d}{C_D \rho_c} (\rho_c - \rho_d) \cdot g \cdot (1 - \alpha_d)$$

$r_d$  = rayon moyen d'une particule

$$= \frac{3 B_d}{4 A_d}$$

Pour le cas d'une sphère unique en milieu infini :

$$v_{r\infty} |v_{r\infty}| = \frac{8}{3} \frac{r_d}{C_{D\infty} \rho_c} (\rho_c - \rho_d) \cdot g$$

$v_{r\infty}$  = Vitesse terminale

$C_{D\infty}$  = Coefficient de traînée

Or on sait  $C_{D\infty} = C_{D\infty}(N_{Re\infty})$

$$\text{ou : } N_{Re\infty} = \frac{2 r_d \rho_c |v_{r\infty}|}{\mu_c}$$

Plusieurs auteurs ( SHILLER et NAUMAN 1935; BRINKMAN 1952; ROSCOE 1952; ... ) ont travaillé sur les coefficients de frottement et ont proposé différentes formulations; qui hélas souvent ne concernent que leurs cas particuliers.

pour un régime laminaire, à partir de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \rho_c) = -\nabla \cdot \epsilon \rho_c \mu_c$$

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-\epsilon)\rho_d) = -\nabla \cdot (1-\epsilon)\rho_d \mu_d$$

on tire l'équation suivante :

$$\epsilon \rho_c \frac{\partial \mu_c}{\partial t} + (1-\epsilon)\rho_d \frac{\partial \mu_d}{\partial t} = -\nabla \cdot \tau - \nabla \cdot P - g [\epsilon \rho_c + (1-\epsilon)\rho_d]$$

or par définition :

$$F_f = \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho_c \cdot v_s^2 \cdot f$$

avec  $f$ , le coefficient de traînée.

Il vient alors :

$$V_s^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{d \cdot \Delta \rho \cdot g}{\rho_c} \cdot \frac{\varepsilon}{f}$$

Pour HARMATHY ( 1960 ) en écoulements turbulents, le coefficient de traînée des particules rigides de forme identique est pratiquement indépendant du nombre de Reynolds sur une grande gamme. En fluide-fluide, pour des particules déformables, le coefficient de traînée dépend de la déformation.

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho_c \cdot U^2 \cdot A}$$

ou du diamètre équivalent d'une particule comme longueur de référence caractéristique:

$$C^* = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho_c \cdot U^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$$

si l'on pose :

$$\beta = \left( \frac{A}{\frac{\pi d^2}{4}} \right)^{1/2}$$

alors :

$$C^* = \beta^2 \cdot C$$

pour une sphéroïde :

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

### 1.2.1. Différents régimes d'écoulements

pour une particule solide sphérique, nous avons :

- \* Le régime visqueux où la dépendance  $C_{D\infty} / N_{Re\infty}$  est prononcée

- \* Le régime de Newton où  $C_{D\infty}$  est indépendant du Reynolds

Pour des particules fluides propres,  $C_{D\infty}$  peut être réduit d'environ 30% par rapport à  $C_{D\infty}$  des particules solides. Ceci s'explique par les circulations internes, mais il suffit de quelques impuretés pour que ce pourcentage soit modifié. C'est pour cela qu'en général la traînée d'une particule fluide est de même ordre de grandeur que celle d'une particule solide, et ce jusqu'à une certaine taille de la particule bien sûr, car au-delà, la forme est distordue, le mouvement irrégulier.

Dans le régime à particules fluides déformées,  $C_D$  ne dépend pas de la viscosité, mais augmente avec le rayon de la particule.

Pour cause d'instabilité hydrodynamique, il y a une limite supérieure à  $C_{D\infty}$ , car la particule atteint les conditions de calotte, ou bien de taille de goutte maximum (condition donnée par le Weber critique). La vitesse terminale est alors fonction du rayon de la particule. Nous avons :



$$C_{D\infty}(N_{Re\infty}) = C_D(N_{Re}) \left[ \frac{v_r}{v_{r\infty}} \right]^2 \frac{1}{1 - \alpha_d}$$

$$N_{Re} = \frac{2 r_d \rho_c |v_r|}{\mu_m}$$

Nous avons vu plus haut que la viscosité moyenne a été définie par plusieurs auteurs. L'utilisation de cette viscosité moyenne dans le groupe adimensionnel  $N_{Re}$  est expliquée comme suit (BURGERS 1941, 1942; ZUBER 1964; ):

\* Quand une particule seule évolue dans un mélange diphasique dispersé, elle imprime un mouvement à la phase continue.

\* Quand le fluide coule, sa déformation cause des mouvements de rotation et de translation aux autres particules.

Or on sait que les particules sont plus rigides que le fluide continu (vis-à-vis des déformations), les particules imposent un système de forces qui réagit sur le fluide. Les résultats de ces contraintes supplémentaires sont que la particule originale voit croître la résistance à son mouvement, ce qui équivaut à un accroissement de viscosité, d'où le concept de viscosité de mélange.

### 1.2.1.1. Régime visqueux

Dans ce régime, on suppose qu'une similitude complète existe entre  $C_{D\infty}(N_{Re\infty})$  et  $C_D(N_{Re})$ , alors :

$$C_D = \frac{24 (1 + 0,1 N_{Re}^{0,75})}{N_{Re}}$$

Nous noterons que dans le modèle à "Flux de Dérive" de ZUBER (1967); ISHII et al (1976), la vitesse "drift", c'est à dire la vitesse relative de la phase dispersée est importante.

$$V_{dj} = v_d - j = (1 - \alpha_d) \cdot v_r = U_H - (U_{HS} + U_{ES})$$

$$V_{dj} = v_{r\infty} (1 - \alpha_d)^{3/2} f(\alpha_d) \frac{1 + \psi(r_d^0)}{1 + \psi(r_d^0) [f(\alpha_d)]^{6/7}}$$

$$\psi(r_d^0) = 0,55 \left[ (1 + 0,08 \cdot (r_d^0)^3)^{4/7} - 1 \right]^{3/4} \text{ en régime}$$

visqueux

et, 
$$r_d^0 = r_d \left[ \frac{\rho_c \cdot g \cdot \Delta p}{\mu_c^2} \right]^{1/3}$$

### 1.2.1.2. Régime de NEWTON

Dans ce cas, on a  $r_d^0 \geq 34,65$ , et donc en posant  $r_d^0 = 34,65$  dans l'expression

écédente, il vient :

$$V_{dj} = v_{r\infty}(1 - \alpha_d)^{3/2} f(\alpha_d) \frac{18,67}{1 + 17,67[(f(\alpha_d))^{6/7}]}$$

et quand  $\mu_d \gg \mu_c$ , on peut prendre :

$$V_{dj} = 2,43 \sqrt{g \cdot r_d \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_c}}$$

### 1.2.1.3. Régime à particules fluides déformées

Dans ce régime  $C_D$  dépend uniquement du rayon de la particule, et des propriétés du fluide, mais ni de la vitesse, ni de la viscosité.

$$C_{D\infty} = \frac{4}{3} r_d \sqrt{g \cdot \frac{\Delta \rho}{\sigma}} \quad (\text{HARMATHY 1960}) \text{ pour une}$$

particule de  $r_d$  fixe,  $C_{D\infty}$  est constant, mais la présence d'autres particules affecte  $C_D$ . Par analogie au régime de NEWTON, on suppose que  $C_D$  croît.

il vient :

$$\begin{aligned} \text{quelque soit } r_d \text{ ---} & \rightarrow V_{dj} = v_{r\infty}(1 - \alpha_d)^{2,25} & \mu_d \gg \mu_c \\ \text{où } v_{r\infty} & = \sqrt{2} \left[ \frac{g \cdot \sigma \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4} \end{aligned}$$

### 1.2.1.4. Régime churn-turbulent

Quand le rayon de la particule croît, du fait du sillage et de la couche, une particule peut influencer à la fois le fluide environnant, et les autres particules, et ainsi l'entraînement d'une particule dans le sillage d'autres particules devient possible (En gaz-liquide la transition est à  $\alpha_d = 0,3$ ).

En régime churn, dans la définition du coefficient de traînée et dans la loi de similitude, la vitesse de dérive est prise de préférence à la vitesse de glissement.

$$F_D = -C_D' \frac{1}{2} \rho_c \cdot V_{dj} \cdot |V_{dj}| \cdot \pi \cdot r_d^2$$

Dans le régime churn-turbulent, les inclusions ont atteint la limite au régime à calotte (en gaz-liquide) ou à la désintégration de la goutte (en liquide-liquide). Cette limite peut-être donnée en extension du critère de Weber (WALLIS 1969), avec la vitesse de dérive comme référence de vitesse.

$$\frac{2 \rho_c V_{dj}^2 r_d}{\sigma} = 8 \text{ (pour une bulle) ; et } 12 \text{ (pour une goutte)}$$

Donc compte tenu de l'entraînement des particules dans le sillage d'autres particules plus grosses, de la coalescence et rupture induite par la turbulence, le mouvement moyen est largement gouverné par les particules qui vérifient ce critère. Le coefficient de traînée effectif est  $C_D = 8/3$

et  $F_D$  se réécrit:

$$F_D = -\frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2 \frac{1}{2} \rho_c \cdot V_r \cdot |V_r| \cdot \pi \cdot r_d^2$$

D'où le coefficient de traînée apparent  $C_D = \frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2$

et il vient alors :

$$V_{dj} = \sqrt{2} \left[ \frac{\sigma \cdot g \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4} (1 - \alpha_d)^{1/4}$$

PILCH et ERDMAN ( 1987 ) donnent un Weber critique comme suit :

$$We_c = 12 (1 + 1,077 O_n)^{1,6}$$

Ohnesoye number :  $O_n = \frac{\mu_d}{(\rho_d \cdot d \cdot \sigma)^{0,5}}$

$O_n$  étant de l'ordre de 1%, le Weber critique est de l'ordre de 12.

D'après ce qui précède, nous avons :

### le bilan de vitesses de dérive

\* Régime de Stokes :

$$V_{dj} = G(1 - \alpha_d) = \frac{2}{9} g \frac{\Delta \rho}{\mu_c} r_d^2 (1 - \alpha_d)^2$$

$$C_D = \frac{24}{N_{Re}} \quad \text{avec} \quad N_{Re} = 2 \cdot r \cdot \rho_c \cdot G / \mu_m$$

$$V_{dj} = v_{r\infty} (1 - \alpha_d)^{3/2} (1 - \alpha_d)^{1/2} \frac{\mu_c}{\mu_m} \frac{1 + \psi}{1 + \psi \left[ \frac{\mu_c}{\mu_m} (1 - \alpha_d)^{1/2} \right]^{6/7}}$$

$$r_d^0 = r_d \left[ \frac{g \cdot \rho_c \cdot \Delta \rho}{\mu_c^2} \right]^{1/3}$$

$$v_d^0 = v_r \left[ \frac{\rho_c^2}{\mu_c g \cdot \Delta \rho} \right]^{1/2}$$

On montre:

$$v_{r\infty}^0 = \frac{4,86}{r_d^0} \left[ \frac{\psi}{0,55} \right]^{4/3}$$

$$v_{r\infty} = \frac{\mu_c \psi^{1/3}}{\rho_c \cdot r_d} \cdot \frac{4,86}{0,55^{4/3}}$$

\* Régime de particules déformées :

$$V_{dj} = v_{r\infty} (1 - \alpha_d)^n \quad \begin{array}{l} n = 2 \quad \text{---} \rightarrow \mu_c \sim \mu_d \\ n = 2,25 \quad \text{---} \rightarrow \mu_c \ll \mu_d \end{array}$$

$$v_{r\infty} = \sqrt{2} \left[ \frac{g \cdot \sigma \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4}$$



\* Régime churn-turbulent :

$$v_{r\infty} = \sqrt{2} \left[ \frac{g \cdot \sigma \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4} \cdot (1 - \alpha_d)^{1/4}$$

Le bilan des coefficients de traînée est :

\* Régime de Stokes:

$$C_D = \frac{24}{N_{Re}} \quad N_{Re} = 2 \cdot r_d \cdot \rho_c \cdot \frac{v_r}{\mu_m}$$

\* Régime de particules non déformées

$$C_D = \frac{24}{N_{Re}} [1 + N_{Re}^{0,75}]$$

\* Régime de particules déformées

$$C_D = \frac{4}{3} r_d \sqrt{\frac{g \Delta \rho}{\sigma}} (1 - \alpha_d)^2 \quad \text{avec } n = -1 \rightarrow \mu_c \sim \mu_d$$

$$n = -1,5 \rightarrow \mu_c \ll \mu_d$$

\* Churn

$$C_D = \frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2$$

et :  $\frac{2 \rho_c v_{di}^2 r_d}{\sigma} = 8$  (pour une bulle) ; et 12 (pour une goutte)

## 2. INSTALLATION - INSTRUMENTATION- EXPERIMENTATION

### 2.1. Description générale

Les essais ont été réalisés sur deux conduites verticales circulaires de 5 et 10 cm de diamètre, et peuvent être inclinées jusqu'à 13° par rapport à la verticale (Fig. 1). La longueur totale de ces conduites est de 13m. Les débits des phases eau et huile sont mesurés à l'entrée respectivement par des diaphragmes associés aux transmetteurs Rosemonts, et par débitmètre volumique associée à un compteur d'impulsions. Les mesures du gradient de pressions, du taux de présence des phases, sont effectués sur le tronçon isolable de la conduite. Nous avons étudié près de 300 types d'écoulements différents, et une importante banque de données est donc disponible. Les 4 inclinaisons étudiées sont : 0°; 2°; 7°; 12°.

### 2.2. Caractéristiques de l'huile

Les 2 fluides utilisés sont de l'eau de ville, et une huile minérale de type MAYOLINE. Les propriétés de cette huile sont :

$$\rho = 845 \text{ Kg /m}^3$$

$$v = 30.E-6 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{à } T^\circ = 20^\circ\text{C}$$

$$\sigma \text{ huile-eau} = 22 \text{ dynes/cm}$$

et  $F_D$  se réécrit:

$$F_D = -\frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2 \frac{1}{2} \rho_c \cdot V_r \cdot |V_r| \cdot \pi \cdot r_d^2$$

D'où le coefficient de traînée apparent  $C_D = \frac{8}{3} (1 - \alpha_d)^2$

et il vient alors :

$$V_{dj} = \sqrt{2} \left[ \frac{\sigma \cdot g \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4} (1 - \alpha_d)^{1/4}$$

PILCH et ERDMAN ( 1987 ) donnent un Weber critique comme suit :

$$We_c = 12 (1 + 1,077 O_n)^{1,6}$$

Ohnesoye number :  $O_n = \frac{\mu_d}{(\rho_d \cdot d \cdot \sigma)^{0,5}}$

$O_n$  étant de l'ordre de 1%, le Weber critique est de l'ordre de 12.

D'après ce qui précède, nous avons :

### le bilan de vitesses de dérive

\* Régime de Stokes :

$$V_{dj} = G(1 - \alpha_d) = \frac{2}{9} g \frac{\Delta \rho}{\mu_c} r_d^2 (1 - \alpha_d)^2$$

$$C_D = \frac{24}{N_{Re}} \quad \text{avec} \quad N_{Re} = 2 \cdot r \cdot \rho_c \cdot G / \mu_m$$

$$V_{dj} = v_{r\infty} (1 - \alpha_d)^{3/2} (1 - \alpha_d)^{1/2} \frac{\mu_c}{\mu_m} \frac{1 + \psi}{1 + \psi \left[ \frac{\mu_c}{\mu_m} (1 - \alpha_d)^{1/2} \right]^{6/7}}$$

$$r_d^0 = r_d \left[ \frac{g \cdot \rho_c \cdot \Delta \rho}{\mu_c^2} \right]^{1/3}$$

$$v_d^0 = v_r \left[ \frac{\rho_c^2}{\mu_c g \cdot \Delta \rho} \right]^{1/2}$$

On montre:

$$v_{r\infty}^0 = \frac{4,86}{r_d^0} \left[ \frac{\psi}{0,55} \right]^{4/3}$$

$$v_{r\infty} = \frac{\mu_c \psi^{1/3}}{\rho_c \cdot r_d} \cdot \frac{4,86}{0,55^{4/3}}$$

\* Régime de particules déformées :

$$V_{dj} = v_{r\infty} (1 - \alpha_d)^n \quad \begin{array}{l} n = 2 \quad \text{---} \rightarrow \mu_c \sim \mu_d \\ n = 2,25 \quad \text{---} \rightarrow \mu_c \ll \mu_d \end{array}$$

$$v_{r\infty} = \sqrt{2} \left[ \frac{g \cdot \sigma \cdot \Delta \rho}{\rho_c^2} \right]^{1/4}$$

phasiques:

$$G = U_H - U_E = \frac{U_{HS}}{1-R_E} - \frac{U_{ES}}{R_E}$$

$$U_{ES} = \frac{Q_H}{A} \quad \text{et} \quad U_{HS} = \frac{Q_E}{A}$$

et en posant le taux d'injection d'eau comme suit :

$$W_c = \frac{Q_E}{(Q_E+Q_H)} = \frac{Q_E}{Q_T}$$

$$G = \frac{Q_T}{A} \left[ \frac{1 - W_c}{R_H} - \frac{W_c}{R_E} \right]$$

Cette formulation nous permet de comparer directement le taux de présence volumique de la phase huile ou eau en fonction du taux d'injection d'huile ou d'eau. Les figures (3.1; 3.2) montrent l'évolution du glissement moyen en fonction du taux de présence d'eau, et ce pour différentes inclinaisons. A débit d'huile constant le glissement augmente avec l'augmentation du débit d'eau, donc de la fraction volumique d'eau. Quand le débit d'eau est constant, et qu'on augmente le débit d'huile, donc la fraction volumique d'huile, nous remarquons que le glissement diminue dans un premier temps, puis il augmente. Ceci s'explique par le fait qu'au début on introduit de nouvelles gouttes d'huiles séparées, et donc le glissement diminue, et ensuite il y a formation d'essaims de gouttes, d'ou un grand diamètre, et la vitesse ascensionnelle est supérieure à celle d'une goutte d'huile isolée, et par conséquent le glissement a augmenté.

### 3. FROTTEMENT PARIETAL-FROTTEMENT INTERFACIAL

Le bilan de quantité de mouvement longitudinale dans chacune des deux phases d'un écoulement diphasique en conduite fait apparaître un système de deux équations à sept inconnues. Les sept inconnues sont les deux gradients de pression moyenne phasique, le taux de présence moyen de l'une des deux phases, le frottement de chacune des deux phases sur la paroi, le périmètre interfacial.

Pour notre cas les deux gradients de pression sont égaux, et pour les écoulements étudiés, une seule phase mouille la paroi. De ce fait, nous ramenons le nombre d'inconnues, à cinq ( $\frac{\partial p}{\partial x}$ ;  $R_E$ ;  $P_I$ ;  $\tau_E$ ;  $\tau_I$ ), et nous n'avons besoin que de trois lois de fermeture, puisque le gradient de pression et les taux de présence volumiques de phases sont mesurés. Le périmètre de contact peut être modélisé avec une bonne estimation, par contre le frottement interfacial et le frottement pariétal sont difficilement modélisables, et le choix de grandeurs diphasiques doit être bien fait pour la construction de nombres adimensionnels.

Les nombres adimensionnels tels que le coefficient de frottement interfacial; le coefficient de frottement pariétal; le nombre de Reynolds; doivent être bien choisis,



et nous le verrons plus loin, le choix de ces grandeurs de référence et la construction de ces nombres adimensionnels ne sont pas évidents.

### 3.1. Ecritures des équations

En écoulements permanents, établis, quand l'eau est la phase mouillante de la paroi, les équations de base du modèle de prédétermination du gradient de pression, des fractions de phases et des vitesses phasiques s'écrivent comme suit:

\* Pour la phase continue:

$$-R_C \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{4 \cdot \tau_{c, \text{paroi}}}{D} - \frac{4 \cdot \tau_I \cdot P_I}{\pi \cdot D^2} + R_C \cdot \rho_C \cdot g \cdot \cos \theta$$

\* pour la phase dispersée :

$$-(1-R_C) \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{4 \cdot \tau_I \cdot P_I}{\pi \cdot D^2} + (1-R_C) \cdot \rho_d \cdot g \cdot \cos \theta$$

Soit pour les deux phases :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{4 \cdot \tau_{c, \text{paroi}}}{D} + (R_C \cdot \rho_C + (1-R_C) \cdot \rho_d) g \cdot \cos \theta = \left[ \frac{-\partial P}{\partial x} \right]_f + \left[ \frac{-\partial P}{\partial x} \right]_g$$

Nous avons un système de deux équations avec 5 inconnues :

$$-\frac{\partial P}{\partial x}; R_E; P_I; \tau_{E, \text{paroi}} \text{ et}; \tau_I.$$

$$\rho_m = \rho_E \cdot R_E + \rho_H \cdot R_H$$

Le diamètre interfacial est défini par :  $D_I = \frac{4 \cdot A}{P_I}$

Le périmètre interfacial est modélisé comme suit :

$$R_H = \frac{A_H}{A} = \frac{n \cdot a_H}{A}$$

$$P_I = n \cdot \pi \cdot d_H$$

$$\text{avec : } a_H = \frac{\pi \cdot d_g^2}{4} \text{ et } A = \frac{\pi \cdot D_c^2}{4}$$

$$R_H = \frac{n \cdot a_H}{A} = \frac{n \cdot d_g^2}{D_c^2}, \text{ d'ou } n = R_H \frac{D_c^2}{d_g^2}$$

$$P_I = \pi \cdot R_H \frac{D_c^2}{d_g^2}$$

$$D_I = \frac{d_g}{R_H}$$

$$\tau_{E, \text{paroi}} = \left[ - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_M \cdot g \cdot \cos \theta \right] \cdot \frac{D_c}{4}$$

$$\tau_I = \left[ \frac{4 \cdot \tau_{E, \text{paroi}} \cdot R_H}{D_c} + (\rho_E - \rho_H) \cdot R_E \cdot R_H \cdot g \cdot \cos \theta \right] \frac{d_g}{4 \cdot R_H}$$

Nous déduisons que les gouttes d'huile, dont la viscosité dynamique est 30 fois supérieure à celle de l'eau acceptent sûrement l'énergie cinétique, dûe aux fluctuations de vitesse en provenance de l'eau pour les dissiper à l'intérieur d'elles mêmes. Il est donc important de prendre en compte cela pour définir la viscosité cinématique de référence lors de la construction du nombre de Reynolds. Nous avons testé plusieurs viscosités de mélange proposées par la littérature mais hélas aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu.

Nous avons remarqué expérimentalement que les écoulements restent dispersés d'huile dans l'eau jusqu'à un taux de présence de l'ordre de 80%. Ceci peut nous amener à faire l'analogie avec les écoulements observés dans les milieux poreux. Nous pensons que l'huile forme une matrice qui guide et réduit les possibilités de débatement de l'eau. De ce fait la longueur de référence à prendre en compte serait:

- Le diamètre entre les gouttes, "diamètre intergouttes"
- Le diamètre des gouttes

On peut estimer " $d_{\text{intergouttes}}$ " de plusieurs façons :

$$R_H = \frac{\pi \cdot d_g^3}{6 \cdot d_{\text{intergouttes}}^3} \quad 1/3$$

$$d_{\text{intergouttes}} = \left[ \frac{\pi \cdot d_g^3}{6 \cdot R_H} \right]^{1/3}$$

avec  $d_g$ , diamètre moyen des gouttes d'huile, et  $d_{\text{intergouttes}}$ , la distance entre 2 gouttes d'huile voisines. Cela nous amène à dire que lors de la construction de nos nombres, ce n'est pas le diamètre de la conduite qu'on fera intervenir, mais le diamètre entre les gouttes, ou le diamètre des gouttes. Nous pouvons prendre la vitesse phasique de l'eau, puisqu'on ne tient compte que du mouvement de l'eau, car on assimile l'huile à une source extérieure de guidage qui laminarise l'écoulement.

Après avoir essayé vainement plusieurs formules proposées dans la littérature (surtout en écoulement gaz-liquide), et après avoir fait plusieurs tentatives pour la définition de la viscosité diphasique, celle qui nous avons définie et qui nous semble la plus correcte est :

$$v_{\text{moyen}} = v_E^{\text{RE}} \cdot v_H^{\text{RH}}$$

Il est évident qu'en définissant  $d_{\text{intergouttes}}$ , nous supposons aussi que la distance entre une goutte et la paroi est la même qu'entre deux gouttes voisines, malgré la présence de l'épaisseur d'un film d'eau existant entre la paroi et la zone diphasique.

### 3.2. Frottement pariétal

Nous avons étudié l'évolution du coefficient de frottement pariétal en fonction du nombre de Reynolds. Nous avons pris :

$$C_{f,p} = \frac{\tau_{E,\text{paroi}}}{\frac{1}{2} \rho_m U_E^2}$$

avec :  $\rho_m = \rho_E \cdot R_E + \rho_H \cdot R_H$

$U_E$  : vitesse débitante phasique de l'eau

et,

$$Re_{\text{moy,intergouttes,eau}} = \frac{d_{\text{intergouttes}} \cdot U_E}{v_m}$$

avec :

$$v_{\text{moyen}} = v_E^{\text{RE}} \cdot v_H^{\text{RH}}$$

Les figures 3.3; 3.4; 3.5; 3.6; montrent l'évolution du coefficient de frottement pariétal en fonction du nombre de Reynolds.

### 3.3. Frottement interfacial

Les figures 3.7; 3.8; montrent l'évolution du coefficient de frottement interfacial en fonction du Reynolds moyen,intergouttes.

Le Reynolds est modélisé comme suit:

$$Re_{\text{moy,intergouttes}} = \frac{d_{\text{int.}} \cdot G \cdot \rho_E}{\eta_m}$$

avec :

$$\frac{1}{\eta_m} = \frac{R_E}{\eta_E} + \frac{R_H}{\eta_H}$$

Sachant que le diamètre des gouttes est un paramètre important, nous avons essayé de déterminer ce diamètre par l'intermédiaire de l'abaque de GRACE ( 1979 ). Cet abaque en fonction des propriétés physiques des fluides, et des paramètres de l'écoulement, permet de déterminer le diamètre des gouttes. Nous nous sommes rendus compte que si cet abaque peut s'appliquer aux écoulements gaz-liquide sans



difficulté, il est inapplicable en écoulement liquide-liquide, du moins dans notre cas, en écoulement eau-huile.

Nous noterons que l'on a fait les mêmes tentatives de détermination de diamètre d'après les équations proposées par COMOLET (1979).

### 3.4. Conclusions

Nous avons montré que l'introduction de grandeurs de références spécifiques aux écoulements dispersés est indispensable pour interpréter les frottements fluide-fluide et fluide-paroi et ainsi donc pour pouvoir élaborer des modèles.

De ce fait :

- Une viscosité moyenne diphasique a été élaborée, tenant compte des propriétés physiques de l'huile, de l'eau, et des caractéristiques de l'écoulement.
- Un coefficient de frottement pariétal et interfacial sont construits.
- Un Reynolds " diphasique " a été construit

Nous avons constaté qu'effectivement, le diamètre de la conduite n'est pas toujours la bonne grandeur et qu'une autre grandeur de référence pouvait être modélisée.

## 4. RESULTATS EXPERIMENTAUX - INTERPRETATION

### 4.1. Vitesse moyenne de la phase K en fonction de la V du mélange

Dans la conduite de 5cm, la vitesse de l'eau varie de 0,08 m/s à 1,02 m/s; et dans la conduite de 10 cm, elle varie de 0,02 m/s à 0,29 m/s. La vitesse d'huile varie respectivement de 0,06 m/s à 0,95 m/s et de 0,02 à 0,28 m/s.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent les variations de la vitesse de l'eau en fonction de la vitesse totale pour la conduite 5cm et 10cm de diamètre; tandis que les figures 4.3 et 4.4 montrent la variation de la vitesse de l'huile en fonction de la vitesse totale et ce, respectivement pour la conduite de 5 cm et 10 cm de diamètre.

Ces figures nous montrent clairement la gamme des débits d'eau et d'huile utilisés, ainsi que la validation des essais expérimentaux.

### 4.2. Glissement en fonction du taux d'injection

Nous avons défini précédemment le glissement moyen comme suit:

$$G = \frac{Q_t}{A} \left[ \frac{1 - W_e}{RH} - \frac{W_e}{RE} \right]$$

Cette formulation nous permet de comparer directement le taux de présence volumique de la phase huile ou eau, en fonction du taux d'injection d'huile ou d'eau. Les figures 4.5 et 4.6 montrent l'évolution du glissement moyen en fonction du taux d'injection d'eau respectivement pour la conduite de 5 cm et 10 cm, et pour

une inclinaison de  $0^\circ$ ; et les figures 4.7 et 4.8 pour l'inclinaison de  $12^\circ$ .

Nous remarquons qu'à débit d'huile constant, le glissement augmente avec le débit d'eau. Quand le débit d'eau est constant, et que l'on augmente le débit d'huile, donc la fraction volumique d'huile, nous remarquons que le glissement diminue dans un premier temps, puis augmente. Ceci s'explique par le fait qu'au début on introduit de nouvelles gouttes d'huiles séparées, et donc le glissement diminue, ensuite il y a formation d'amas, " d'essaims " de gouttes, donc un grand diamètre et la vitesse ascensionnelle est supérieure à celle d'une goutte d'huile isolée, et par conséquent le glissement augmente.

Nous noterons aussi que le glissement moyen augmente au fur et à mesure que l'inclinaison de la conduite augmente ainsi que le taux de présence volumique d'huile. Ceci s'expliquerait par le fait que la conduite étant inclinée, l'huile a tendance à se rassembler dans la partie supérieure de la conduite, le champ de vitesse se cisaille, et le glissement augmente donc.

#### **4.3. Taux de présence d'huile en fonction de $Q_t$**

Les figures 4.9; 4.10 décrivent l'influence du débit total sur le taux de présence d'huile. Nous voyons que plus le débit total est grand et plus le taux de présence d'huile est petit, et ce pour un débit d'huile fixé. Ceci peut s'expliquer par le fait que le glissement d'une certaine structure de gouttes de phases dispersée, dépend assez peu de la vitesse débitante de la phase continue.

Des écarts relatifs existent entre le temps de séjour de l'eau et le temps de séjour de l'huile dans la conduite.

Le taux de présence d'eau moyen décroît et tend vers le taux d'injection quand on augmente le débit total.

#### **4.4. Taux de présence d'eau en fonction $W_e$**

Les figures 4.11 et 4.12 nous montrent l'évolution du taux de présence moyen d'eau en fonction du taux d'injection. L'huile de par sa faible densité par rapport à l'eau, va plus vite et passe moins de temps dans la conduite que ne le fait l'eau. Ainsi le taux de présence moyen d'eau (  $RE$  ) est toujours inférieur aux taux d'injection d'eau (  $We$  ).

Ce phénomène est accentué en inclinant la conduite comme on le voit dans les figures 4.13 et 4.14 et que le taux de présence est une fonction croissante du taux d'injection et ce indépendamment du débit total ou de l'inclinaison.

#### **4.5. Taux de présence d'eau en fonction $U_{es}$**

Les figures 4.15 et 4.16 décrivent l'évolution du taux de présence d'eau en fonction

de la vitesse de l'eau. Nous voyons qu'à débit d'huile constant, plus la vitesse de l'eau est grande est plus le taux de présence est grand. Nous remarquons qu'à un débit d'huile constant, le fait d'incliner la conduite contribue à augmenter le taux de présence d'eau, ceci s'explique par le fait que lorsque on incline la conduite les gouttes d'huile vont progressivement vers la partie supérieure de la conduite et s'agglomèrent pour former des gouttes de diamètres supérieurs à ceux de gouttes isolées. Ces gouttes glissent plus vite par rapport à l'eau, ce qui explique un glissement moyen plus important et donc un taux de présence d'eau plus grand.

#### 4.6. Gradient de pression fonction. RE

En écoulements liquide-liquide dispersés, les fluctuations de pression sont peu importantes par rapport à l'écoulement gaz-liquide (poche-bouchon)

En utilisant un voltmètre moyennneur, nous voyons que la moyenne du signal convergait très rapidement (quelques secondes), pour se stabiliser définitivement au bout de quelques minutes. Il est à remarquer que le temps de stabilisation est d'autant plus long que le taux de présence d'huile est élevé (2 à 10 mn). Les capteurs de pression fournissant pratiquement les mêmes valeurs, ceci montre que notre écoulement est bien établi.

Les figures 4.17; 4.18 et 4.19; 4.20 montrent l'évolution du gradient de pression longitudinale en fonction du taux de présence d'eau. Nous remarquons que pour des taux de présence d'eau inférieurs à 20%, donc des taux de présence d'huile supérieures à 80%, la phase continue étant l'huile, la paroi étant donc mouillée par l'huile, les lignes se remplissent d'huile et la lecture devient impossible.

Nous voyons dans ces figures que le gradient de pression longitudinal ne dépend que du taux de présence d'eau et non du débit total et que, de plus, il varie presque linéairement.

#### 4.7. Frottement pariétal en fonction. du taux de présence d'eau

Nous remarquons que lorsque RE tend vers 1, le frottement à la paroi tend à s'annuler (Fig. 4.21; 4.22). Comme nous l'avons vu modélisé plus haut, le frottement pariétal s'écrit :

$$\tau_{E,paroi} = \left[ \frac{-\partial P}{\partial x} + \rho_m \cdot g \cdot \cos\theta \right] \cdot \frac{D_c}{4}$$

Nous pouvons dire que la chute de pression est uniquement dûe au poids de la colonne et au frottement à la paroi.

Nous remarquons que les coefficients de frottement sont plus élevés dans la



conduite de 5 cm que celle de 10 cm, ceci s'explique par le fait que les gradients de pression sont plus importants dans la petite conduite que la grande.

Quand on augmente le débit d'huile à débit d'eau constant, le frottement pariétal augmente car le fait de mettre plus d'huile, nous avons une homogénéisation du profil de vitesse global et donc un accroissement des gradients transversaux de profil de vitesse longitudinale près des parois.

Nous noterons aussi que le frottement pariétal augmente avec l'inclinaison de la conduite, les gradients transversaux de vitesse longitudinales observés dans la partie supérieure de la conduite deviennent importants (les gouttes d'huile glissent plus vite dans la partie supérieure de la conduite).

Le frottement pariétal augmente pratiquement quasi linéairement en fonction du taux de présence d'huile (Fig. 4.23; 4.24).

#### 4.8. Frottement interfacial en fonction du taux de présence d'eau

Le frottement interfacial est directement proportionnel à la vitesse de l'eau pour un débit d'huile donné (Fig. 4.25; 4.26).

Pour un débit d'eau donné lorsque on augmente le débit d'huile, le frottement interfacial diminue. Quand la conduite est inclinée (Fig. 4.27; 4.28), le frottement interfacial varie légèrement.

Le frottement interfacial est calculé comme nous l'avons modélisé plus haut, à savoir :

$$\tau_I = \left[ \frac{4 \cdot \tau_{E_2 \text{ paroi}} \cdot R_H}{D_c} + (\rho_E - \rho_H) \cdot R_E \cdot K_H \cdot g \cdot \cos \theta \right] \frac{d_p}{4 \cdot R_H}$$

Nous remarquons que le frottement pariétal intervient dans le frottement interfacial. Le frottement interfacial est directement proportionnel aux taux de présence d'eau comme nous le voyons aux figures (4.29 et 4.30); ainsi, quand le taux de présence d'eau tend vers zéro, le frottement interfacial tend à s'annuler.

Le frottement interfacial est moins sensible que le frottement pariétal quand on incline la conduite (Fig. 4.31; 4.32), car le frottement interfacial s'effectue au milieu de la conduite (contrairement au frottement pariétal), c'est donc un phénomène local moins sensible à la déviation.

## 5. MODELISATION

### 5.1. présentation générale

Nous présentons dans ce chapitre le modèle " Drift-Flux " et le modèle à deux fluides.

Nous avons élaboré ces modèles pour un écoulement liquide-liquide dispersé permettant de prédéterminer le gradient de pression et le taux de présence de phase.

### 5.2. modèle drift-flux

On prend un modèle à 3 équations qu'on se propose de tester sur nos données expérimentales. Le modèle s'écrit :

$$U_{ES} = R_E \cdot U_E$$

$$U_{HS} = R_H \cdot U_H$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{4 \tau_w}{D} + (\rho_E \cdot R_E + \rho_H \cdot R_H) \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{avec : } R_E + R_H = 1$$

$$G = U_H - U_E$$

Nous prenons comme lois de fermeture :

$$f_W = \frac{2 \tau_w}{\rho_m U_m}$$

données par la loi de CHURCHILL et le glissement comme suit :

$$G = 1,57 \left[ \frac{\sigma g \Delta \rho}{r_E^2} \right]^{1/4}$$

Les figures 5.1; 5.2; 5.3; 5.4; représentent la comparaison des résultats du modèle aux résultats expérimentaux, pour le taux de présence d'eau et le gradient de pression total.

Nous avons testé le modèle sur la conduite de 5 cm et 10 cm ainsi qu'aux différentes inclinaisons.

Les résultats sont très satisfaisants, ce qui confirme qu'on est bien en régime d'écoulement dispersé homogène.

### 5.3. modèle deux fluides

On se propose de tester un modèle à 4 équations sur nos données expérimentales acquises au laboratoire.

$$U_{ES} = R_E \cdot U_E$$

$$U_{HS} = R_H \cdot U_H$$

$$\left[ - \frac{d p}{d x} \right] R_E = \frac{4 \tau_w}{D} - \frac{P_I \tau_I}{A} + \rho_E \cdot R_E g \cdot \cos(\theta)$$

$$\left[ - \frac{d p}{d x} \right] R_H = \frac{P_I \tau_I}{A} + \rho_H \cdot R_H g \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{avec : } R_E + R_H = 1$$

$$f_W = \frac{2 \tau_w}{\rho_m U_m}$$

Pour fermer le terme de frottement interfacial, on introduit le coefficient de frottement interfacial  $f_I$  en utilisant comme échelle de vitesse le contraste de vitesse entre l'eau et l'huile.

$$f_I = \frac{2 \tau_I}{\rho_E G^2}$$

En écoulement dispersé homogène, ISHII et ZUBER proposent de modéliser  $f_I$  par une relation de régime visqueux

$$f_I = \frac{24}{R_{EI}} \quad \text{avec : } R_{EI} = \frac{G \cdot d}{\nu_H}$$

Par ailleurs, comme nous l'avons démontré dans les chapitres précédents, nous avons :

$$\frac{P_I}{A} = \frac{4 R_H}{d}$$

Dans notre cas, on a pris un diamètre de gouttes moyen de 6 mm pour une population monogoutte. On peut aussi calculer empiriquement le diamètre des gouttes par le Weber critique comme nous l'avons expliqué précédemment.

Nous noterons qu'en éliminant le gradient de pression entre les deux équations d conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\frac{4 \tau_w}{R_E \cdot D} - \left[ \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_H} \right] \frac{P_I \tau_I}{A} + \Delta \rho g \cdot \cos(\theta)$$

En éliminant le terme de frottement pariétal, nous aurons :

$$\frac{P_I \tau_I}{A} = R_E \cdot R_H \Delta \rho g \cos(\theta)$$

d'où :

$$f_I G^2 = \frac{1}{2} R_E g d \frac{\Delta \rho}{\rho_E} \cos(\theta)$$

$$\text{avec : } f_I = \frac{24}{R_{EI}}$$



et d constant, on obtient :

$$G = \frac{1}{48v} \frac{\Delta\rho}{\rho} g d^2 \cos(\theta)$$

Cette formulation nous donne de bons résultats pour la conduite de 10 cm, ainsi que pour les faibles débits dans la conduite de 5 cm. Ceci s'explique parcequ'aux forts débits d'huile, il y a formation d'essaims de gouttes, le diamètre de ces essaims étant grand, de l'ordre du diamètre de la conduite.

Dans ce cas, on prend :

$$G = \frac{\sqrt{g D \frac{\Delta\rho}{\rho}}}{R_E}$$

et alors :

$$f_I = \frac{1}{2} R_E^3$$

Les figures 5.5; 5.6; 5.7; 5.8; représentent la comparaison des résultats obtenus par le modèle et les résultats expérimentaux.

#### 5.4. test des modèles

Nous avons testé ces deux modèles sur notre banque de données expérimentale, soit sur 300 points expérimentaux.

l'intérêt de ces modèles est de pouvoir accéder aux grandeurs du gradient de pression et du taux de présence de phase.

Les figures 5.1; 5.2; 5.5; 5.6; représentent la comparaison entre le taux de présence de phase calculé par le modèle , et le taux de présence de phase expérimental, tandis que les figures 5.3; 5.4; 5.7; 5.8; le gradient de pression calculé par le modèle en fonction du gradient de pression expérimental.

Nous voyons que ces modèles reflètent assez bien les résultats expérimentaux du taux de présence de phase. Le gradient de pression est aussi bien représenté pour les inclinaisons 0°; 2°; 7°; 12°

## 6. CONCLUSION

Les principaux résultats obtenus :

Dans l'étude théorique, la formulation des coefficients de frottement pariétal et interfacial, les équations générales, la viscosité diphasique ont été développés.

Une partie expérimentale assez importante qui présente l'originalité d'avoir été réalisée dans les conditions proches des conditions pétrolières industrielles. Les nombreux résultats expérimentaux acquis, ont permis la création d'une banque de données très importante pour la modélisation, la compréhension et l'interprétation de certains phénomènes physiques présents dans l'écoulement liquide-liquide, et non en gaz-liquide.

La formulation d'un modèle "drift flux", et d'un modèle "deux fluides" est proposée. Ces modèles permettent de prédéterminer le gradient de pression et le taux de présence de phases. Ces modèles en les incluant dans un programme de calcul des conduites permettent de contribuer à dimensionner les installations de transport pétrolier diphasiques.

A partir des résultats théoriques et expérimentaux, nous avons développé deux modèles pour prédéterminer le taux de présence de phase, et le gradient de pression. Ces modèles vérifient très bien nos résultats expérimentaux, et sont un bon code de calcul pour les industriels. Ainsi pour ces deux modèles, nous avons défini des grandeurs de références adéquates aux écoulements liquide-liquide.

Nous avons développé une partie théorique sur les écoulements diphasiques gaz-liquide, où des lois de conservation de masse et de quantité de mouvement sont établies, ainsi que des lois de fermeture ( KETTAB et al 1990 Part. II )

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BARNEA D. - 1987 - "A unified model for predicting flow-pattern transitions for the whole range of pipe inclination" Int. J. Multiphase Flow, Vol. 13, N° 1, pp. 1-12
- BRINKMAN H. C. - 1947 - " A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles " Appl. Sci. Res., Vol. A, pp. 27
- CHENAIS P.; A. KETTAB; L. MASBERNAT - 1988 -" Upward oil water flows in vertical or slightly inclined pipes " EUROMECH 234. Turbulent two phase flow systems. May
- COMOLET R. - 1979 - "Sur le mouvement d'une bulle de gaz dans un liquide" La houille blanche, N° 1
- DUKLER A.E., MARON D.M., BRAUNER N. - 1985 - "A physical model for predicting the minimum stable slug length" , 40, pp.1379-1385

- EILERS. M. - 1941 - "The viscosity of emulsions of high viscosity material as function of concentration" *Kolloid*, 2; 97; 313
- EINSTEIN A. - 1906 - *Annals. Phys.* Vol. 19, pp.289
- FRECHOU D. - 1986 - " Etude de l'écoulement vertical ascendant à trois fluides en conduites verticale" Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse - Institut de Mécanique des Fluides .
- FRECHOU D., RAMIO J., FABRE J. - 1985 - " Etude expérimentale des écoulements gazeux ascendants à 3 phases" Actes du 7<sup>eme</sup> congrès de mécanique de Bordeaux.
- GUTH E. et R. SIMHA - 1936 - *Kolloidzeitschrift*, Vol. 74, pp.266
- HARMATY T.Z.- 1960 - " Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extend " *AIChE Journal* , 6 , 281 .
- HATSCHEK E.- 1911 - *Kolloidzeitschrift*, Vol. 8, pp. 34
- ISHII M. - 1975 - "Thermo-fluid dynamic theory of two phase flows" Ed. EYROLLES.
- KETTAB A. ; L. LINE; L. MASBERNAT - 1989b - " Modèles d'écoulements eau-huile en conduites verticales ou faiblement déviées". Actes du 2<sup>eme</sup> Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur ( C.M.M.N.I.2.); pp. 169-179.; Rabat-MAROC
- KETTAB A., LINE, A., MASBERNAT, L.-1990-"Ecoulements diphasiques en conduites verticales " Part. II : "Modélisations en écoulements gaz-liquide en conduites verticales et légèrement déviées." A paraître *JOURNAL. OF TECHNOLOGY*
- KETTAB A., LINE, A., MASBERNAT, L.-1990-"Modélisations du frottement interfacial et pariétal en écoulement liquide-liquide." A soumettre au *JOURNAL DE L' I.F.P.*
- KETTAB A.; L. LINE; L. MASBERNAT - 1989 a-" Ecoulements eau-huile en conduites verticales ou faiblement déviées " *R.I. N° 415; I.M.F.T.* septembre.
- LEVITON A. et A. LEIGHTON - 1936 - *J. Phys. Chem.*, Vol. 40 ; PP. 71.
- LINE A., MASBERNAT L. - 1985 - "Ecoulement intermittent de gaz et de liquide en conduite verticale" *Revue de l'Institut Français de Pétrole*, Vol. 40, N° 3, pp. 323-328
- RICHARSON E. G. - 1953 - *Kolloidzeitschrift*, Vol. 5 ; pp. 404 (1950) et Vol. 8 ; pp. 367 (1953)
- TAYLOR G. I. - 1934 - *Proc. Roy. Soc. ( London )*, Vol. A 146; pp. 501
- TAYLOR. G. I. - 1932 - " The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion " *Pro. Roy. Soc. London.* A135, N° 828; pp.685-706
- THOMAS D. G.- 1967 - " Transport characteristics of suspensions of uniform spherical



particals " J. Colloid. Sci., Vol. 20, pp. 267

WALLIS G.B.- 1969 - " One dimensional two-phase flow " Mac Graw Hill Book CO. ,  
NEW YORK .

## NOMENCLATURE

A	: Aire interfaciale section de la conduite	
$a_h$	: Aire interfaciale d'une goutte	
Dc	: Diamètre de la conduite	
Di	: Diamètre interfacial moyen	
dg	: Diamètre des gouttes	
g	: Accélération de la pesanteur	
G	: Glissement	
Pi	: Périmètre interfacial	
Qe,Qh,Qt	: Débit volumique d'eau, d'huile, total	
RE,Rh	: Taux de présence d'eau, d'huile	
Ue,Uh	: Vitesses débitantes phasiques d'eau, d'huile	
Wc	: Taux d'injection d'eau	
$\theta$	: Angle de déviation de la conduite	
$\rho_e;\rho_h;\rho_m$	: Masse volumique d'eau, d'huile, moyenne	
$\sigma_{\text{huile-air}}$	: Tension superficielle entre l'eau et l'huile	
$\sigma_{\text{huile-eau}}$	: Tension superficielle entre l'huile et l'air	
$\tau_{e,\text{paroi}}$	: Frottement de la phase continue sur la paroi	
$\tau_i$	: Frottement interfacial	
Cf,p	: coefficient de frottement pariétal	
Cf,i	: coefficient de frottement interfacial	
	Dc=5cm	dc=10cm
● $U_H$	0,06	0,02
○ $U_H$	0,12	0,04
■ $U_H$	0,24	0,07
□ $U_H$	0,47	0,14
▲ $U_H$	0,71	0,21
△ $U_H$	0,95	0,28

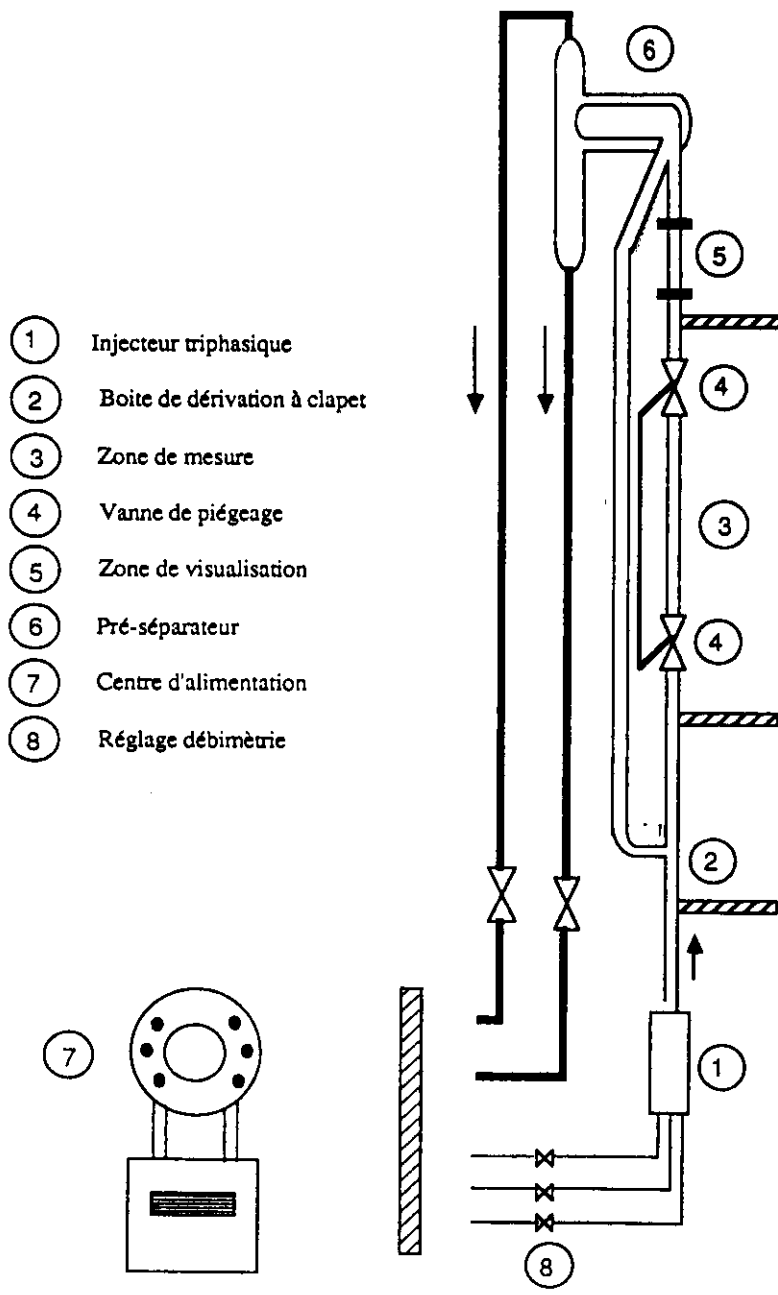


Figure 1 : Boucle diphasique liquide-liquide I.M.F.T.

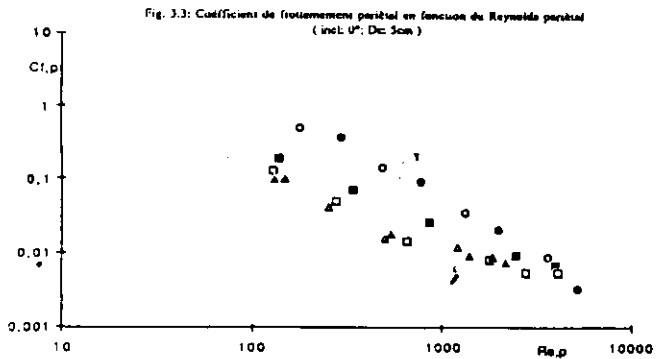
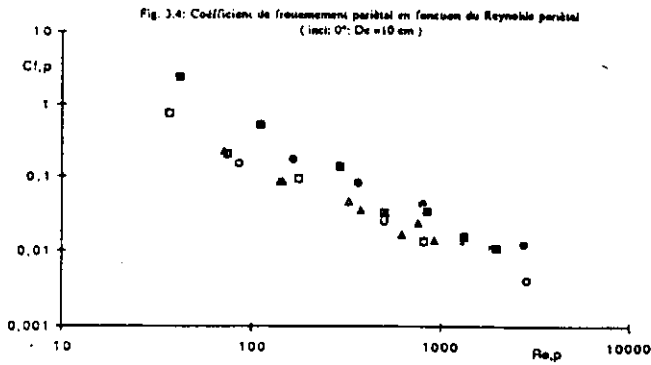
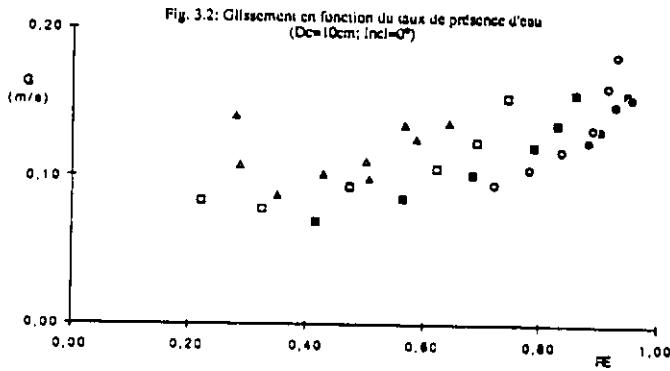
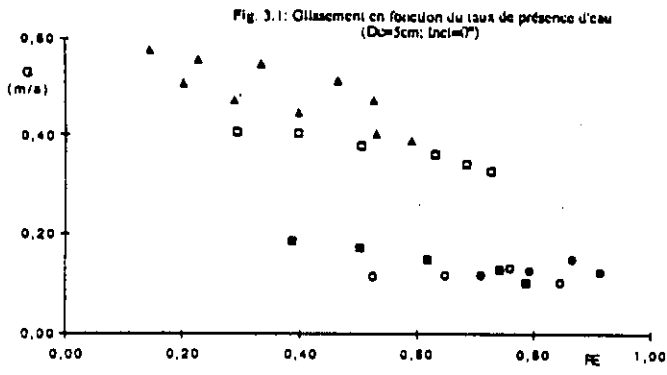




Fig. 3.5: Coefficient de frottement partiel en fonction du Reynolds partiel  
(incl: 12°; De = 3cm)

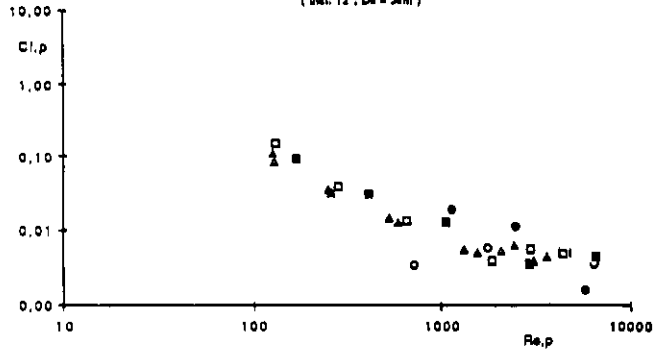


Fig. 3.6: Coefficient de frottement partiel en fonction du Reynolds partiel  
(incl: 12°; De = 10 cm)

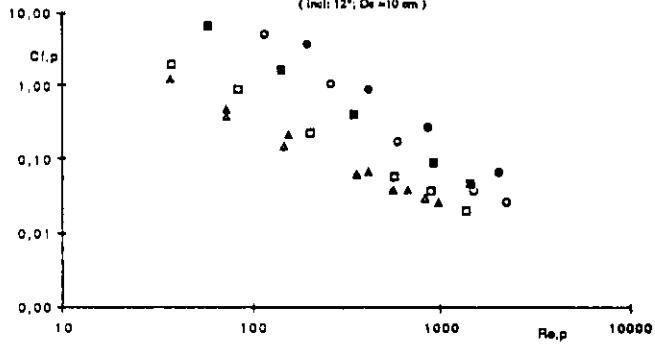


Fig. 3.7: Coefficient de frottement interfacial en fonction du Reynolds interfacial  
(incl: 0°; De = 10 cm)

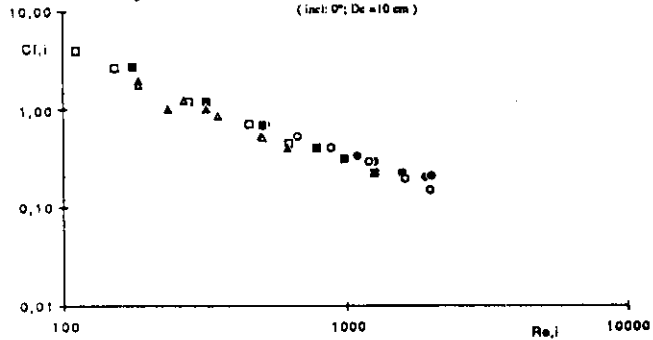


Fig. 3.8: Coefficient de frottement interfacial en fonction du Reynolds interfacial  
(incl: 12°; De = 10 cm)

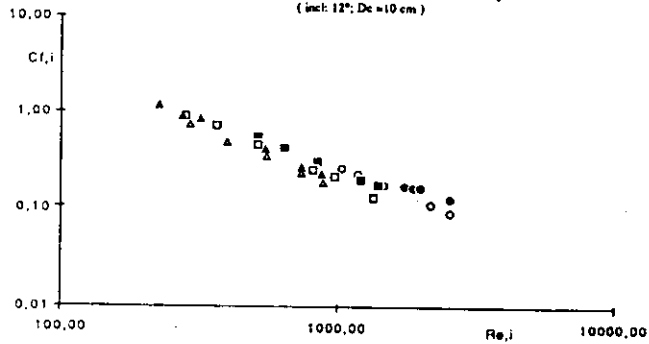


Fig. 4.1 : Vitesses superficielles de l'eau en fonction des vitesses totales (Dc=5cm)

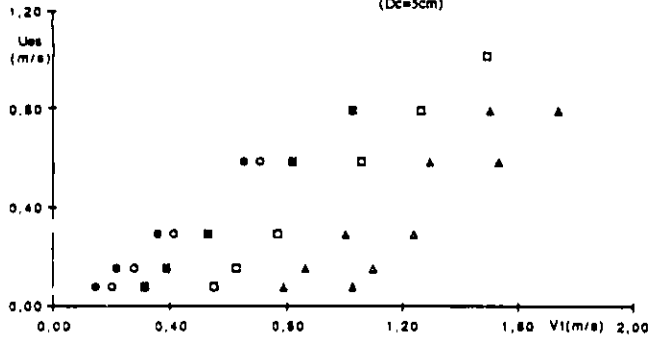


Fig. 4.2 : Vitesses superficielles de l'eau en fonction des vitesses totales (Dc=10cm)

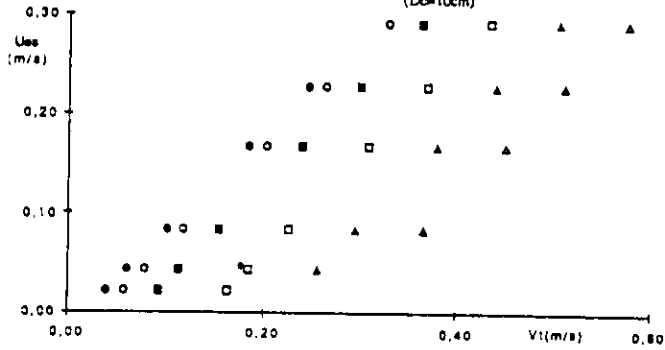


Fig. 4.3 : Vitesses superficielles de l'huile en fonction des vitesses totales (Dc=5cm)

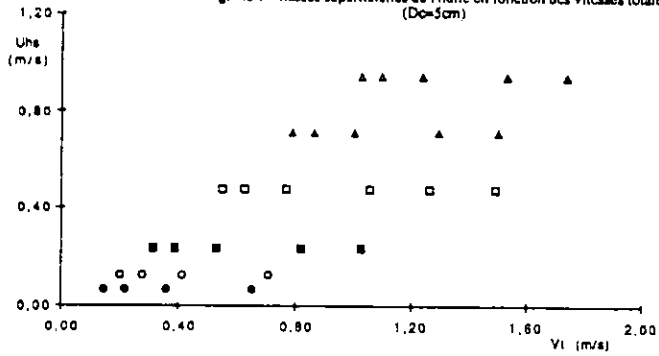
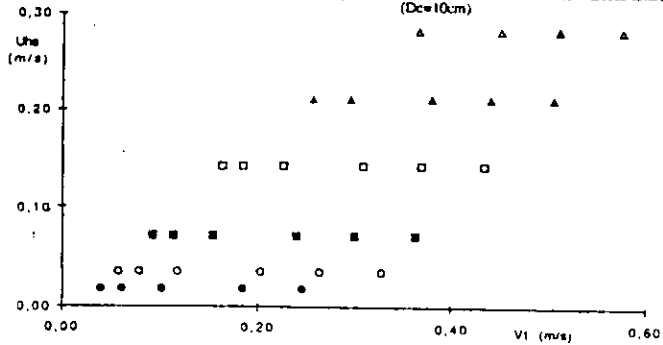


Fig. 4.4 : Vitesses superficielles de l'huile en fonction des vitesses totales (Dc=10cm)



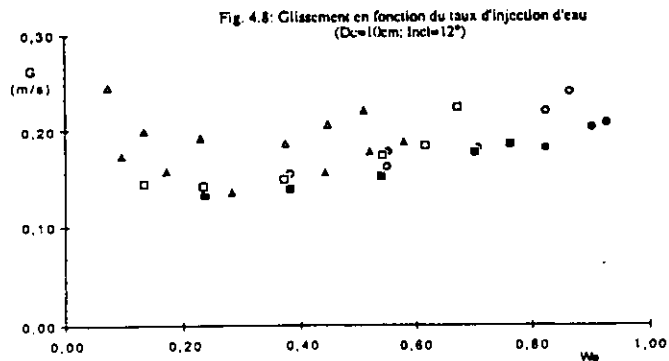
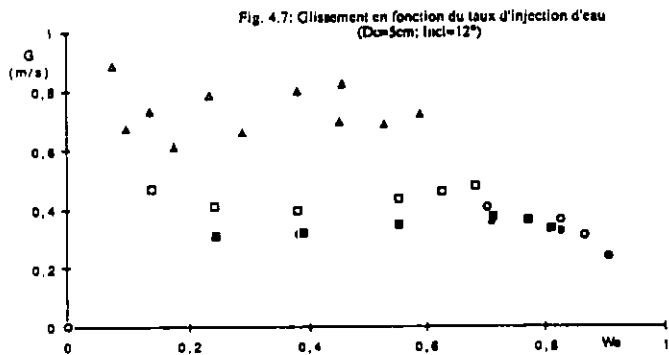
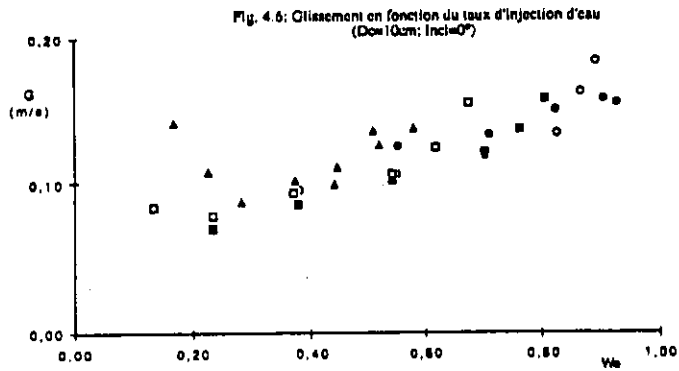
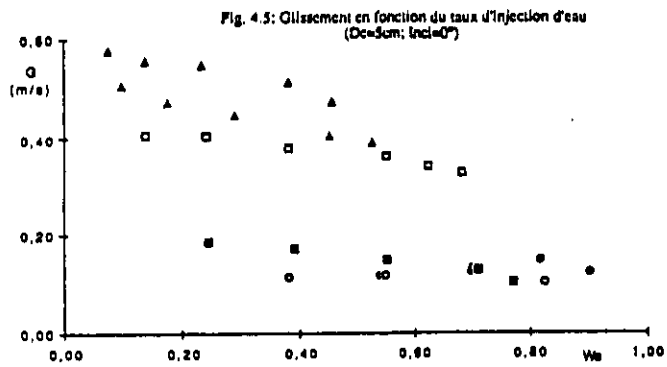


Fig. 4.9: Débit total en fonction du taux de présence d'huile  
( $D_c=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

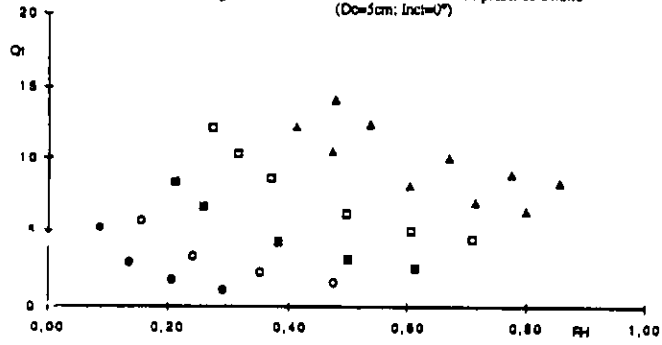


Fig. 4.10: Débit total en fonction du taux de présence d'huile  
( $D_c=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

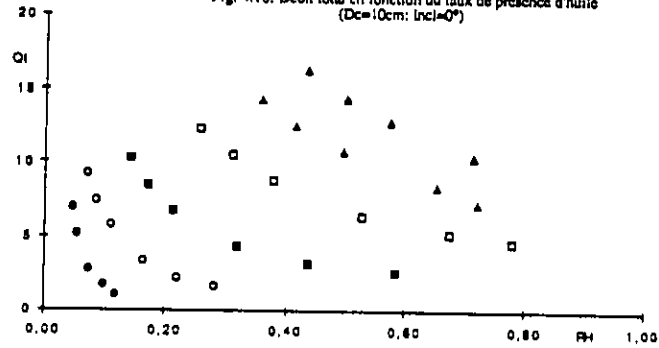


Fig. 4.11: Taux d'injection d'eau en fonction du taux de présence d'eau  
( $D_c=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

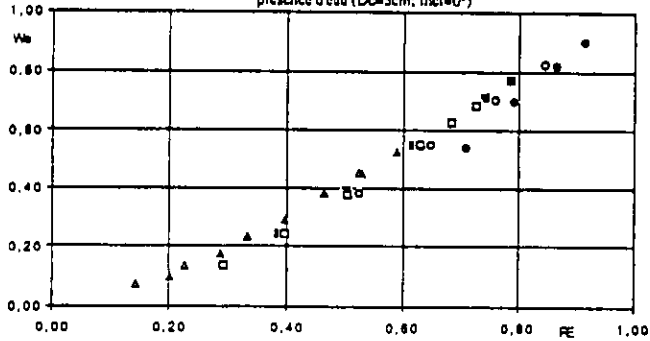


Fig. 4.12: Taux d'injection d'eau en fonction du taux de présence d'eau  
( $D_c=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

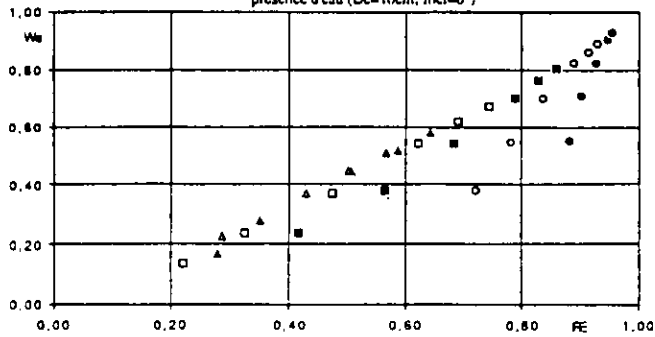




Fig. 4.13: Taux d'injection d'eau en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=12^\circ$ )

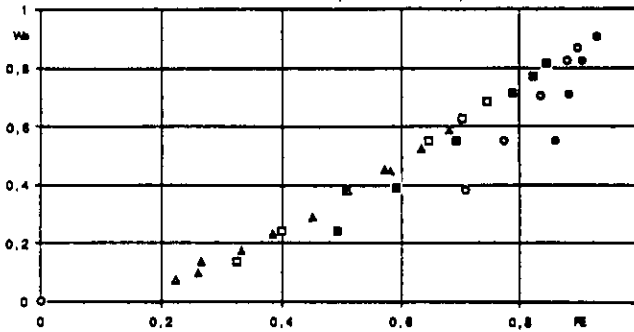


Fig. 4.14: Taux d'injection d'eau en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=12^\circ$ )

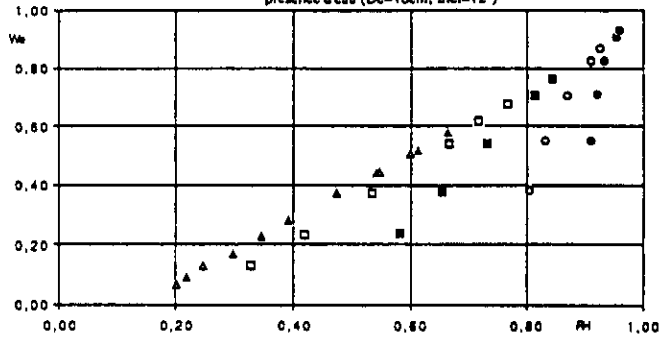


Fig. 4.15: Vitesses superficielles de l'eau en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

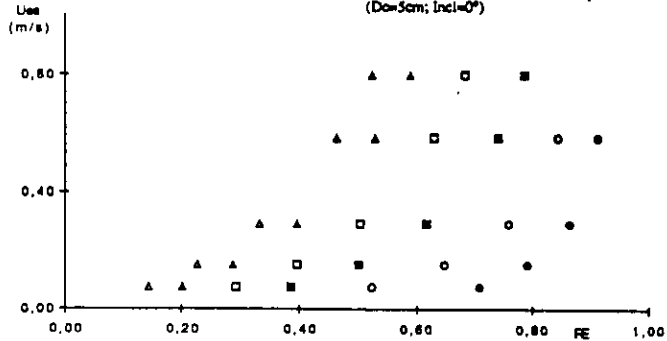
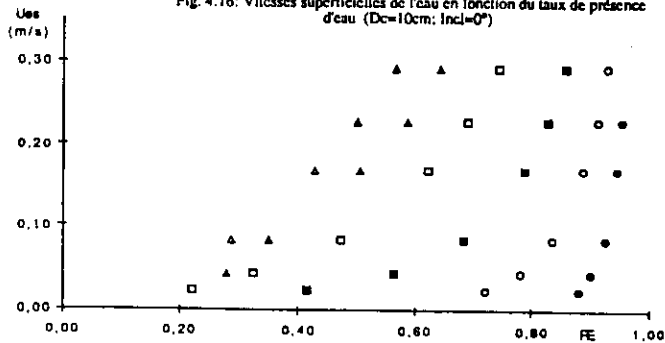


Fig. 4.16: Vitesses superficielles de l'eau en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )



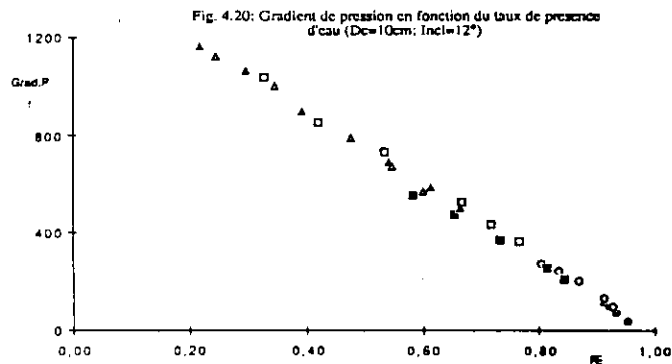
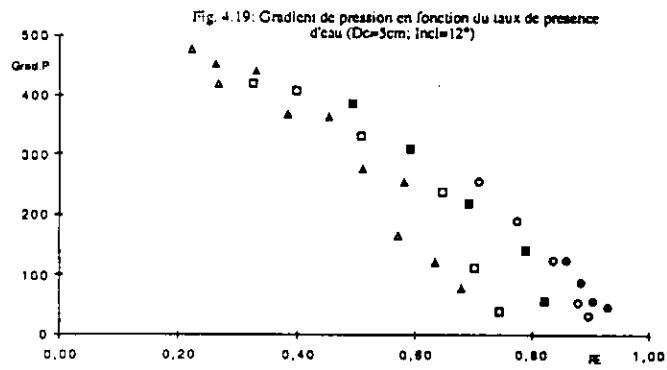
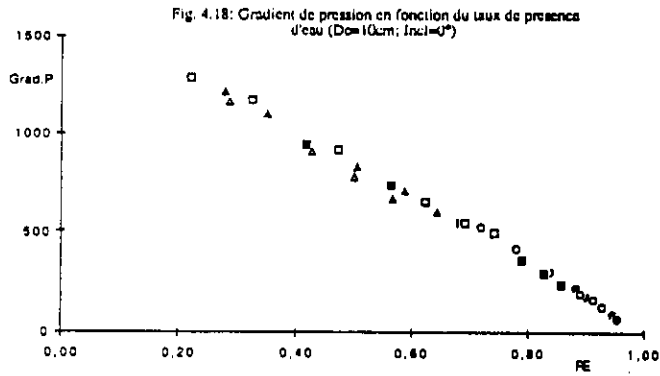
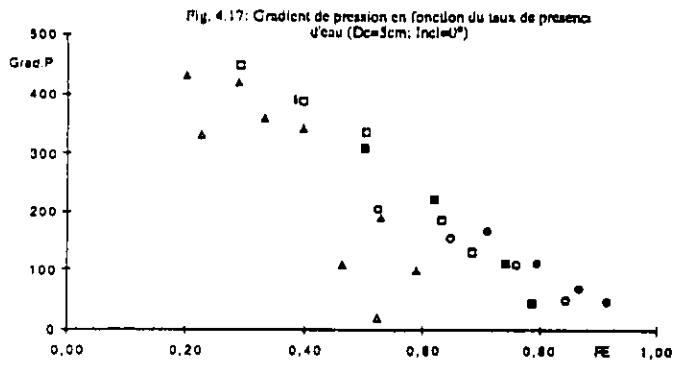


Fig. 4.21: Frottement pariétal en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=5cm$ ;  $incl=0^\circ$ )

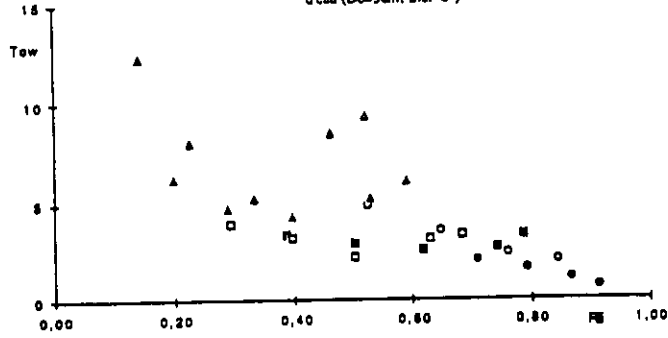


Fig. 4.22: Frottement pariétal en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=10cm$ ;  $incl=0^\circ$ )

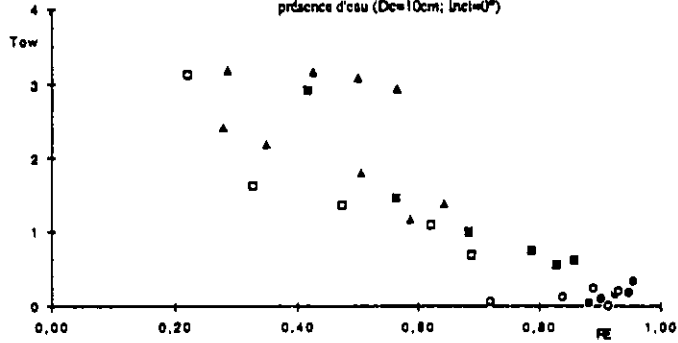


Fig. 4.23: Frottement pariétal en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=5cm$ ;  $incl=12^\circ$ )

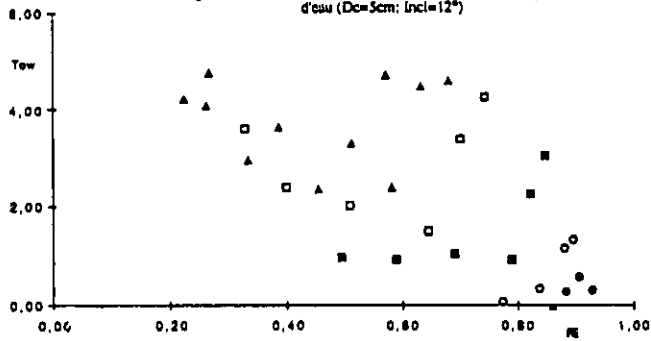
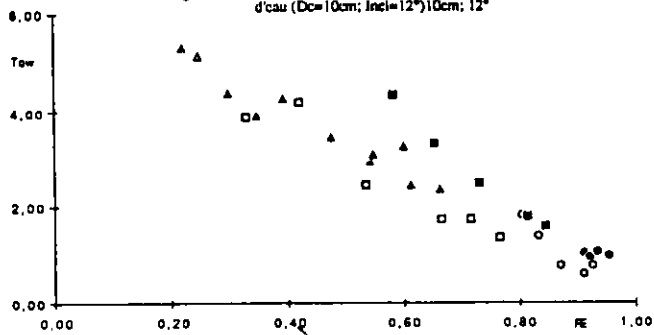


Fig. 4.24: Frottement pariétal en fonction du taux de présence d'eau ( $D_c=10cm$ ;  $incl=12^\circ$ )



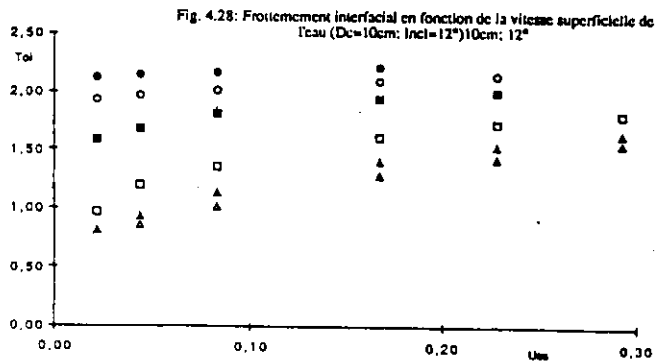
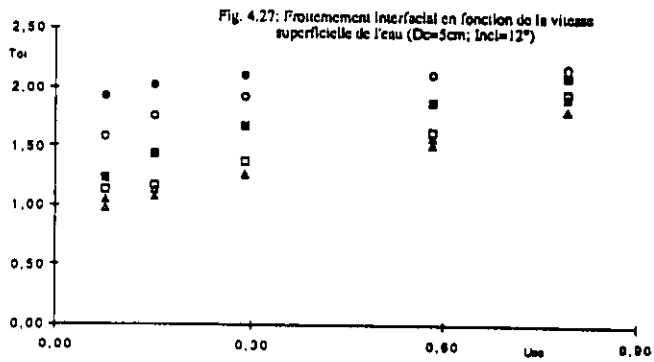
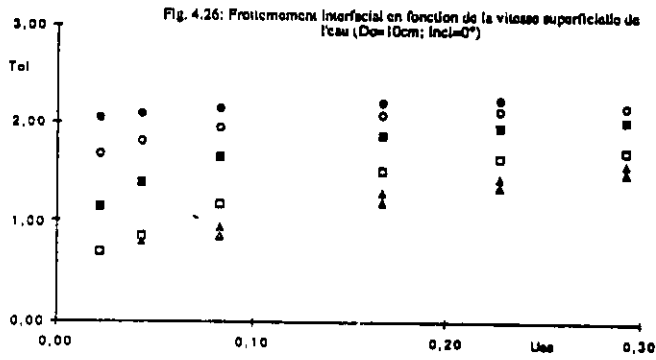
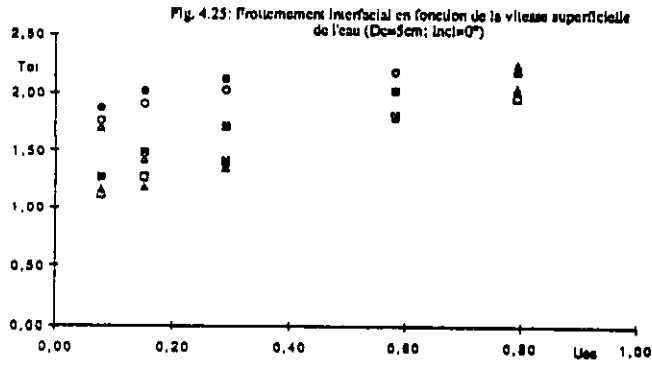




Fig. 4.29: Frottement interfacial en fonction du taux de présence d'eau ( $D_0=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

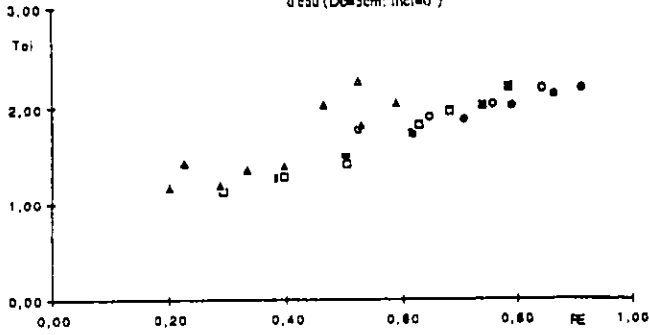


Fig. 4.30: Frottement interfacial en fonction du taux de présence d'eau ( $D_0=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=0^\circ$ )

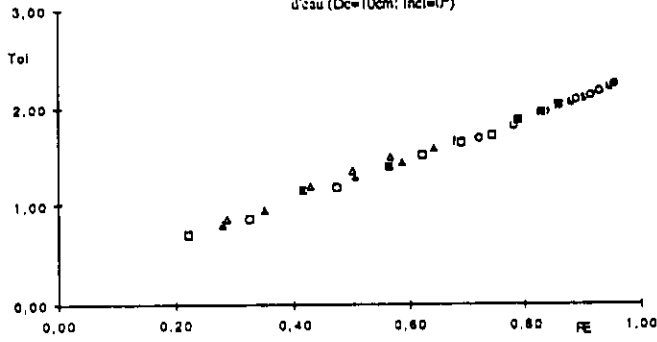


Fig. 4.31: Frottement interfacial en fonction du taux de présence d'eau ( $D_0=5\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=12^\circ$ )

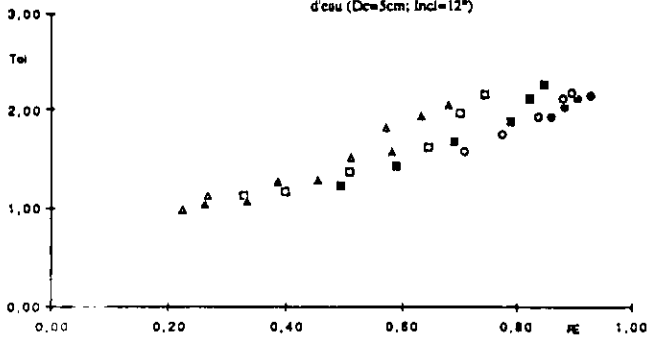


Fig. 4.32: Frottement interfacial en fonction du taux de présence d'eau ( $D_0=10\text{cm}$ ;  $\text{Incl}=12^\circ$ )

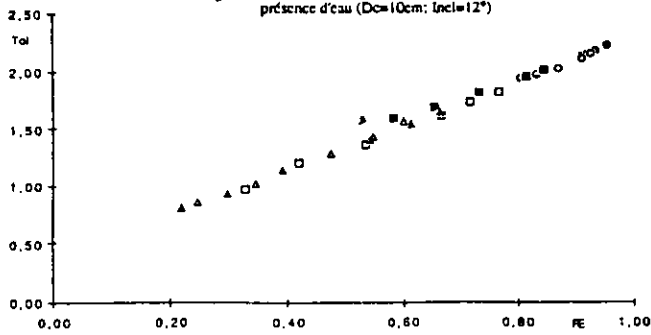


Fig. 5.1a : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
( modèle à drift flux )  
D=53mm  $\theta=0^\circ$

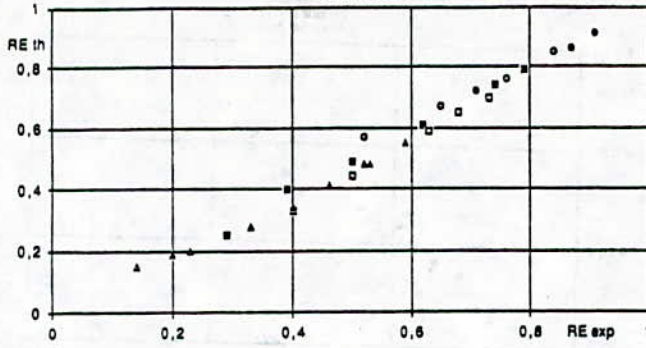


Fig. 5.1b : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
( modèle à drift flux )  
D=100mm  $\theta=0^\circ$

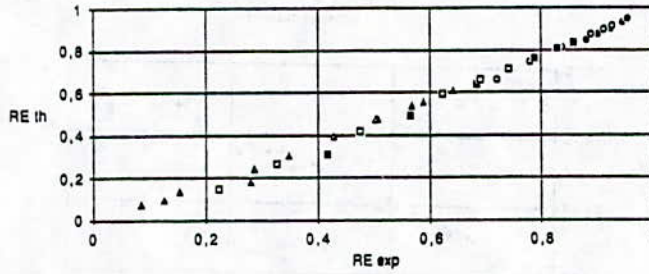


Fig. 5.2a : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
( modèle à drift flux )  
D=53mm  $\theta=12^\circ$

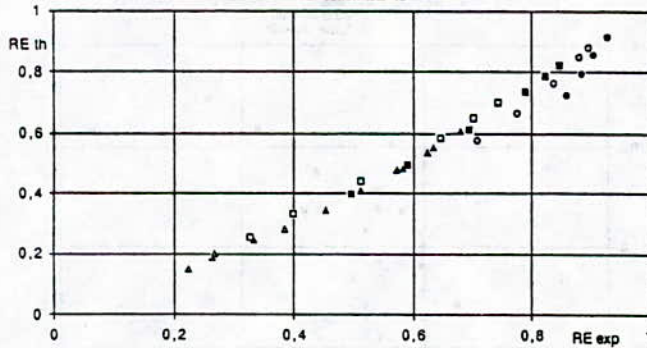


Fig. 5.2b : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
( modèle à drift flux )  
D=100mm  $\theta=0^\circ$

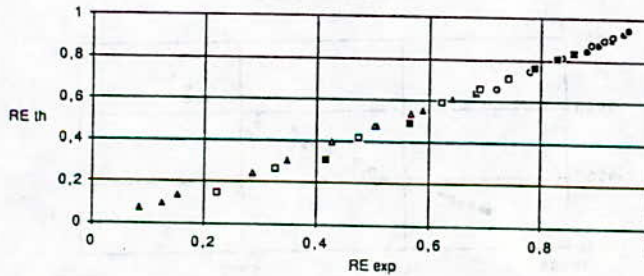


Fig. 5.03a : Comparaison  $dP/dx$  expérimental et théorique (modèle à drift flux)  $D=53\text{mm}$   $\theta=0^\circ$

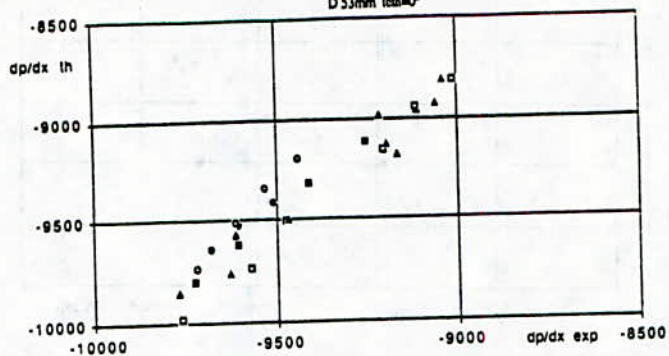


Fig. 5.3b : Comparaison  $dP/dx$  expérimental et théorique (modèle à drift flux)  $D=100\text{mm}$   $\theta=0^\circ$

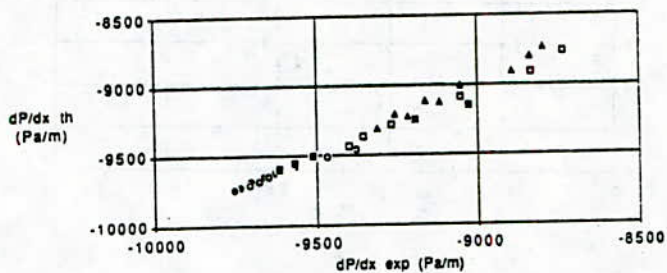


Fig. 5.04a : Comparaison  $dP/dx$  expérimental et théorique (modèle à drift flux)  $D=53\text{mm}$   $\theta=12^\circ$

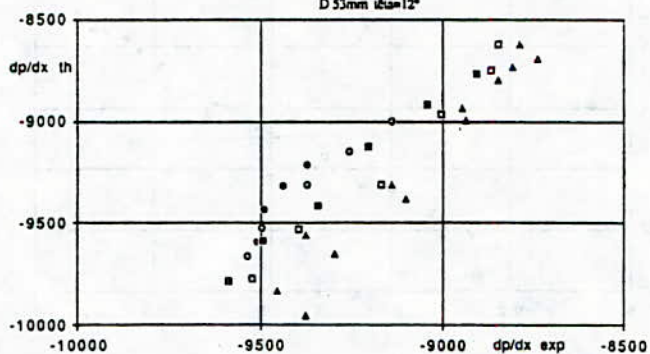


Fig. 5.4b : Comparaison  $dP/dx$  expérimental et théorique (modèle à drift flux)  $D=100\text{mm}$   $\theta=0^\circ$

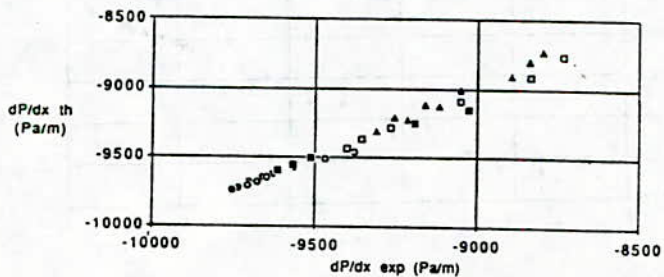


Fig. 5.05a : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
(modèle deux fluides)  
D=53mm  $\theta=0^\circ$

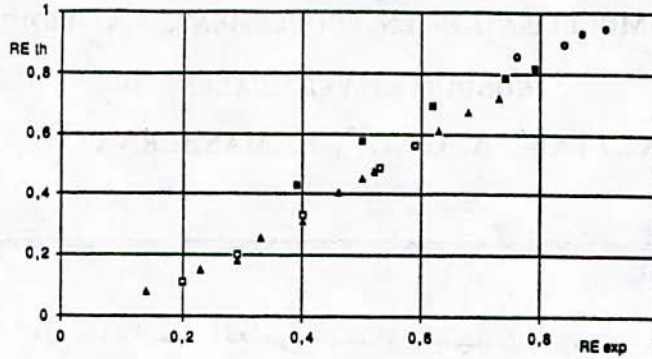


Fig. 5.06a : Comparaison fraction d'eau RE expérimental et théorique  
(modèle deux fluides)  
D=53mm  $\theta=12^\circ$

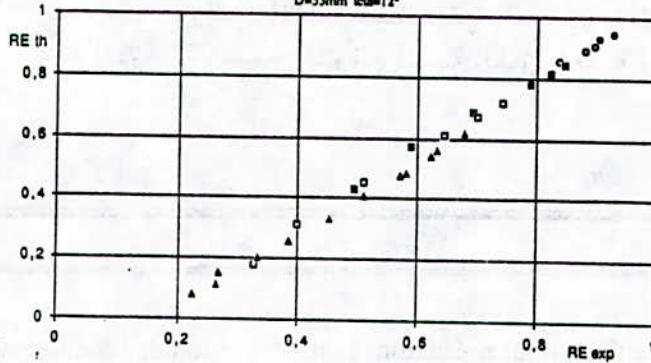


Fig. 5.07a : Comparaison  $dp/dx$  expérimental et théorique  
(modèle deux fluides)  
D=53mm  $\theta=0^\circ$

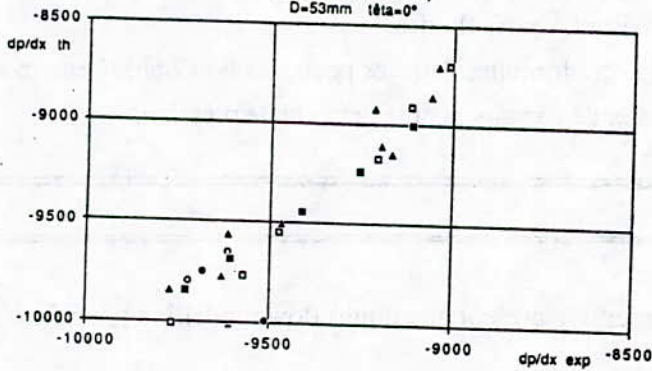
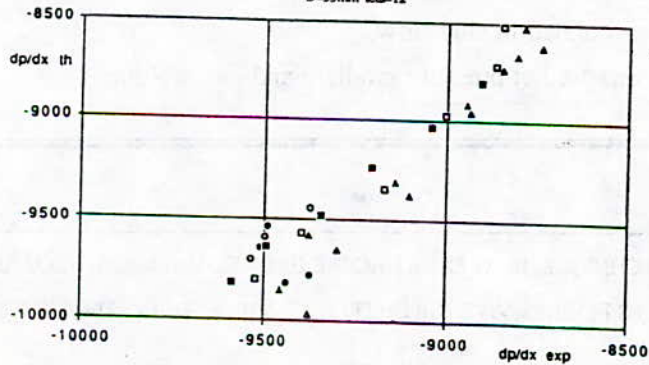


Fig. 5.08a : Comparaison  $dp/dx$  expérimental et théorique  
(modèle deux fluides)  
D=53mm  $\theta=12^\circ$





# ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES EN CONDUITES VERTICALES

## PART. II : MODÉLISATION EN ÉCOULEMENTS GAZ-LIQUIDE EN

### CONDUITES VERTICALES

A. KETTAB\*, A. LINE\*\*, L. MASBERNAT\*\*

ملخص : فى هذا المقال العلمى ، نتناول بالبحث نموذجية إنسياب « غاز- سائل »  
( الجيوب و السدادات فى أنابيب عمودية )  
قوانين الحفظ لخلية متوسطة طبقت للمعادلات الأساسية لحركية  
السوائل . قوانين الفلق صيغت فى الجيوب و السدادات .  
هذه الدراسة تسمح بتوقع نسبة الغاز العامة و كذلك تدرج الضغط .

**Résumé :** Dans cet article, nous présentons la modélisation de l'écoulement gaz-liquide ( poches et bouchons en conduites verticales ).

Les lois de conservation pour une cellule moyenne sont appliquées aux équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Des lois de fermetures sont formulés dans les poches et bouchons. Cette modélisation permet de prédire le taux de gaz global et le gradient de pression.

**Abstract :** In this paper, we present gas-liquid flow modelling (slug flow in vertical pipes).

The conservation laws for the average cell are applied to fundamental equations of fluid mechanics.

The closing laws are formulated in slug flow.

This modelling permits to predict pressure gradient and gas- holdup.

\* ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE, 10 AVENUE HACENE-BADI EL-HARRACH 16000 ALGER

\*\* INSTITUT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES, AVENUE DU PROF. CAMILLE SOULA 31400 TOULOUSE

## 2. MODELISATIONS EN ECOULEMENTS DIPHASIQUES

### 2.1- INTRODUCTION

Les écoulements diphasiques gaz-liquide sont très importants pour le Génie-chimique, Génie-nucléaire et production pétrolière. Pour la production pétrolière en mer, on recueille en surface, la production du gisement, on fait la séparation et recompression des phase liquide et gazeuses. Chacune de ces phases est transportée par une conduite. Une solution économique serait d'avoir une conduite unique pour le transport, mais cela présente des risques (fluctuations de pression ; blocage conduite par ségrégation dans les points bas,...). Actuellement, il n'y a pas de théorie pour prévoir ces phénomènes ainsi que la perte de pression, ce qui entraîne une diminution de la production .

Etant donné que les modèles empiriques existants sont insuffisants , on doit faire des études à caractères théoriques, ce qui nécessite une expérimentation très fine et des mesures bien définies. Ces théories ont comme base les écoulements monophasiques et font intervenir les notions propres aux écoulements à deux phases, telle que l'interface qui les sépare. La géométrie de cette interface permet de distinguer différents types de régimes d'écoulements que nous définissons ci-dessous.

### 2.2- DEFINITIONS

#### 2.2.1. Ecoulement intermittent

c'est le régime où les deux phases gaz et liquide sont distribuées alternativement en configuration à phases séparées .

#### 2.2.2. Zone à phase dispersée

appelée " Bouchon ", est une portion de l'écoulement où la phase liquide est continue, le gaz étant dispersé sous forme de bulles .

#### 2.2.3. Zone à phase séparée

C'est une zone de l'écoulement, où le gaz constitue une longue bulle (bulle de Taylor), appelée " Poche ". Le liquide étant réparti à la paroi sous forme de film liquide contenant éventuellement des bulles.

Plusieurs types de configurations peuvent se présenter, lorsque deux phases gaz-liquide s'écoulent dans une conduite, et les différents auteurs retiennent actuellement 4 régimes d'écoulements:

à bulles;

à poches et à bouchons;

annulaire;

transition entre l'intermittent et l'annulaire.

Ainsi certains auteurs, tels que DUKLER, GOVIER et ROS proposent des cartes d'écoulements en fonction des vitesses superficielles du gaz et du liquide ( $U_G$  et  $U_L$ ), afin de déterminer le régime d'écoulement. Il est évident que ces cartes d'écoulement sont différentes d'un auteur à un autre et ce en raison de plusieurs paramètres:



. Subjectivité de chaque expérimentateur dans l'observation et la qualification de chaque régime;

. Dans les conditions d'écoulement et d'expérimentation de chaque auteur , la corrélation n'est pas évidente;

. La détermination de ces cartes ne tient compte que des vitesses superficielles du gaz et du liquide.

“ Nous schématisons ci-dessous différents types de régimes d'écoulements (Fig.1)

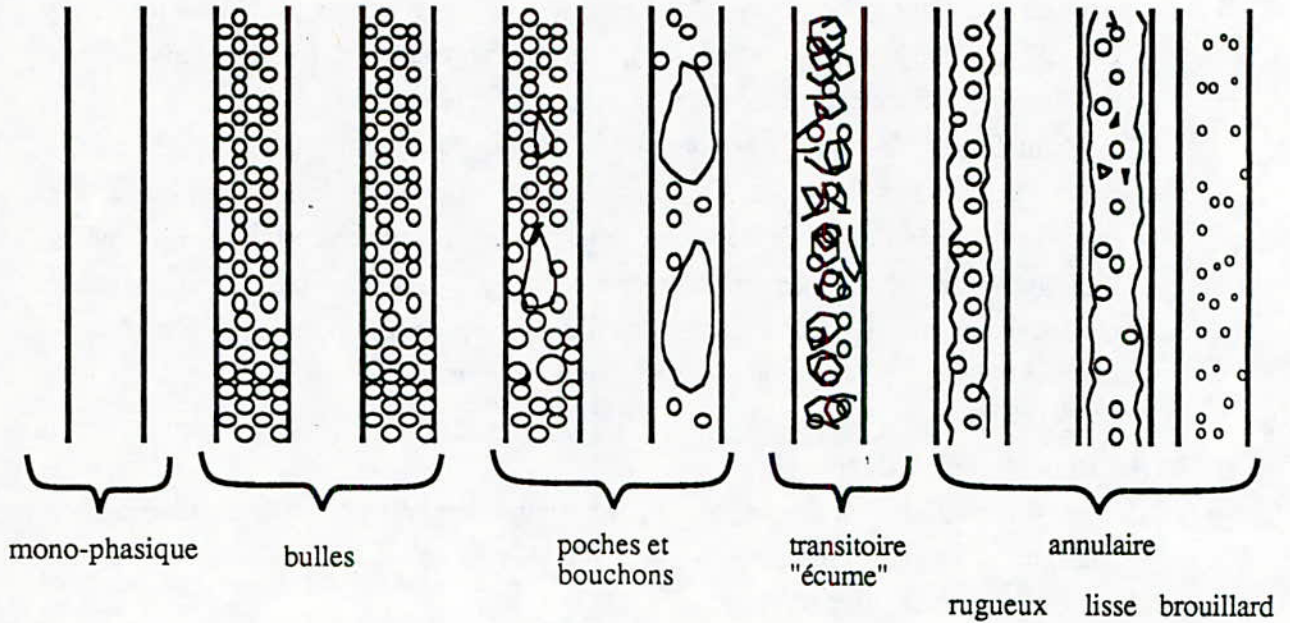


Fig. 1: Régimes d'écoulements

### 2.3- CRITERE DE TRANSITION

En fonction des instruments de mesures expérimentales, des critères de transition ont été définies par certains auteurs. Ainsi certains parlent de coalescence, d'autres des groupes adimensionnels. Nous voyons ci-dessous quelques critères de transition:

3.1.- GOVIER et AZIZ ( 1972 ) :

Bulle ==> Poche

Phénomène de coalescence .

Poche ==> Ecume

Instabilité du film .

$$Y = \left[ \frac{\rho_L \sigma_{wA}}{\rho_w \sigma} \right]^{1/4}$$

$$X = \left[ \frac{\rho_G}{\rho_A} \right]^{1/3} * Y$$

L et G relatives aux liquides et aux gaz .

W et A relatives à l'eau et à l'air .

Bulles / Poches	:	$Y.U_L = 0,01.(1,96.X.U_G)^{5,81}$	
Poches / Ecumes	:	$Y.U_L = 0,263.(X.U_G - 8,61)$	si $Y.U_L < 4$
Ecume / Annulaire	:	$Y.U_L = 0,01.(X.U_G / 70)^{-5,81}$	si $Y.U_L < 4$
Poche / Annulaire	:	$X.U_G = 26,5$	si $Y.U_L > 4$

### 3.2.- ROS (1961):

Il introduit d'autres groupes adimensionnels :

. nombre de vitesse liquide :  $N = U_L (\rho / g\sigma_L)^{1/4}$

. nombre de vitesse gaz :  $RN = U_G (\rho / g\sigma_L)^{1/4}$

. nombre de diamètre :  $N_d = D (\rho_L g / \sigma)^{1/2}$

- bulle / poche :  $RN < L1 + L2.N$

- poche / écume :  $RN < 50 + 36 N$

- écume / annulaire :  $RN > 75 + 84 N^{0,75}$

L1 et L2 sont déterminés à partir d'abaques en fonction de  $N_d$ .

### 3.3.- GRIFFITH et WALLIS (1961):

Ils utilisent des nombres adimensionnels :  $N Fr_m = \left[ \frac{Q_G + Q_L}{A} \right]^2 / gD$   
 $\frac{Q_G}{Q_G + Q_L}$

La transition bulle-bouchon étant définie par :

$$\frac{Q_G}{Q_G + Q_L} < L \quad \text{avec } L > 0,13$$

$$\text{et } L = 1,071 - \frac{0,2218}{D} \left[ \frac{Q_G + Q_L}{A} \right]^2$$

### 3.4.- TAITEL - BORNEA et DUKLER (1958):

Deux zones d'écoulements à bulles sont déterminées :

. Aux faibles débits de liquide : Transition bulle - poche par coalescence avec % de gaz à la transition  $\alpha_T = 25\%$ . Au vu des travaux de HARMATHY (1960), nous avons:

$$U_L = 3 U_G - 1,15 \left[ \frac{g \cdot \Delta\rho \cdot \sigma}{\rho_L^2} \right]^{1/4}$$

. Aux forts débits liquides, la turbulence dans le liquide détruit les zones de bulles :



$$U_L + U_G = 4,0 \left( \frac{D^{0,429} (\sigma / \rho_L)^{0,089}}{V_L^{0,072}} \left[ \frac{g \cdot \Delta p}{\rho_L} \right]^{0,446} \right)$$

Cette transition est valable tant que le taux de gaz reste inférieur au taux de tassement:  $\alpha_T = 52\%$  .

## 2.4- BASES DE LA MODELISATION

La finalité de toutes les méthodes de calculs des écoulements diphasiques en conduite est de déterminer d'abord le taux de gaz  $R_G$  et le gradient de pression  $dP / dx$ . Beaucoup de corrélations ont été développées par certains auteurs . En réalité la structure cellulaire de l'écoulement compromet une telle approche, car l'écoulement est à phase séparée et dispersée. On doit donc introduire des lois spécifiques aux poches et bouchons.

Trois types de moyennes temporelles sont appliqués à une grandeur phasique (phase.K) déjà moyennée dans la section d'abscisse x, soit  $\langle G_K(x,t) \rangle$  une telle grandeur

a) moyenne temporelle  $\overline{G}(x,t)$  :

$$\overline{G}_K = \frac{1}{T} \int_1^{1+T} \langle G_K(x,t') \rangle dt'$$

b) moyenne par configuration  $G_{K\beta}$  :

$$G_{K\beta} = \overline{\langle G_K \chi_\beta(x,t) \rangle}$$

c) moyenne cellulaire :

$$\overline{G}_{K\beta} = \langle G_K(x,t) \delta_\beta(x,t,\theta) \rangle$$

Les équations de base sont obtenues par moyenne cellulaire des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

### 2.4.1. Equations locales de conservation d'une densité massique tensorielle $\psi$

L'équation de la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \psi V + \phi)}{\partial x} = \rho F \quad (1)$$

multiplions (1) par  $\chi_k$  :

$$\chi_k \left( \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} \right) + \chi_k \left( \frac{\partial (\rho \psi V + \varphi)}{\partial x} \right) = \rho F \chi_k \quad (2)$$

avec :

- $\frac{\partial \rho \psi}{\partial t}$  = taux de variation de  $\psi$
- $\rho \psi V$  = flux convectif
- $\varphi$  = flux diffusif
- $\rho F$  = effets extérieurs

de l'équation (2), décomposons les termes du 1<sup>er</sup> membre:

$$* \chi_k \left( \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial (\chi_k \rho \psi)}{\partial t} - \rho \psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \quad (3)$$

$$* \chi_k \frac{\partial (\rho \psi V + \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial (\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} - (\rho \psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} \quad (4)$$

$$\text{Soit : } \frac{\partial (\chi_k \rho \psi)}{\partial t} - \rho \psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} - (\rho \psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} = \rho F \chi_k \quad (5)$$

$$\text{or l'on sait : } \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = - U_I \cdot \text{grad } \chi_k \quad (6)$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial x} = - N_{IK} \delta_I \quad (7)$$

$$\text{grad } \chi_k = - N_K \delta_I \quad (8)$$

L'équation (5) devient:

$$\frac{\partial (\chi_k \rho \psi)}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho F \chi_k + \rho \psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + (\rho \psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} \quad (9)$$

d'après (7), (8) et (9) nous avons:

$$\rho \psi \frac{\partial \chi_k}{\partial t} = \rho \psi (- U_I \cdot \text{grad } \chi_k) = \rho \psi (U_I N_{IK} \delta_I) = \rho \psi U_I N_{IK} \delta_I \quad (10)$$

$$(\rho \psi V + \varphi) \frac{\partial \chi_k}{\partial x} = - (\rho \psi V + \varphi) N_{IK} \delta_I = - \rho \psi V N_{IK} \delta_I - \varphi N_{IK} \delta_I \quad (11)$$

l'équation {9} devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho \psi}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} &= \rho F \chi_k + \rho \psi U_I N_{IK} \delta_I - \rho \psi V N_{IK} \delta_I - \varphi N_{IK} \delta_I \\ &= \rho F \chi_k + (\rho \psi U_I - \rho \psi V - \varphi) N_{IK} \delta_I \\ &= \rho F \chi_k + [\rho \psi (U_I - V) - \varphi] N_{IK} \delta_I \end{aligned} \quad \{12\}$$

posons :  $M_I = \rho (V - U_I)$  {13}

l'équation {12} devient :

$$\frac{\partial (\chi_k \rho \psi)}{\partial t} + \frac{\partial (\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho F \chi_k - [\psi M_I + \varphi] N_{IK} \delta_I \quad \{14\}$$

## 2.4.2. Hypothèses des moyennes

### 2.4.2.1. Moyenne temporelle classique

On effectue les moyennes temporelles sur un temps  $T$ , correspondant au passage de  $N$  cellules. Soit  $\theta_{\beta i}$  la durée de passage à l'abscisse  $x$  de l'événement  $i$  ( $i = 1, N$ ) de la configuration  $\beta$  (Sou D)

$$T = \sum_{i=1}^N (\theta_{si} + \theta_{Di}) \quad ==> \quad T = N \theta_{\beta} \quad \{15\}$$

avec l'opérateur de moyenne d'ensemble défini par :

$$\theta_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_{\beta i} \quad \{16\}$$

alors :  $T = T_S + T_D = N (\theta_S + \theta_D)$  {17}

la fréquence cellulaire de l'écoulement notée  $n_c$  est définie par :

$$n_c = \frac{1}{(\theta_S + \theta_D)} \quad \{18\}$$

on définit la moyenne temporelle sur un intervalle  $T$  beaucoup plus grand que la période cellulaire  $T \gg 1/n_c$

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, t') \cdot dt' \quad \{19\}$$



### 2.4.2.2. Moyenne sur une configuration $\beta$

$$\overline{f}^\beta = \frac{1}{T_\beta} \int_{[T_\beta]} f(x, t') \cdot dt' \quad (20)$$

$[T_\beta]$  est la réunion des intervalles de temps de présence de la configuration  $\beta$  à l'abscisse  $x$ .

Cet opérateur permet de tenir compte du caractère intermittent de l'écoulement, et de définir:

$$\frac{d\rho}{dx}^\beta : \text{gradient de pression moyen dans la configuration } \beta.$$

$$\overline{R}_K^\beta : \text{taux de présence de la phase K, moyen dans la configuration } \beta.$$

$$\text{avec} : \overline{R}_G^S + \overline{R}_L^S = 1 \quad (21)$$

$$\overline{R}_G^D + \overline{R}_L^D = 1 \quad (22)$$

et  $\alpha_\beta$  le taux de présence de la configuration  $\beta$  avec

$$\alpha_S + \alpha_D = 1 \quad (23)$$

### 2.4.2.3. Equation moyenne sur la section A de la conduite

On suppose que le transfert de masse à l'interface est nul donc:

$$V_K = U_I = V_{Kn} \quad ==> \quad M_I = 0 \quad (24)$$

et l'équation {14} devient :

$$\frac{\partial(\chi_k \rho \psi)}{\partial t} + \frac{\partial(\chi_k \rho \psi V + \varphi \chi_k)}{\partial x} = \rho F \chi_k - \varphi N_{IK} \delta_I \quad (25)$$

et si par définition, le taux de présence de la phase K sur la section A s'écrit:

$$\langle R \rangle_K = \frac{1}{A} \int_A \chi_k \delta_A \quad (26)$$

et la moyenne phasique de  $\psi$  notée  $\langle \psi \rangle_K$  s'écrit:

$$\langle R \rangle_K \langle \psi \rangle_K = \frac{1}{A} \int_A \chi_k \psi \delta_A \quad (27)$$

l'équation {25} devient:



$$\frac{\partial(\rho_K \langle R \rangle_K \langle \psi \rangle_K)}{\partial t} + \frac{\partial[\langle R \rangle_K (\rho_K \langle \psi V \rangle_K + \langle \phi \rangle_K) \cdot E]}{\partial x} =$$

$$= \rho_K \langle F \rangle_K \langle R \rangle_K - \frac{1}{A} \int_{JA} \frac{\phi N_{IK} \delta_I}{N_{IK} K_{IK}} - \frac{1}{A} \int_{PA} \phi N_p \chi_k dS_p \quad (28)$$

- E Vecteur directeur de x
- $K_{IK}$  Projection de  $N_{IK}$  dans le plan (y,z) de A
- JA Trace de toutes les interfaces dans A
- PA Frontière de la section A
- $N_p$  Normale à la paroi dirigée vers l'extérieur.

#### 2.4.2.4. Moyenne spatio-temporelle de l'équation de conservation

Posons  $P_I \cdot \phi_{IK} = \int_{JA} \overline{\phi_K N_{IK} \frac{dS_I}{N_{IK} K_{IK}}}$  (29)

$$PI = \int_{JA} \overline{dS_I} \quad : \text{ périmètre interfacial} \quad (30)$$

$$\rho_K = \int_{PA} \overline{\chi_k dS_p} \quad : \text{ périmètre mouillé par la phase K} \quad (31)$$

$$P_K \cdot \phi_{pK} = \int_{PA} \overline{\phi N_p \chi_k dS_p} \quad (32)$$

L'équation (28) devient:

$$\frac{\partial(\rho_K \overline{\langle R \rangle_K \langle \psi \rangle_K})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_K \overline{\langle \psi V \cdot E \rangle_K \langle R \rangle_K} + \overline{\langle \phi \cdot E \rangle_K \langle R \rangle_K})}{\partial x} =$$

$$= \rho_K \overline{\langle F \rangle_K \langle R \rangle_K} - \frac{P_I}{A} \phi_{IK} - \frac{P_K}{A} \phi_{pK} \quad (33)$$

#### 2.4.2.5. Moyenne spatio-temporelle par configuration

Multiplions la relation (28) par  $\chi_B$ :

$$\chi_B \frac{\partial(\rho_K \langle R \rangle_K \langle \psi \rangle_K)}{\partial t} + \frac{\partial[\langle R \rangle_K (\rho_K \langle \psi V \rangle_K + \langle \rho \rangle_K) \cdot E] \chi_B}{\partial x} =$$

$$= \left[ \rho_K \langle F \rangle_K \langle R \rangle_K - \frac{1}{A} \int_{JA} \frac{\varphi N_{IK} \delta_I}{N_{IK} K_{IK}} - \frac{1}{A} \int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p \right] \chi_B \quad (34)$$

Cette relation moyennée donne:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho_K \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_K \langle \psi \rangle_K}^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_K \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_K \langle \psi V.E \rangle_K}^\beta)}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_\beta \overline{\langle \varphi.E \rangle_K \langle R \rangle_K}^\beta)}{\partial x} = \\ & = \rho_K \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_K \langle F \rangle_K}^\beta - \frac{\alpha_\beta P_{KB}}{A} \varphi_{PK\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{IP}}{A} \varphi_{IK\beta} - \\ & \quad - \frac{\alpha_\beta P_{IB}}{A} (\psi M_I)_{IK\beta} - n_C \left[ \left( \frac{q_{K\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left( \frac{q_{K\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{Avec} \quad q_{K\beta} = \langle [\rho \psi (U_\beta - V) - \varphi] . E \rangle_K \langle R \rangle_K \quad (36)$$

On l'écrit sous la forme  $q_{K\beta i}(U_i)$  avec  $i = 0$  en début de configuration et  $i = 1$  en bout de configuration .

$$\text{Et} \quad \alpha_\beta P_{K\beta} \varphi_{PK\beta} = \chi_\beta \int_{PA} \varphi N_p \chi_k dS_p \quad (37)$$

$$P_{K\beta} = \overline{\int_{PA} \chi_k dS_p}^\beta \quad (38)$$

### 2.4.3. Applications aux équations de la conservation de la masse

Dans ce chapitre, nous allons faire une application à la conservation de la masse des différentes équations écrites précédemment, et le sens physique de chaque terme sera précisé.

La conservation de la masse correspond aux valeurs de  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $F$  suivantes:

$$\psi = 1 \quad \varphi = 0 \quad F = 0$$

#### 2.4.3.1. Moyenne spatio-temporelle classique

En régime permanent et établi, nous avons:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \rho_K \overline{\langle R \rangle_K \langle \bar{V} \rangle_K}}{\partial x} = \text{Cste} = \rho_K U_K \quad (39)$$

$U_K$  est la vitesse superficielle de la phase K.

La conservation de la masse correspond à  $\psi = 1$  ;  $\varphi = 0$  ;  $F = 0$  , l'équation (33) devient:

$$\frac{\partial(\rho_K \overline{\langle R \rangle_K})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_K \overline{\langle R \rangle_K \langle V \rangle_K})}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

La relation (39) suppose l'absence de transfert de masse à l'interface soit  $M_I = 0$ ,

donc  $V_K = U_I = V_{KN}$

#### 2.4.3.2. Moyenne par configuration

Soit  $\rho_{K\beta i}$  le flux massique de la phase K aux extrémités ( $i = 0$  et  $i = 1$ ) de la configuration  $\beta$ .

L'équation (35) devient:

$$\frac{\partial(\rho_{K\alpha\beta} \overline{\langle R \rangle_K}^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{K\alpha\beta} \overline{\langle R \rangle_K \langle V \rangle_K}^\beta)}{\partial x} = -n_C \left[ \left( \frac{\varphi_{K\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left( \frac{\varphi_{K\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right] \quad (41)$$

Or d'après (39) , le membre de gauche s'annule :

$$\text{donc : } \left( \frac{\varphi_{K\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) = \left( \frac{\varphi_{K\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \quad (42)$$

$$\text{et } \varphi_{K\beta i} = \langle \rho(U_{\beta i} - V_i) \rangle_K \langle R \rangle_K \quad (43)$$

La relation (42) exprime que le flux de la phase K entrant est égal au flux de la phase K sortant

et ce bien sur pour un régime établi .

#### 2.4.4. Applications aux équations de quantité de mouvement

Dans l'équation du bilan de quantité de mouvement, le tenseur  $\varphi$  s'écrit  $\varphi = P - \Sigma'$ , avec  $\Sigma'$  le tenseur des contraintes visqueuses.

Dans notre cas, nous allons négliger les effets de tension de surface, et nous prendrons  $P = PI$ , I étant le tenseur unité , et P la pression .

Les équations de la conservation de la quantité de mouvement s'écrivent avec les valeurs de:

$$\psi = V \quad ; \quad \varphi = PI - \Sigma' \quad ; \quad F = g$$

##### 2.4.4.1. Moyenne spatio-temporelle classique

L'équation (33) devient:



$$\frac{\partial(\rho_K \overline{\langle R \rangle_K \langle V \rangle_K})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_K \overline{\langle V.V \rangle_K \langle R \rangle_K} + \overline{\langle (PI - \Sigma') \rangle_K \langle R \rangle_K})}{\partial x} =$$

$$= \rho_K g \overline{\langle R \rangle_K} - \frac{P_I}{A} (PI - \Sigma')_{IK} - \frac{P_K}{A} (PI - \Sigma')_{PK} \quad (44)$$

#### 2.4.4.2. Moyenne par configuration

L'équation (35) devient:

$$\frac{\partial(\rho_K \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_K \langle V \rangle_K}^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_K \alpha_\beta \overline{\langle R \rangle_K \langle V.V.E \rangle_K}^\beta)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_\beta \overline{\langle (PI - \Sigma') \rangle_K \langle R \rangle_K}^\beta)}{\partial x} =$$

$$= \rho_K \alpha_\beta g \overline{\langle R \rangle_K}^\beta - \frac{\alpha_\beta P_{K\beta}}{A} (PI - \Sigma')_{PK\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{I\beta}}{A} (PI - \Sigma')_{IK\beta} - \frac{\alpha_\beta P_{I\beta}}{A} (V.M_I)_{IK\beta} -$$

$$- n_C \left[ \left( \frac{q_{K\beta 1}}{U_{\beta 1}} \right) - \left( \frac{q_{K\beta 0}}{U_{\beta 0}} \right) \right] \quad (45)$$

$$\text{Avec} \quad q_{K\beta} = \overline{\langle [\rho V(U_\beta - V) - (PI - \Sigma')] . E \rangle_K \langle R \rangle_K} \quad (46)$$

Si on considère que l'écoulement est établi  $\left( \frac{\partial}{\partial x} = 0 \text{ et } dp/dx = \text{Cste} \right)$  et

permanent  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ , l'équation (45) devient:

$$\overline{\left( \frac{dp}{dx} \right) \langle R \rangle_K}^\beta = - \rho_K g R_K \sin(y) + \frac{P_{I\beta}}{A} \tau_{IK\beta} - \frac{P_{WK\beta}}{A} \tau_{WK\beta}$$

$$+ \frac{1}{\theta} \left[ \left( \frac{q_{K\beta 1}}{U} \right) - \left( \frac{q_{K\beta 0}}{U} \right) \right] \quad (47)$$

$\tau_{IK\beta}$  = Cisaillement interfacial de K+1 sur K

$\tau_{WK\beta}$  = Cisaillement pariétal : action de la paroi sur K.

$Q_{K\beta} = \varphi_{K\beta} V_{K\beta}$

$Y$  = Angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale.

#### 2.4.5. Equations de base du modèle

Nous supposons que l'écoulement est permanent et établi dans la configuration  $\beta$ , nous avons  $\beta = P$  ou  $\beta = B$  et  $K=L$  ou  $K=G$ .

Les relations de bases issues des lois de conservation sont au nombre de cinq:

$$\left( \frac{dp}{dx} \right)_{K\beta} = - \rho_K g - \frac{P_{I\beta} \tau_{IK\beta}}{A.R_{K\beta}} - \frac{P_{WK\beta} \tau_{WK\beta}}{A.R_{K\beta}} \quad (48)$$

$$q_{K\beta} = AR_{K\beta} V'_{K\beta} \quad \Rightarrow \quad \text{avec} \quad V'_{K\beta} = U - V_{K\beta} \quad (49)$$

$$R_{K\beta} + R_{(K+1)\beta} = 1 \quad (50)$$

Nous avons donc 5 équations pour la configuration  $\beta$ , avec 5 inconnues qui sont:

$R_{K\beta}$  ;  $R_{(K+1)\beta}$  ;  $V'_{K\beta}$  ;  $V'_{(K+1)\beta}$  ; et  $\left( \frac{dp}{dx} \right)_\beta = \left( \frac{dp}{dx} \right)_{K\beta} = \left( \frac{dp}{dx} \right)_{(K+1)\beta}$

$R_{K\beta}$  et  $R_{(K+1)\beta}$  = taux de phase dans  $\beta$



$V'_{K\beta}$  et  $V'_{(K+1)\beta}$  = vitesse de phase dans  $\beta$

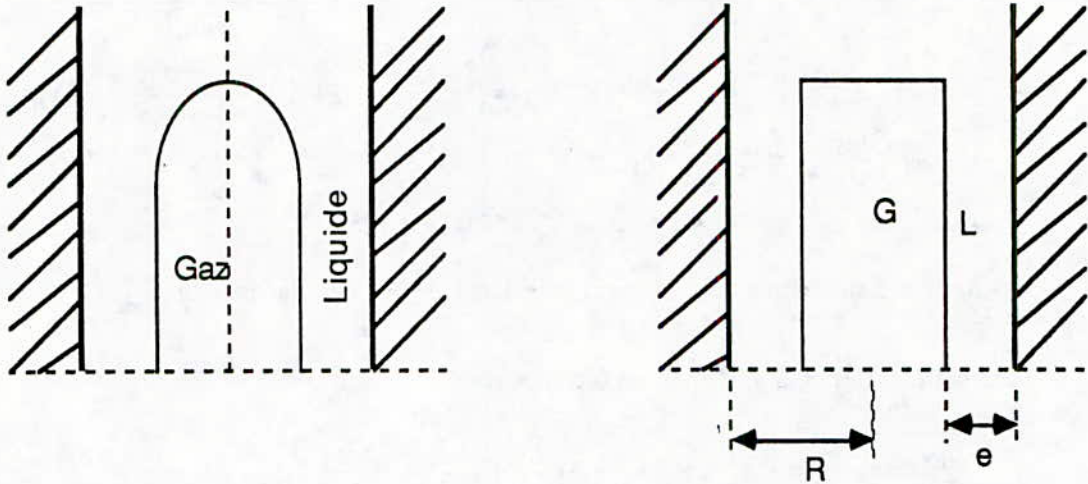
$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{\beta} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{K\beta} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{(K+1)\beta}$  = gradient de pression dans  $\beta$

A ces équations, nous devons ajouter des lois de fermeture pour:

$$P_{I\beta} ; \tau_{IKW} ; P_{WK\beta} ; \tau_{WK\beta}$$

#### 2.4.5.1. Equations de bases dans la poche

Dans la poche, nous avons le schéma suivant :



Nous tirons les 5 équations dans la poche des équations 48 ; 49 et 50 :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{GP} = -\rho_G g + \frac{P_{IG}\tau_{IGP}}{A.R_{GP}} - \frac{P_{WGP}\tau_{WGP}}{A.R_{GP}} \quad (51)$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{LP} = -\rho_L g + \frac{P_{IL}\tau_{ILP}}{A.R_{LP}} - \frac{P_{WLP}\tau_{WLP}}{A.R_{LP}} \quad (52)$$

$$q_{LP} = A R_{LP} V'_{LP} \quad (53)$$

$$q_{GP} = A R_{GP} V'_{GP} \quad (54)$$

$$R_{LP} + R_{GP} = 1 \quad (55)$$

A ces 5 équations dans la poche, nous ajoutons des lois de fermeture pour:

$$P_{WGP} ; P_{WLP} ; P_{IG} ; \tau_{WGP} ; \tau_{ILP} ; \tau_{WLP}.$$

Nous avons:

$$P_{WGP} = 0 \quad \implies \quad \tau_{WGP} = 0 \quad (56)$$

$$P_{WLP} = 2.\pi.R \quad (57)$$

$$P_{IG} = 2.\pi.(R - e) \quad (58)$$

$$P_{IG} = 2.\pi.R \sqrt{R_{GP}} \quad (59)$$

Donc :

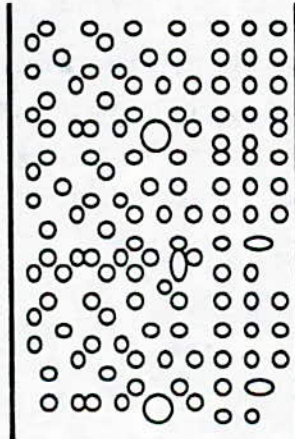
$$R_{GP} = \frac{(R - e)^2}{R^2} \quad (60)$$

Il reste à déterminer  $\tau_{ILP}$  et  $\tau_{WLP}$  en fonction de la littérature , sachant qu'en monophasique , la formule de Blasius donne :

$$\tau = \frac{1}{2} \rho f (V)^2 \quad (61)$$

#### 2.4.5.2. Equations de bases dans le bouchon

Dans le bouchon , nous avons le schéma suivant :



et les équations suivantes:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_\beta = -(\rho_G R_{GB} + \rho_L R_{LB}) - \frac{P_{WLB} \tau_{WLB}}{A} \quad (62)$$

$$q_{G\beta} = A R_{G\beta} V'_{G\beta} \quad (63)$$

$$q_{L\beta} = A R_{L\beta} V'_{L\beta} \quad (64)$$

$$R_{G\beta} + R_{L\beta} = 1 \quad (65)$$

Nous avons 4 équations à 5 inconnues , nous ajoutons une équation supplémentaire sur le Glissement:

$$G = V_{G\beta} - V_{L\beta} \quad (66)$$

A ces 5 équations dans le bouchon , nous ajoutons des lois de fermeture pour :

$$P_{WL\beta} ; \tau_{WL\beta} ; G ; V'_{K\beta} ; \frac{dp}{dx} ; R_K .$$

$$\text{Nous avons : } P_{WL\beta} = 2.\pi.R \quad \{68\}$$

$$V'_{K\beta} = U - V_{K\beta} \quad \{69\}$$

$$\frac{dp}{dx} = \alpha_{\beta} \left( \frac{dp}{dx} \right)_{\beta} + (1 - \alpha_{\beta}) \left( \frac{dp}{dx} \right)_{\beta+1} \quad \{70\}$$

$$R_K = \alpha_{\beta} R_{K\beta} + (1 - \alpha_{\beta}) R_{K\beta+1} \quad \{71\}$$

### 2.4.5.3. Célérité des poches

A partir des bilans de masse du gaz et du liquide, en repère lié à la poche, la célérité des poches s'écrit:

$$U_P = \frac{U_{LB0}}{U_{LB}} (U_{GS} + U_{LS}) + V_{LB0} - \frac{U_{LB0}}{U_{LB}} R_{GB} G_B \quad \{72\}$$

$U_{LB0}$  = Vitesse moyenne du liquide sur l'axe en amont de la poche.

$U_{LB}$  = Vitesse moyenne du liquide en amont de la poche.

$C_0 = \frac{U_{LB0}}{U_{LB}}$  = Coefficient de profil de vitesse du liquide .

$V_{LB0}$  = Vitesse du liquide sur l'axe, relative à la poche .

$R_{GB} G_B$  = Terme qui tient compte de la présence de bulles dans le bouchon.

$G_B$  : étant le glissement apparent du gaz par rapport au liquide.

$R_{GB}$  : fraction du gaz dans le bouchon.

$$V_{LB0} = 0,35 \sqrt{g.D(\Delta\rho/\rho_L)} \quad \{73\}$$

$$U_P = C_0 (U_{GS} + U_{LS}) + C_{\infty} \sqrt{g.D(\Delta\rho/\rho_L)} - C_0 R_{GB} G_B + \Delta U_P \quad \{74\}$$

Un terme de transfert de masse au front ( $\Delta U_P$ ) est ajouté à cette équation. Le terme  $\Delta U_P$  a été évalué par ZAI-SHA-MAO & DUKLER.

$$\Delta U_P = \phi_G / R_{GP} = (U_P - U_{GB}) (R_{GB} / R_{GP}) \quad \{75\}$$

Dans cette approche, la coalescence est négligée. Ajoutons à cette équation, un coefficient de coalescence ( $k$ ):

$$\Delta U_P = k (U_P - U_{GB}) (R_{GB} / R_{GP}) \quad \{76\}$$

$$\text{avec } k \leq 1 \quad \text{et } k = k(d_B / e)$$

$d_B$  = diamètre moyen des bulles calculé par relation analogue à la loi de HINZE (1955), ou mesuré ou estimé.



Nous avons :

$$\rho_L \overline{U}^2 d_B = \sigma \quad (77)$$

$\overline{U}^2 = \text{Energie d'agitation.}$

On prendra  $V_{LB0} = U_\infty = 0,35 \sqrt{g.D(\Delta\rho/\rho_L)} = C_\infty \sqrt{g.D(\Delta\rho/\rho_L)}$  (78)

La relation finale proposée serait:

$$U_P = C_0(U_{GS} + U_{LS}) + C_\infty \sqrt{g.D(\Delta\rho/\rho_L)} + C_0 R_{GB} G_B + k(U_P - U_{GB})(R_{GB} / R_{GP}) \quad (79)$$

Nous prendrons :

$$k = 1 \quad \text{si} \quad d_B \geq e$$

$$k = 0 \quad \text{si} \quad d_B < e$$

et  $C_0 = 1 + \frac{0,70}{1 + 10^{-8} Re^{2,55}} + \frac{0,30}{1 + 0,005 Re^{0,42}}$  (80)

La relation (79) peut être beaucoup simplifiée comme l'on fait certains auteurs.

## 2.4.6. Lois de fermeture

### 2.4.6.1. Loi de cisaillement interfacial

On peut interpréter les concepts de turbulence de paroi, dans le gaz, comme si l'interface liquide, est une paroi mobile.

Supposons: \*  $V'_{FS0}$  = la vitesse du liquide est la vitesse de la paroi. Dans ce cas, les résultats classiques des écoulements turbulents en conduite circulaire s'appliquent au gaz contenu dans la poche.

$$* V'_{PS(Y)} = \text{vitesse locale de la pseudo-phase poche à l'abscisse } Y$$

$$\text{à l'interface } (Y=0) \implies V'_{PS(0)} = V'_{FS0}$$

$$\text{au centre de la conduite : } (Y=R_I) \implies V'_{PS(R_I)} = V'_{PS0}$$

avec  $R_I = R - e_F$  ( $e_F$  épaisseur du film).

On cherche à établir une loi de variation du frottement qui dépend de  $Re_I$ , de la rugosité de la paroi ( $K_I$ ) et de l'épaisseur moyenne du film ( $e_F$ ).

Nous avons:



$$U_I^* = \left[ \frac{|\tau_I|}{\rho_G} \right]^{1/2} \quad : \text{ est la vitesse de frottement interfacial construit sur le cisaillement interfacial } \tau_I.$$

On choisit :

- une loi de paroi universelle :

$$\frac{V'_{PS}(Y)}{U_I^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_I^*} - A \ln \left( \frac{Y}{K_I} \right) - a (Re_I^*) \quad (81)$$

$A = 2,46$  constante universelle.

- une loi déficitaire:

$$\frac{V'_{PS}(Y)}{U_I^*} = \frac{V'_{PS0}}{U_I^*} - 2,46 \ln \left( \frac{Y}{R_I} \right) \quad (82)$$

- une loi de frottement:

$$\frac{V'_{PS0}}{U_I^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_I^*} - 2,46 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) - a (Re_I^*) \quad (83)$$

$V'_{PS}$  : la valeur de la vitesse moyenne dans la section de la poche est égale:

$$V'_{PS} = \frac{2}{R_I} \int_0^{R_I} \left( 1 - \frac{Y}{R_I} \right) V'_{PS}(Y) dY \quad (84)$$

De la relation (84) et (81), on a:

$$\frac{V'_{PS}}{U_I^*} = \frac{V'_{FS0}}{U_I^*} - 2,5 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) - a (Re_I^*) - \alpha_0 \quad (85)$$

Le cisaillement interfacial s'écrit:

$$\tau_I = -\frac{1}{2} \rho_G f_I (V'_{FS0} - V'_{PS})^2 \quad (86)$$

$f_I$  est donné par la loi de Cole Brook:

$$\frac{1}{2(f_I)^{1/2}} = 1,74 - 2 \log \left( \frac{K_I}{R_I} + \frac{18,7}{2 \text{Re}_P(f_I)^{1/2}} \right) \quad \{87\}$$

$$\text{avec } \text{Re}_P = \frac{2|V'_{FS0} - V'_{PS}|R_I}{V_G} \quad \{88\}$$

et  $a(\text{Re}_I^*)$  s'écrit d'après (86):

$$\left[ \frac{|\tau_I|}{\rho_G} \right]^{1/2} = \left[ \frac{f_I}{2} \right]^2 |V'_{FS0} - V'_{PS}| \quad \{89\}$$

or d'après (85):

$$\frac{\overline{V'}_{PS} - V'_{FS0}}{U_I^*} = -2,5 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) - a(\text{Re}_I^*) - \alpha_0 \quad \{90\}$$

d'où:

$$\begin{aligned} U_I^* &= \frac{1}{-2,5 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) - a(\text{Re}_I^*) - \alpha_0} (V'_{PS} - V'_{FS0}) \\ &= \frac{1}{\left[ 2,5 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) + a(\text{Re}_I^*) - 3,75 \right]^{1/2}} (V'_{FS0} - V'_{PS}) \end{aligned}$$

Soit la relation suivante:

$$\frac{1}{2(f_I)^{1/2}} = \frac{1}{2(2)^{1/2}} \left[ 2,5 \ln \left( \frac{R_I}{K_I} \right) + a(\text{Re}_I^*) - 3,75 \right]^{1/2} \quad \{91\}$$

De la relation (87), on tire:

$$\text{Re}_P(f_I)^{1/2} = 2(2)^{1/2} \frac{R_I}{K_I} \text{Re}_I^* \quad \text{avec } \text{Re}_I^* = \frac{U_I^* K_I}{V_G} \quad \{92\}$$

alors,

$$\frac{1}{2(f_I)^{1/2}} = 1,74 - 2 \log\left(\frac{K_I}{R_I}\right) - 2 \log\left(1 + \frac{18,7}{4(2)^{1/2}Re_I^*}\right) \quad \{93\}$$

De la relation (91) et (93), on déduit  $a (Re_I^*)$ :

$$a (Re_I^*) = 8,5 - 4 (2)^{1/2} \log\left(1 + \frac{18,7}{4(2)^{1/2}Re_I^*}\right) \quad \{94\}$$

#### 2.4.6.2. Loi de cisaillement à la paroi

$\tau_{WLP} = \tau_F$  pour simplifier les écritures.

Le bilan de quantité de mouvement appliqué au film liquide en écoulement parallèle donne la relation suivante:

$$\tau_F (1 - \xi') = \tau_I (1 - \xi'_I) + (\rho_F g - \frac{dp}{dx}) R (\xi'_I - \xi') \left(1 - \frac{\xi'_I + \xi'}{2}\right) \quad \{95\}$$

avec  $\xi' = \frac{Y'}{R}$  et  $\xi'_I = \frac{e_F}{R}$

Soit  $\tau_F$ :

$$\tau_F = \tau_I \left(\frac{1 - \xi'_I}{1 - \xi'}\right) + (\rho_F g - \frac{dp}{dx}) R \left(\frac{\xi'_I - \xi'}{1 - \xi'}\right) \left(1 - \frac{\xi'_I + \xi'}{2}\right) \quad \{96\}$$

A la paroi, nous avons  $\xi' = 0$ , donc  $\tau_F = \tau_{WF}$  où  $\tau_{WF}$  est le cisaillement pariétal et l'équation (96) devient:

$$\tau_W = \tau_I (1 - \xi'_I) + (\rho_F g - \frac{dp}{dx}) R \xi'_I \left(1 - \frac{\xi'_I}{2}\right) \quad \{97\}$$

Des équations (96) et (97), on déduit:

$$\tau_F = \tau_I \left(\frac{1 - \xi'_I}{1 - \xi'}\right) + \frac{[\tau_{WF} - \tau_I (1 - \xi'_I)]}{\xi'_I \left(1 - \frac{\xi'_I}{2}\right)} \left(\frac{\xi'_I - \xi'}{1 - \xi'}\right) \left(1 - \frac{\xi'_I + \xi'}{2}\right)$$

{98}

On suppose que  $\xi'$  et  $\xi'_I$  sont des infiniment petits et l'expression (98) devient:

Si  $\xi' \rightarrow 0$  et  $\xi'_I \rightarrow 0$  alors

$$\tau_F^{(0)} = \tau_I + (\tau_{WF} - \tau_I) \left(1 - \frac{\xi'}{\xi'_I}\right)$$

$$\tau_F = \tau_I + (\tau_{WF} - \tau_I) \left(1 - \frac{Y'}{e_F}\right) \quad \{99\}$$

Nous avons au second ordre:

$$\tau_F = \tau_F^{(0)} + \tau_F^{(1)}$$

et 
$$\tau_F^{(1)} = (\tau_{WF} - \tau_I) \frac{\xi'}{2} \left( 1 - \frac{\xi'}{\xi'_I} \right) \quad (100)$$

Donc:

$$\tau_F = \tau_F^{(0)} + \tau_F^{(1)} + \dots$$

Notons  $\alpha_C = \frac{\tau_I}{\tau_{WF}}$ , le rapport du cisaillement, et nous pourrions calculer:

$$\frac{\tau_F^{(0)}}{\tau_{WF}} = \alpha_C + (1 - \alpha_C) \left( 1 - \frac{Y'}{e_F} \right)$$

$$\frac{\tau_F^{(1)}}{\tau_{WF}} = \frac{e_F}{R} \left[ (1 - \alpha_C) \frac{Y'}{2 e_F} \left( 1 - \frac{Y'}{e_F} \right) \right] \quad (101)$$

\* Cas de l'écoulement laminaire:

Nous avons le profil de vitesse qui est solution de la relation suivante:

$$\rho_F V_F \frac{dV'_F}{dY'} = \tau_F(Y') \quad (102)$$

posons :  $U^*_{WF} = \left[ \frac{|\tau_F|}{\rho_F} \right]$ ;  $Re^*_{WF} = \frac{U^*_{WF} e_F}{V_F}$ ;  $v_F^+ = \frac{V'_F}{U^*_{WF}}$

$$U^+ = \frac{U}{U^*_{WF}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{Y'}{e_F}$$

d'après la relation (101):

$$Re^{*-1}_{WF} (v_F^+ - U^+) = \underbrace{\alpha_C \beta}_I + (1 - \alpha_C)^2 \left( \beta - \frac{\beta}{2} \right) + (1 - \alpha_C) \frac{e_F}{2R} \left( \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \right) \quad (103)$$

le premier terme I =  $V_F^{+(0)} / Re^*_{WF}$

le second terme II =  $V_F^{+(1)} / Re^*_{WF}$

Soit 
$$Re^{*-1}_{WF} (v_F^+ - U^+) = \frac{V_F^{+(0)}}{Re^*_{WF}} + \frac{V_F^{+(1)}}{Re^*_{WF}} \quad (104)$$

Si nous intégrons (103) sur la surface du film, nous obtenons la vitesse  $V'_{FS}$ :



$$V'_{FS} = \frac{1}{s_F} \int_0^{e_F} 2\pi (R-Y') V'_F(Y') dY' \quad \text{avec} \quad s_F = 2\pi R e_F \left( 1 - \frac{\xi_I}{2} \right) \quad (105)$$

d'où :

$$V'_{FS} = \left( 1 + \frac{\xi_I}{2} \right) \int_0^1 (1-\beta \cdot \xi_I) V'_F(\beta) d\beta \quad (106)$$

Injectons (103) dans (106), nous avons:

$$\frac{V'_{FS} - U}{Re^*_{WF} U^*_{WF}} = \frac{1}{3 \alpha_0} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_C}{2} - \frac{\alpha_C}{4} \xi_I} \quad (107)$$

posons  $Re_F = 4 e_F \frac{|V'_{FS} - U|}{V_F}$

le cisaillement pariétal s'exprime par la relation:

$$\tau_{WF} = \frac{1}{2} \rho_F f_{WF} (V'_{FS} - U) |V'_{FS} - U| \quad (108)$$

et une loi de frottement :

$$f_{WF} = 24 \alpha_0 Re_F^{-1} \quad (109)$$

on peut obtenir une relation entre  $V'_{FS}$  et  $V'_{FS0}$  en posant  $\beta = 1$  dans l'équation (103), soit:

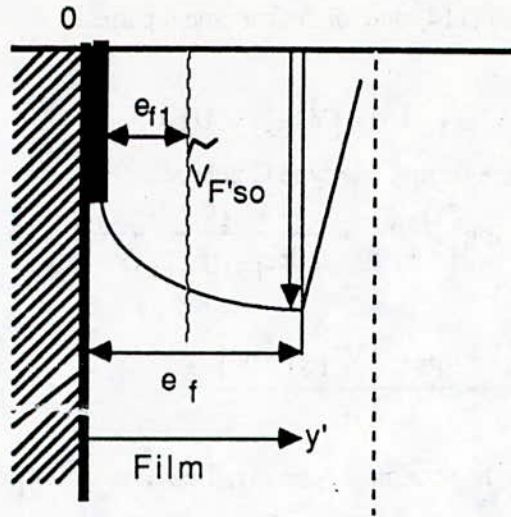
$$\frac{V'_{FS0} - U}{Re^*_{WF} U^*_{WF}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha_C}{2} + \frac{\xi_I}{6} (1 - \alpha_C) \right] \quad (110)$$

et en comparant (110) à (107), nous obtenons:

$$\frac{V'_{FS0} - U}{V'_{FS} - U} = \frac{3}{2} \frac{\left[ 1 + \alpha_C + \frac{\xi_I}{6} (1 - \alpha_C) \right]}{1 + \frac{\alpha_C}{2} - \frac{\xi_I}{4} \alpha_C} = \frac{3}{2} \frac{1 + \alpha_C + \frac{\xi_I}{6} (1 - \alpha_C)}{\alpha_0} \quad (111)$$

\* Cas de l'écoulement turbulent :

La structure particulière de la turbulence dans cette région est responsable de la génération d'écoulements secondaires dans le film, de ce fait, l'équation (98) ne serait plus valable. De plus, à l'étape actuelle, nous n'avons pas d'informations expérimentales précises sur ce point. Pour cela, nous acceptons, pour le moment, le bilan de quantité de mouvement en écoulement parallèle.



Dans le schéma ci-dessus, nous distinguons dans le film une zone de paroi à gradient de vitesse ( $0 < Y' < e_{F1}$ ).

Dans cette zone, le profil de vitesse est supposé logarithmique et nous introduisons une zone d'interface ( $e_{F1} < Y' < e_F$ ) qu'on suppose à vitesse constante.

Soient les lois logarithmiques entre  $0 < Y' < e_{F1}$  :

$$\text{- loi de paroi: } \frac{V'_{FS}(Y') - U}{U^*_{WF}} = 2,5 \ln \frac{Y'}{K_W} + a (Re^*_{WF}) \quad \{112\}$$

$$\text{- loi déficitaire: } \frac{V'_{FS}(Y') - V'_{FS0}}{U^*_{WF}} = 2,5 \ln \frac{Y'}{e_{F1}} \quad \{113\}$$

$$\text{- loi de frottement: } \frac{V'_{FS1} - U}{U^*_{WF}} = 2,5 \ln \frac{e_{F1}}{K_W} + a (Re^*_{WF}) \quad \{114\}$$

$$\text{et entre } e_{F1} < Y' < e_F, \text{ vue la vitesse constante: } V'_{FS}(Y') = V'_{FS0} \quad \{115\}$$

Intégrons le profil de vitesse dans le film et nous aurons:

$$V'_{FS} = \frac{1}{A_F} \int_{A_F} V'_{FS} dA_F = \frac{A_{F1}}{A_F} V'_{FS1} + \left(1 - \frac{A_{F1}}{A_F}\right) V'_{FS0} \quad \{116\}$$

$$\text{avec } \frac{A_{F1}}{A_F} = \frac{e_{F1}}{e_F} \left(1 + \frac{e_{F1} - e_F}{R}\right)$$

$$V'_{FS1} = \frac{1}{A_{F1}} \int_{A_{F1}} V'_{FS} dA_F$$

On peut tirer de la relation (114) une loi de frottement pariétal:

$$\tau_{WFS} = \frac{1}{2} f_{WFS1} \rho_F (V'_{FS1} - U) (|V'_{FS1} - U|) \quad (117)$$

avec  $f_{WFS1}$  donné par une formule de type Colebrook:

$$\frac{1}{2(f_{WFS1})^{1/2}} = 1,74 - 2 \log \left[ \frac{K_W}{2 e_{F1}} + \frac{18,7}{2 \text{Re}_{FS1} (f_{WFS1})^{1/2}} \right] \quad (118)$$

avec 
$$\text{Re}_{FS1} = \frac{4 e_{F1} |V'_{FS1} - U|}{V_F}$$

Nous noterons que sur le schéma ci-dessus, l'épaisseur  $e_{F1}$  délimite la zone de validité de profil logarithmique vis à vis de la zone à vitesse uniforme dominée par la turbulence interfaciale.

On peut admettre dans l'écoulement contre-courant, que  $e_{F1}$  est défini par le point où le cisaillement s'annule, soit d'après (99):

$$1 - \frac{e_{F1}}{e_F} = \frac{-\tau_I}{\tau_{WF} - \tau_I}$$

d'où 
$$\frac{e_{F1}}{e_F} = \frac{1}{1 + |\alpha_C|} \quad (119)$$

Afin de tenir compte de la décroissance de la turbulence interfaciale, on prend aussi l'équation (118) pour l'écoulement co-courant.

Notre modèle constitutif de cisaillement interfacial sera synthétisé par les relations (112); (113); (114); (116); (118) et (119) qui établissent un lien entre  $V'_{FS}$ ;  $V'_{FS1}$ ;  $V'_{FS0}$ ;  $\tau_{WF}$  et  $\tau_I$  et permettent aussi de calculer les vitesses  $V'_{FS1}$  et  $V'_{FS0}$  moyennes sur les zones avec ou sans gradient de vitesse.

$$V'_{FS0} = V'_{FS} + 2,5 U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1}) e_{F1} (2R - e_{F1})}{2 (2R - e_F) e_F (2R - e_{F1})} \quad (120)$$

$$V'_{FS1} = V'_{FS} - 2,5 U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1}) e_{F1} (2R - e_{F1})}{2 (2R - e_F) e_F (2R - e_{F1})} \quad (121)$$

ou si l'on veut:

$$V'_{FS1} = V'_{FS0} - 2,5 U_{WF}^* \frac{(4R - e_{F1})}{2 (2R - e_{F1})} \quad (122)$$

Il est à noter que la validité du modèle est limitée à:  $-10 < \alpha_C < 10$  (123)

et que dans les autres cas; on prendra  $\tau_{WF} = 0$



### 2.4.6.3. Loi de glissement de gaz dans le bouchon : $G_{\beta}$

DUKLER et al (1983) identifient le glissement dans le bouchon, comme le glissement relatif entre le gaz et le liquide dans les écoulements à bulles:

$$G_B = 1,53 (1 - R_{GB})^{1/2} \left[ \sigma_g \frac{(\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2} \right]^{1/4} \quad (124)$$

D'après les résultats expérimentaux de Liné et Masbernat (1985), et Frechou (1986); cette relation n'est pas entièrement vérifiée.

Si le terme  $\left[ \sigma_g \frac{(\rho_L - \rho_G)}{\rho_L^2} \right]^{1/4}$  paraît correct, le terme  $1,53 (1 - R_{GB})^{1/2}$  est à

modifier car:

$$V_{LB} = (U_G + U_L) - G R_{GB} \quad (124')$$

On sait expérimentalement qu'à  $U_L$  constant, quand  $U_G / \implies V_{LB} /$  et  $R_{GB} /$  or d'après (124)' si  $V_{LB} / , \implies U_G /$  mais  $G R_{GB} /$  or  $R_{GB} /$  donc  $G$  doit / plus vite que  $R_{GB}$

On sait que d'après la formule de Wallis:

$$G = C \left[ \sigma_g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_L^2} \right]^{1/4} \quad \text{avec } C = 1,53 (1 - R_{GB})^{1/2}$$

Il faudrait peut être revoir le terme  $C$  en fonction des résultats expérimentaux.

### 2.4.6.4. Loi de cisaillement pariétal dans le bouchon: $\tau_{w\beta}$

Si l'on suppose que seule la phase liquide mouille la paroi, on peut exprimer le cisaillement pariétal par une loi de type monophasique:

$$\tau_{WLB} = \frac{1}{2} f_{WLB} \rho_L V_{LD}^2 \quad (125)$$

le facteur de friction  $f_{WLB}$  est calculé par une loi de type Colebrook en fonction de la rugosité de la paroi ( $K_W / R$ ) et du nombre de Reynolds:

$$Re_D = \frac{D \cdot V_{LD}}{V_L} \quad (125')$$

avec  $V_{LD}^2 = (U - V'_{LD})^2 \quad (126)$

donc  $\tau_{WLB} = \frac{1}{2} f_{WLB} (U - V'_{LD})^2 \quad (127)$



$$Re_D = \frac{D \cdot |U - V'_{LD}|}{v_L} \quad (128)$$

et 
$$f_{WLB} = f \left( \frac{K_W}{R}, Re_D \right) \quad (129)$$

#### 2.4.6.5. Taux de présence de la configuration $\beta = \alpha_\beta$

Nous avons 
$$R_G = \alpha_S R_{GS} + \alpha_D R_{GD} \quad (130)$$

$\alpha_S$  = taux de présence dans la zone à phase séparée (poche)

$\alpha_D$  = taux de présence dans la zone à phase dispersée (bouchon)

avec 
$$\alpha_S + \alpha_D = 1 \quad (131)$$

On peut tirer  $\alpha_S$  ou  $\alpha_D$  en substituant l'équation (130) et (131):

$$\alpha_D = \frac{R_G - R_{GS}}{R_{GD} - R_{GS}} \quad (132)$$

ou

$$\alpha_S = \frac{R_G - R_{GD}}{R_{GS} - R_{GD}} \quad (133)$$

L'équation (132) ou (133) nécessite la mise en place d'une équation supplémentaire correspond à une inconnue  $\alpha_S$ ;  $R_{GD}$  ou  $R_G$ .

Nous traiterons au paragraphe suivant en détail, cette inconnue supplémentaire.

Remarquons que certains auteurs Taïtel et al (1980), Govier et Aziz (1977), Mc Quillan et Whalley (1985) proposent de prendre  $R_{GD} = 0,25$  (134)

Taïtel et al proposent aussi un autre modèle où ils déterminent la fraction du gaz  $R_{GB}$  à partir de la modélisation de l'entraînement de gaz dans le bouchon.

$$\Phi_{GC} = \left( 1 - \frac{2 e_G + e_F}{D} \right)^2 \frac{\Phi_{Ge}}{\Phi_{Ge} + \Phi_L} \cdot U_B \quad (135)$$

$e_G$  = épaisseur de la couche de gaz entraîné dans la poche.

$\Phi_{GC}$  = flux du gaz réinjecté dans la poche par agitation turbulente et des forces Archimèdes.

$\Phi_{Ge}$  = flux de gaz entraîné dans le bouchon par interaction dynamique entre le film et le gaz.

$U_B$  = taux d'intensité turbulente.

avec 
$$U_B = 0,25 (U_P - 1,15 U_{LP}) \quad (136)$$

Pour fermer le système d'équations, Duckler et al utilisent une relation empirique de Brötz (1954) pour relier l'épaisseur du film liquide et le flux relatif de liquide  $\Phi_L$

$$\delta_L \left( \frac{g}{v_L^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{3 \text{Re}_F^2}{590} \right)^{1/3} \quad (137)$$

$\text{Re}_F$  = nombre de Reynolds du film liquide.

$\delta_L$  = épaisseur du film liquide.

$$\text{Re}_F = \frac{\delta_L U_{LP}}{v_L} \quad (138)$$

d'où en substituant (137) et (138) on obtient:

$$U_{LP}^2 = 196,7 g \delta_L \quad (139)$$

$$\delta_L = \frac{D}{2} (1 - R_{GB}^{1/2}) \quad (140)$$

d'où de l'équation (139) et (140), nous avons:

$$U_{LP} = 9,916 [g D (1 - \sqrt{R_{GB}})]^{1/2} \quad (141)$$

## 2.5- CELERITE DES FRONTS DE POCHE

La loi de vitesse de poche s'exprime en fonction des vitesses superficielles par:

$$U = C1 (U_G + U_L) + C2 \left[ gD \frac{\Delta\rho}{\rho_L} \right]^{0,5}$$

$C2$  est une constante, et est fonction de l'inclinaison du nombre de BOND,  $B_0$ , de l'écoulement:

$$B_0 = \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot D}{\sigma}$$

$C2$  est donné par le diagramme de ZUKOSKI. Ces valeurs sont confirmées par STEWART et DAVIDSON et acceptées par tous les auteurs. Par contre  $C1$  varie:

DUKLER	$U = 1,29 (U_G + U_L) + 0,35 (g \cdot D)^{1/2}$
NICKLIN	$U = 1,20 (U_G + U_L) + 0,35 (g \cdot D)^{1/2}$
KOECK	$U = 1,20 (U_G + U_L) + 0,35 (g \cdot D)^{1/2}$
COLLINS	$U = 1,22 (U_G + U_L) + 0,35 (g \cdot D)^{1/2}$
LINE	$U = 1,20 (U_G + U_L) + 0,35 \left[ g \cdot D \frac{\Delta\rho}{\rho_L} \right]^{1/2}$

## Nomenclature

A	: Aire de la section de la conduite .
$A_F$	: Aire du film .
$A_{FI}$	: Aire de la zone du film à gradient de vitesse
$B_0$	: Nombre de bond .
c	: Facteur de calibration de l'anémomètre .
D	: Diamètre intérieur de la conduite .
d	: Diamètre des bulles .
E	: Vecteur directeur de l'axe de la conduite .
$e_F$	: Epaisseur du film .
$e_{FI}$	: Epaisseur de la zone de film à gradient de vitesse .
$e_i$	: Vecteur directeur du rayon laser incident .
$e_s$	: Vecteur directeur du rayon laser dispersé .
$f_i$	: Fréquence du rayon laser incident .
$f_S$	: Fréquence du rayon laser dispersé .
$f_D$	: Fréquence Doppler .
F	: Tenseur des forces extérieures .
$F_r$	: Nombre de Froud .
$f_i$	: Facteur de friction interfaciale .
$f_{W\beta}$	: Facteur de frottement pariétal dans la configuration $\beta$ .
G	: Glissement moyen du gaz dans le bouchon .
g	: Accélération de la pesanteur .
K	: Indice de phase .
$K_I$	: Rugosité interfaciale .
$K_W$	: Rugosité de la paroi .
$J_A$	: Trace des interfaces dans A .
$M_I$	: Densité du flux massique à travers l'interface .
$n_C$	: Fréquence cellulaire .
$N_{IK}$	: Normale à l'interface dirigée de K vers KM .
$N_P$	: Normale de la paroi dirigée vers l'extérieur .
P	: Pression .
$P_A$	: Périmètre de la conduite .
$P_{K\beta}$	: Périmètre mouillé par la phase K dans la configuration $\beta$ .
$P_{I\beta}$	: Périmètre interfacial dans la configuration $\beta$ .
Q	: Débit .
Re	: Nombre de Reynolds .
$Re_I$	: $U^*_I \cdot K_I / \nu_G$ .
$Re_{WF}$	: $U_{WF} \cdot e_F / \nu_F$ .
R	: Rayon intérieur de la conduite .
$R_K$	: Taux global de présence de la phase K .
$R_{K\beta}$	: Taux de présence de la phase K moyen dans la configuration $\beta$ .
$R_{K\beta}(\theta)$	: Taux de présence de la phase K à l'abscisse $\theta$ ( ou $X'$ ) de la configuration $\beta$ .
$t_{\beta I}$	: Instant du passage du front de l'événement I de la configuration $\beta$ .
T	: Durée d'observation .
$T_C$	: Période cellulaire .
U	: Célérité des poches .
$U_K$	: Vitesse superficielle de la phase K .
$U_{K\beta}$	: Vitesse superficielle de la phase K dans la configuration $\beta$ .
$U^*_I$	: Vitesse de frottement interfacial $(\tau_I / \rho_G)^{1/2}$ .
$U_{WF}$	: Vitesse de frottement pariétal dans le film $(\tau_W / \rho_L)^{1/2}$ .



$V_{K\beta}$	: Vitesse phasique de la phase K dans la configuration $\beta$ .
$V'_{K\beta}$	: Vitesse phasique relative à la célérité U.
$V'_{FS0}$	: Vitesse du film dans le noyau liquide.
$V'_{PS0}$	: Vitesse de poche dans le noyau gazeux.
X	: Axe de la conduite.
$X'$	: Variable spatiale d'évolution dans la configuration ( $X' = U.\theta$ ).
y	: Coordonnée dans le plan de section de la conduite (normale à X).
z	: Coordonnée dans le plan de section de conduite normale à X et Y.
$\alpha_{\beta}$	: Taux de présence de la configuration $\beta$ .
$\alpha_C$	: Rapport de cisaillement dans le film.
$\beta$	: Indice de configuration (Sou D).
$\gamma$	: Inclinaison par rapport à l'horizontale.
$\Phi_{K\beta}$	: Flux massique relatif de la phase K dans la configuration $\beta$ .
$\varphi$	: Densité du flux diffusif de $\psi$ .
$\theta$	: Variable temporelle d'évolution de la configuration $\beta$ .
$\theta_{\beta I}$	: Durée de passage d'évènement "I" dans la configuration $\beta$ .
$\lambda$	: Longueur d'onde de la lumière cohérente du laser.
$\mu_K$	: Viscosité dynamique de la phase K.
$\nu_K$	: Viscosité cinématique de la phase K.
$\psi$	: Tenseur de densité de masse.
$\rho_K$	: Masse volumique de la phase K.
$\sigma$	: Tension superficielle.
$\Sigma'$	: Tenseur des contraintes tangentielles.
$\tau_{IK\beta}$	: Cisaillement interfacial de la phase K sur K+1 dans la configuration $\beta$ .
$\tau_{WK\beta}$	: Cisaillement pariétal.
$\chi_K$	: Fonction de la présence de phase K.

#### INDICES :

B	: Bouchon.
D	: Dispersé.
F	: Film.
G	: Gaz.
I	: Interface.
L	: Liquide.
I	: Compteur d'évènement.
P	: Poche.
S	: Séparé.
W	: Paroi.

#### OPERATEUR :

$\overline{\quad}$	: Moyenne temporelle.
$\langle \quad \rangle$	: Moyenne spatiale.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BARNEA D. , N. BRAUNER - 1985 - " Holdup of the liquid slug in two phase intermittent flow " *Int. Journal. Multiphase Flow* .Vol 11. N° 1. pp. 43-49 .
- BARNEA D. - 1986 - " Transition from annular flow and from dispersed bubble flow unified models for the whole range of pipe inclinations " *Int. J. Multiphase Flow*. Vol. 12 N° 5 . pp. 733-744 .
- BARNEA D. - 1987 - " A unified model for predicting flow pattern transitions for the whole range of pipe inclinations " *Int. J. Multiphase Flow* . Vol. 13 , N° 1. PP. 1-12
- CHARLES M.E., GOVIER G.W., HODGSON G. W. - 1961 - *Can. J. Chem. Eng.*, 39, 27
- CLIFT R- GRACE J.R. - 1978 - " Bubbles, drops, and particles " Academic Press - New-York.
- COLLINS R. , F.F. MORAES , J.F. DAVIDSON et D. HARRISON - 1978 -" The motion of large gas bubbles rising through liquid flowing in a tube " *J. Fluid. Mech.* 89 , pp.497-514 .
- DUKLER A.E. - Y. TAITEL - 1983 - " Two phase gas - liquid flow " A short Course by University of Houston .
- DUKLER A.E.,MARON D.M., BRAUNER N. - 1985 - "A physical model for predicting the minimum stable slug length" , 40, pp.1379-1385
- FABRE J. - G. FERSCHNEIDER - L. MASBERNAT - 1983 - " Intermittent gaz-liquid flow modelisation in horizontal or weakly inclined pipes"International Conference of the Physical modelling of Multiphase flow . 19-21 April - Coventry U.K.
- FERNANDEZ R.C. , R. SEMIAT , A.E. DUKLER - 1983 -"Hydrodynamic model for gas - liquid slug flow in vertical tubes " *AIChE Journal* , Vol 29 , N° 6 , PP. 981 - 989 .
- FRECHOU D. - 1986 -" Etude de l'écoulement vertical ascendant à trois fluides en conduites verticale" Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse - Institut de Mécanique des Fluides .
- GOVIER G.W.; AZIZ K.; FOGARASI M. - 1972 - " pressure drops in wells producing oil and gaz". *J. of. Can. Petr.*, July, pp. 38-46
- GRIFFITH P. and G.B. WALLIS - 1961 - " Two phase slug flow " *Journal of Heat Transfer of ASME* . August .pp 307-320 .
- HARMATY T.Z.- 1960 - " Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extend " *AIChE Journal* , 6 , 281 .
- ISHII M. - 1975 - "Thermo-fluid dynamic theory of two phase flows" Ed. EYROLLES.

- KETTAB A., LINE, A., MASBERNAT, L.-1990 a- "Ecoulements diphasiques en conduites verticales " Part. I : "Ecoulements liquide-liquide en conduites verticales et légèrement déviées." A paraître JOURNAL. OF TECHNOLOGY.
- KETTAB A., LINE, A., MASBERNAT, L.-1990c-"Modélisations du frottement interfacial et pariétal en écoulement liquide-liquide." A soumettre au JOURNAL DE L' I.F.P.
- KOECK C. - 1980 - " étude du frottement pariétal dans un écoulement diphasique vertical ascendant". Thèse de Docteur-Ingénieur. Univ. P & M Curie. Paris VI centre d'Orsay.
- LINE A., MASBERNAT L. - 1985 - "Ecoulement intermittent de gaz et de liquide en conduite verticale" Revue de l'Institut Français de Pétrole, Vol. 40, N° 3, pp. 323-328
- LINE A.- 1983 -" Ecoulement intermittent de gaz et de liquide en conduite verticale " Thèse de Docteur Ingénieur I.M.F.T / I.N.P.T.
- MACQUILLAN K.W., WHALLEY P.B. - 1985 - "Flow patterns in vertical two phase flow" Int. J. Multiphase Flow, Vol. 11, N° 2, pp.161-175
- MASBERNAT L. - 1988 -" Mécaniques des fluides " Cours polycopiés à l'I.M.F.T / I.N.P.T.
- NICKLIN D.J. ; DAVIDSON J.F. - 1970 - " the outset of instability on two phase slud flow". Inst. Mech. Eng. ( London). Proc. of. Symp. on two phase flow (paper4)
- ROS N.C.J. - 1961 - " simultaneous flow of gaz and liquid as encountered in well tubing". J. Pet. Tech. 13. pp.1037-1049
- RUSSEL T. W. C., HODGSON G. W., GOVIER G. W. - 1959 - Can. J. Chem. Eng., 37, 9
- TAITEL Y. , D. BORNEA , A.E. DUCKLER - 1980 -" Modelling flow pattern transitions for steady upward gaz-liquid in vertical tubes " AIChE Journal , Vol 3 , PP. 345 - 354 .
- TAITEL Y. - A.E. DUKLER - 1977 - " A model for slug frequency during gaz-liquid flow in horizontal and near horizontal pipes " Int.J.Multiphase.Flow. Vol 3 , PP.585-596 .
- THOMAS G. G. - 1981 -" Bubble coalescence in turbulent flows "Int. J. M. Flow Vol. N° 6; pp. 709-717
- WALLIS G.B.- 1969 - " One dimensional two-phase flow " Mac Graw Hill Book CO. , NEW YORK .
- ZUKOSKI E.E. - 1966 - " influence of viscosity, surface tension, and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes" J. Fluid. Mech. vol.25 part. 4, pp.821-837



Interactions énergétiques lors de l'adsorption sur charbon actif .

\* cas de quelques molécules aromatiques .

---

par Abdelkader GAID

Laboratoire de Chimie des eaux

Université des sciences et de la technologie "Houari Boumediene"

B . P . n°9 . Dar el beida . Alger . Algérie

---

abstract : Soluté - solvant - Carbon interaction is examined on this paper .

A detailed analysis of the interactions between soluté - carbon , solvent - carbon , and soluté - solvent are considered for aromatic organic molecules .

The energies required for each interaction ( energy for Van der Waals forces , electrostatique free energy , etc...) are evaluated .

résumé : nous nous proposons d'examiner les différentes interactions intervenant dans le processus d'adsorption moléculaire . Une analyse détaillée de chaque interaction soluté - charbon , solvant - charbon , et soluté - solvant est effectuée dans le cas de quelques molécules organiques aromatiques . Ces interactions sont explicitées sous forme d'énergie spécifique à chacune de ces interactions. Elles concernent l'énergie due aux forces de Van der Waals , celle due aux forces électrostatiques etc...

L'adsorption des molécules organiques sur un support tel que le charbon actif dépend de divers paramètres tels que : la porosité , la surface spécifique , la granulométrie , la taille et les dimensions des molécules et également de leur solubilité dans la phase aqueuse .

En effet , il est vrai qu' en solution aqueuse notamment , l'adsorption de molécules sur charbon actif est régie par des forces physiques ( non covalentes ) . Il en découle des liaisons hydrogènes dues à des forces attractives entre le soluté et le support .

D'autre part existent des interactions hydrophobiques découlant d'une répulsion entre les molécules d'eau et les régions non polaires du charbon actif .

Mais du fait de la très forte cohésion énergétique des molécules d'eau , les molécules non polaires et les régions non polaires du support sont rejetées de la phase eau et peuvent alors s'associer . Ce phénomène a été explicité en termes d'icebergs microscopiques entourant les molécules de soluté non polaires présentes dans l'eau<sup>(1)</sup> . Nous nous sommes proposés d'examiner à partir de l'adsorption de quelques molécules organiques aromatiques ( phénol , aniline , benzène , alcool benzylique , et benzaldéhyde ) , les différentes interactions énergétiques qui interviennent lors de l'adsorption sur charbon actif .

#### I) Bilan des interactions énergétiques

Trois types d'affinités interviennent dans le mécanisme d'adsorption :

- 1) l'affinité du soluté pour la surface adsorbante (  $j \rightarrow s$  )
- 2) l'affinité du soluté pour le solvant (  $j \rightarrow i$  )
- 3 ) l'affinité du solvant pour la surface adsorbante (  $i \rightarrow s$  )

L'énergie totale d'adsorption s'écrit :

$$E_T = E_{js} - E_{is} - E_{ji}$$

où  $E_T$  est l'énergie totale d'adsorption

$E_{js}$  est l'énergie requise pour le système soluté - charbon

$E_{is}$  est l'énergie requise pour le système solvant - charbon

$E_{ji}$  est l'énergie requise pour le système solvant - soluté



Ce bilan ne fait pas intervenir l'énergie de diffusion . Pour qu'il y ait adsorption il faut que  $E_{js} > ( E_{ji} + E_{is} )$  . Cette énergie est guidée par les paramètres cités précédemment , et notamment la solubilité .

Nous nous proposons à présent d'examiner les énergie requises dans les différentes interactions .

a) interactions énergétiques soluté - solvant

Dans notre cas , le solvant est l'eau . L'énergie d'attraction entre l'eau et le soluté est la somme de l'énergie due aux forces de Van der Waals et celle due aux forces électrostatiques .

soit :

$$E_{ij} = E_{vdw,j} + E_{es,j}$$

En adoptant le modèle de HORVATH et Coll. (2) et SINANOGLU (3) , on peut écrire que l'énergie due aux forces de Van der Waals est :

$$E_{vdw,j} = - f ( \zeta , l ) \Delta_j D_j DB_j$$

où  $\Delta_j$  est une fonction dépendant du potentiel d'ionisation de l'eau et du soluté

$$\Delta_j = 1,35 \frac{I_j I}{I_j + I}$$

I et  $I_j$  sont respectivement les potentiels d'ionisation de l'eau et du soluté.

$$D_j = \frac{n_j^2 - 1}{n_j^2 + 2}$$

où  $n_j$  est l'indice de refraction du soluté .  $D_j$  étant la fonction de CLAUSIUS - MOSOTTI .

On obtient D pour l'eau suivant le même raisonnement .

La fonction  $f(\zeta, l) B_j$ , sans dimension, est relative essentiellement aux dimensions des molécules du soluté et du solvant (3).

Elle s'écrit :

$$-f(\zeta, l) B_j = \frac{27}{8\kappa} (1-x)(Q' + Q'')$$

avec pour la plupart des liquides  $Q'' < 0,1 \cdot Q'$ , permettant de négliger  $Q''$ .  
SINANOGLU (3) admet pour tous les solvants polaires et non polaires, une valeur de  $x$  égale à 0,436.

$Q'$  est donnée par la relation :

$$Q' = \gamma_j \left( \frac{\psi}{(\bar{R}-1)^9} \left( \frac{t^2}{11} + \frac{t}{5} + \frac{1}{9} \right) - \frac{1}{(\bar{R}-1)^3} \left( \frac{t^2}{5} + \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \right) \right)$$

avec  $t = \frac{1}{\bar{R}-1}$

$\bar{R}$  est le diamètre arithmétique des molécules de soluté et d'eau.

$$\bar{R} = \frac{1}{2} (R_j + R)$$

$l$  est le paramètre de Kihara :  $l = \frac{1}{2} (l_j + 1)$

$\psi$  est le paramètre de London  $\bar{\psi} = \frac{1}{2} (\psi_j + \psi)$

$\gamma_j$  est le volume molaire du soluté

Les données relatives au soluté sont déterminées de manière empirique et correspondent approximativement aux équations suivantes :

$$R_j = 1,74 \left( \frac{3\gamma_j}{4\kappa} \right)^{1/3}$$

$$l_j = 1,74 \left( \frac{3\gamma_j}{4\kappa} \right)^{1/3} \frac{0,24 + 7 w_j}{3,24 + 7 w_j}$$

$$\varphi_j = \left( \frac{3V_j}{4\lambda} \right)^{1/3} \frac{4,64}{3,24 + 7 w_j}$$

$w_j$  est le facteur acentrique du soluté et est évalué à partir de la géométrie des différentes molécules .

L'énergie due aux forces électrostatiques s'écrit :

$$E_{es,j} = - \frac{N}{2} \frac{\mu_j^2}{V_j} \mathcal{D} \cdot \mathcal{P} = - \frac{\mu_j^2}{2 V_j} \mathcal{D} \cdot \mathcal{P}$$

où  $\mu_j$  est le moment dipolaire du soluté ;  $\mathcal{D}$  est une fonction dépendante de la constante diélectrique du solvant  $\mathcal{D} = \frac{2(\epsilon - 1)}{2\epsilon + 1}$

$\mathcal{P}$  est un paramètre dépendant de la polarisabilité  $\alpha$  du soluté :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4 \epsilon_0 \left( 1 - \mathcal{D} \frac{\alpha_j}{V_j} \right)}$$

$\epsilon_0$  est la constante de permittivité

La constante de polarisabilité  $\alpha$  peut être obtenue à partir de l'équation :

$$\alpha_j = \frac{3}{4\lambda N} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)$$

qui conduit à :

$$\frac{\alpha_j}{V_j} = \frac{3}{4\lambda V_j} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

L'équation relative aux interactions soluté - solvant s'écrit alors :

$$E_{i,j} = E_{vdw,j} + E_{es,j} = - f(\zeta, 1) \Delta_j D_j DB_j - \frac{\mu_j^2}{2 V_j} \mathcal{D} \cdot \mathcal{P}$$



b) interactions solvant - support

Ceci correspond dans notre cas aux interactions eau - charbon actif .

Une interaction solide - liquide conduit à l'obtention d'une quantité de chaleur appelée chaleur d'immersion , quand on immerge 1 g de ce solide dans un liquide avec lequel il ne réagit pas et dans lequel il ne se dissout pas .

Cette chaleur d'immersion correspond à :

$$h_1^0 = h_S - h_{SL}$$

où  $h_1^0$  est la chaleur d'immersion ;  $h_S$  est l'enthalpie de surface du solide ; et  $h_{SL}$  est l'enthalpie de l'interface solide - liquide .

Pour ROBERT<sup>(4)</sup>, les molécules du liquide qui se trouvent au contact du solide sont dans un état d'orientation et d'organisation mutuelle qui est différente de celui qui a lieu au sein du liquide . Cet état correspond à un état adsorbé. Ces molécules forment un film d'adsorption .

Si on suppose que l'on puisse développer 1 cm<sup>2</sup> de surface du liquide d'immersion de manière que les molécules de la couche superficielle soient dans le même état d'organisation et d'agitation que dans le film interfacial en contact avec le solide immergé, ce liquide artificiel L' possèdera une enthalpie de surface égale à  $h_{L'}$ .

L'enthalpie de surface d'un liquide est reliée à sa tension superficielle par :

$$h_L = \gamma_L - T \frac{d\gamma_L}{dT}$$

La quantité de chaleur recueillie lorsqu'on met en contact 1 cm<sup>2</sup> de surface de liquide L' avec 1 cm<sup>2</sup> de surface du solide , est :

$$h_a = h_{L'} = h_S - h_{SL} = h_{L'} + h_1^0$$

ROBERT<sup>(4)</sup> admet les hypothèses suivantes :

- le film d'adsorption est pratiquement unimoléculaire
- l'organisation des molécules y est la même que dans le film d'adsorption unimoléculaire en phase vapeur , c'est à dire que l'aire d'encombrement superficielle des molécules adsorbées y est la même.



- l'orientation des molécules et leur distance d'équilibre d'adsorption y sont les mêmes que pour une molécule isolée .

soit alors :

$$h_a = - E_{is} \gamma_m = - \frac{E_{is}}{1,44 G'}$$

où  $\gamma_m$  est le nombre de moles par  $\text{cm}^2$  de film interfacial ;  $G'$  est l'aire d'encombrement superficielle ( en  $\text{Å}^2$  ) ;  $E_{is}$  est l'énergie d'adsorption d'une molécule venant s'adsorber seule sur le solide vierge .

$$\text{Soit : } - E_{is} = 1,44 h_a G'$$

### c) interactions soluté - support

Le même raisonnement peut être appliqué pour ce type d'interactions où la soluté remplace l'eau . Cependant la grosse approximation faite pour l'interaction eau - charbon ne peut être considérée ici .

L'énergie de ce type d'interactions est obtenue par différence entre les autres énergies calculées :

$$\text{soit : } E_{js} = E_T + E_{is} + E_{ij}$$

$E_T$  qui est l'énergie totale d'adsorption d'un soluté sur le charbon actif est obtenue à partir de l'équation de Langmuir :

$$C_c = \frac{C^* b C}{1 + bC}$$

où  $C_c$  est la masse de soluté adsorbée par unité de masse de charbon ;  $C^*$  est la capacité maximum d'adsorption du matériau ,  $C$  est la concentration du soluté en solution , à l'équilibre , et  $b$  est le rapport  $k_1/k_2$  des vitesses d'adsorption et de désorption . Ce terme dépend de l'énergie d'adsorption suivant la relation :

$$b = b' e^{-E_a / RT}$$

En admettant grossièrement que  $k_1/k_2 = 1$ , on peut en déduire l'énergie totale d'adsorption par

$$E_T = RT \ln \frac{C_c}{C_c^* - C_c}$$

## II ) Résultats expérimentaux

### II - 1 Mode experimental

Les essais d'adsorption sont effectués avec du charbon actif ( Picactif) dont les caractéristiques sont les suivantes :

Aire spécifique : 1000 m <sup>2</sup> /g	granulométrie : 1,5 - 2,5 mm
Teneur en cendres : 3 %	Pouvoir adsorbant : 1000 - 2000 melasse
Pouvoir adsorbant : 60 % min. CCL <sub>4</sub>	Pouvoir adsorbant : 40 % min. Iode
Teneur en humidité : 3 % max. activation : thermique	Fonctions surface : 0,453 10 <sup>-3</sup> meq/m <sup>2</sup>
	Matière première : noix de coco

Tableau I : caractéristiques du charbon actif

Les molécules organiques aromatiques utilisées sont :

Phénol , aniline , benzaldéhyde , benzène , alcool benzylique .

Aux cours des cinétiques d'adsorption , ces molécules sont dosées par chromatographie en phase gazeuse . La température des essais est de 20°C .

### II - 2 ) protocole expérimental

Toutes les cinétiques d'adsorption sont réalisées selon le même protocole experimental:

Dans un bécher disposé sur un agitateur magnétique , on introduit un litre d'eau distillée contenant ne substrat à adsorber , puis différentes masses de charbon actif ( variables entre 0,5 et 25 g/l ) . Des prélèvements réguliers effectués au cours du temps permettent de suivre l'évolution du substrat restant en solution.

La manipulation est achevée lorsqu'un équilibre est atteint c'est à dire lorsque la concentration du substrat restant en solution reste constante , à l'échelle de l'essai c'est à dire environ sur un jour .

### II - 3 ) Resultats et discussion

a) Calcul de l'énergie totale d'adsorption :

Les cinétiques d'adsorption ont conduit aux résultats suivants :

molécule	$C_c$ mole/g . 10 <sup>5</sup>	$C^*$ mole/g 10 <sup>5</sup>	C mole/l 10 <sup>5</sup>	T °K	$E_T$ cal/ mole
Phénol	8,93	168	1,06	293	- 1710,5
Aniline	30,00	139,6	4,02	293	- 1564,3
Benzène	42,50	200,5	23,08	293	- 2591,9
Alc. Benzylique	8,04	146,1	2,77	293	- 2248,4
Benzaldéhyde	7,40	188,4	1,13	293	- 1932,6

Tableau 2 : Determination de l'énergie totale d'adsorption

b) calcul de l'énergie due à l'interaction soluté - solvant :

A partir des paramètres déterminés sur les tableaux ( 3 , 4 ) , nous pouvons aisément calculer les énergies dues aux forces de Van der Waals (  $E_{vdw,j}$  ) et aux forces électrostatiques (  $E_{es,j}$  ) . Le tableau ( 5 ) montre que pour les molécules aromatiques utilisées , on obtient des valeurs d'énergie attribuée aux forces de Van der Waals de l'ordre de ( - 10 à -11 kcal/mole ) .

L'énergie électrostatique est directement liée au moment dipolaire de la molécule . Cette énergie est nulle pour le benzène , élevée pour le benzaldéhyde ( - 2,2 kcal/mole ), et sensiblement la même pour le phénol , l'aniline et l'alcool benzylique se situant



molécules	$\eta^{20}$	$I_{ev}$	$\mu_{Debye}$	$\epsilon_{20^\circ C}$	$pK_1$	w	$\rho$ g/l	$d_{20}^{20}$	$M_w$
Phenol	1,5408	8,51	1,61	9,78	9,99	0,260	93	1,0573	94,11
Aniline	1,5863	7,70	1,52	6,89	4,63	0,262	37	1,0217	93,13
Benzène	1,5011	9,24	0	2,28	-	0,215	0,73	0,8765	78
Alc. Benzylque	1,5446	9,14	1,60	13,1	-	0,245	38	1,0419	108,15
Benzaldéhyde	1,5446	9,52	2,75	17,8	-	0,241	3	1,0415	106,15
H <sub>2</sub> O	1,3329	12,6	-	80,37	-	0,348	-	1,0000	18

Tableau 3 : paramètres pour la détermination de  $E_{i,j}$

molécules	$\Delta_j^j$ cal/mol	$D_j$	$\mathcal{D}$	$\gamma_j$	$R_{10^{3,66}j}$	$\frac{1}{10^{3,66}j}$	$\psi_j^{3,66}$	$\bar{R}_{10^{3,66}j}$	$\bar{\psi}_{10^{3,66}j}$	$Q_j$	$\alpha_{j/\gamma_j}$
Phénol	158,97	0,314	0,981	88,98	2,65	1,060	1,407	2,102	1,110	0,96	0,00084
Aniline	148,71	0,335	0,981	91,15	2,669	1,067	1,413	2,109	1,117	0,993	0,00066
Benzène	167,04	0,294	0,981	88,99	2,646	1,058	1,405	2,098	1,113	1,023	0,00079
Alc. Benzylque	164,85	0,313	0,981	103,80	2,787	1,114	1,479	2,168	1,150	1,056	0,00054
Benzaldéhyde	168,74	0,315	0,981	101,90	2,770	1,108	1,471	2,160	1,146	1,051	0,00056

Tableau 4 : Détermination de  $E_{i,j}$  (7)



( - 7,5 et - 9,5 kcal/mole ). L'energie due à l'interaction soluté - eau est de l'ordre de ( -10 ) à ( -13 ) kcal/mole pour les molécules aromatiques étudiées.

	$E_{vdw,j}$ cal/mole	$E_{es,j}$ cal/mole	$E_{ij}$ cal/mole
Aniline	- 10140	- 776	- 10916
Phénol	- 9820	- 941	-10761
Benzène	- 10280	0	- 10280
Alc.Benzylique	- 11150	- 851	- 12001
Benzaldéhyde	- 11430	- 2274	- 13704

Tableau 5 : Determination de l'energie due aux interactions soluté - eau .

c) Calcul de l'energie due à l'interaction eau - charbon

Dans ce type d'interaction , nous admettrons une valeur de la chaleur d'immersion égale à 8,5 cal/ g charbon . CULBERTSON et WINTER<sup>(5)</sup> proposent 8,4 cal/g . ROBERT<sup>(6)</sup> trouve des valeurs variables entre 8 et 9 cal/g sur des noirs de carbone ( 80-100 m<sup>2</sup>/g). Sur le Picactif ( 1000 m<sup>2</sup>/g ) , on obtient  $h_1^0 = 34 \text{ erg / cm}^2$  . L'enthalpie superficielle du liquide d'immersion ( eau ) est égale à 118 erg/cm<sup>2</sup> . On en deduit pour une aire d'encombrement  $\sigma'$  égale à 13 Å<sup>02</sup> , une valeur de  $E_{is}$  de :

$$E_{is} = - 3000 \text{ cal/mole}$$

d) Calcul de l'énergie des interactions soluté - charbon

A partir des valeurs précédemment déterminées pour les différentes interactions, nous nous proposons à présent de tirer celle correspondant à l'interaction soluté-charbon pour les molécules étudiées <sup>(8)</sup>.

On a :

$$E_{js} = E_T + E_{is} + E_{ij}$$

Les valeurs présentées sur le tableau 6 montrent que l'énergie due aux interactions molécule aromatique - charbon varie entre 10 et 12 kcal/mole .

Nous observons bien , dans chaque cas , que  $E_{js}$  est inférieure à  $(E_{is} + E_{ij})$  avec des différences de l'ordre de 1,5 à 2,5 kcal/mole .

Plus cette valeur est élevée , meilleure est l'adsorption .

molécules	$E_{ij}$ cal/mole	$E_T$ cal/mole	$E_{is}$ cal/mole	$E_{js}$ cal/mole
phénol	-10761	1710,5	- 3000	- 12050,5
Aniline	- 10916	1564,3	- 3000	- 12351,8
Benzéne	- 10280	2591,9	- 3000	- 10688,1
Alc. Benzylique	- 12001	2248,4	- 3000	- 12752,6
Benzaldéhyde	- 13704	1932,6	- 3000	- 14771,4

tableau 6 : Bilan énergétique pour les molécules aromatiques lors de leur adsorption sur charbon actif.

### Conclusion

Cette étude sur les différentes interactions intervenant lors de l'adsorption des molécules aromatiques , sur le charbon actif a permis de mettre en évidence par le biais des différentes énergies présentes , le rôle des affinités soluté - eau - charbon. En étendant ces essais à d'autres molécules aromatiques , il serait intéressant de pouvoir confirmer les résultats **acquis** pour les molécules monosubstituées . A partir de la chaleur d'immersion et de l'enthalpie superficielle du charbon , il devrait être possible de prévoir les possibilités d'adsorption des solutés . Il va de soit que les énergies calculées ne sont valables que pour un charbon donné , puisque lors de l'adsorption interviennent les propriétés physiques du matériau .

### Bibliographie

- 1 - J.S. MATISON , H.B. MARK Jr., "Activated Carbon " , Marcel DEKKER Inc., New-york, 1971 .
- 2 - C.HORVATH , W.MELANDER , I.MOLNAR , J.of Chromatography, 1976 , 125 , 129.
- 3 - O.SINANOGU , Theoret. Chim. Acta , 1974 , 33 , 279 .
- 4 - L. ROBERT , Rev. Gen . Caoutchouc , 1964 , 41 , 3 , 371 .
- 5 - H . CULBERTSON , P. WINTER , " Carbon Adsorption Handbook " , Ann Arbor Sc., 1970 .
- 6 - L. ROBERT , C.R. Acad. Sciences , 1961 , 252 , 2105 .
- 7 - Hand book of chemistry and physics , Chemical rubber publishing Co., Cleveland, 1981 .
- 8 - K.GAÏD , Thèse Doct. es Sc. , Université de Rennes , n°344 , 1981 .



## RECOMMANDATIONS AUX AUTEURS POUR LA REPRESENTATION D'UN ARTICLE

Les contributions se présentent sous forme:

- d'articles de synthèse, ou monographiques,
- d'articles sur un sujet spécifique à caractère scientifique et/ou technologique, pouvant être le résultat de travaux de recherche,
- de communications courtes originales,
- des comptes rendus de séminaires, symposiums conférences etc...

Elles doivent être à l'adresse ci-dessous, accompagnées des originaux des figures, à l'intention du rédacteur en chef:

Chaque article sera lu et apprécié par deux ou trois correcteurs désignés par le comité de rédaction sur proposition du conseil scientifique.

Les textes acceptés pour la publication ne seront pas retournés aux auteurs.

Après acceptation définitive, il ne sera pas possible d'inclure des informations complémentaires, ni d'accepter des corrections d'auteurs.

Les auteurs recevront les épreuves à relire avant publication.

Elles devront être retournées au plus tard dans les quinze jours.

### 1. TITRE DE L'ARTICLE :

Le titre de l'article, le nom des auteurs et l'adresse postale complète doivent apparaître en tête de l'article.

Afin de faciliter la correspondance, il est souhaitable que l'adresse personnelle soit communiquée, ainsi que le numéro de téléphone.

### 2. RESUME

Un résumé de 100 à 200 mots doit apparaître sur la première page réservé à cet effet. Il doit être proposé en Arabe, en Anglais et en Français dans cet ordre. Un résumé n'est pas demandé pour les communications courtes. La publication devant se faire obligatoirement dans l'une de ces 3 langues.

### 3 PRESENTATION DU TEXTE :

Les textes doivent être envoyés en trois exemplaires dactylographiés sur une page recto seulement avec une marge relativement au bord de 3 cm de manière que la partie écrite s'inscrive dans un format 21x13 cm. La revue étant elle même d'un format 27 x 19 cm et l'impression est faite recto-verso, chaque publication doit comporter une dizaine de pages environ.

La rédaction peut déroger à cette condition selon les cas



Une page comporte environ 35 lignes, et chaque ligne, 50 lettres. Les lettres grecques et les symboles inhabituels seront identifiés en toutes lettres dans la marge du manuscrit la première fois qu'ils seront utilisés.

Les équations doivent être numérotées dans le texte en chiffres arabes et en évitera l'emploi simultanés des indices.

Les références dans le texte apparaîtront par numéro entre crochets placées éventuellement après le nom d'un ou deux auteurs au maximum. La liste des références sera frappée en double interligne à la fin du texte dans l'ordre avec lequel elles apparaissent dans le texte. Pour les articles, la présentation suivante est conseillée : Nom et initiales des auteurs, titre de l'article nom du journal, volume, chapitre ou page et la date entre parenthèses. La nomenclature et les abréviations doivent être présentées par ordre alphabétique en fin de texte avant la liste des références. Le système d'unités employé est le système international. Toutefois, si la pratique industrielle ou les conventions utilisées dans le domaine nécessitent un autre système d'unités, l'équivalence dans le système international devra apparaître entre parenthèses.

#### 4. PRESENTATION DES FIGURES :

Les originaux des figures devront être envoyés sur papier calque blanc dessinées à l'encre de chine. Les légendes figures devront se trouver sur une feuille accompagnant le texte manuscrit mais en aucun cas ne seront insérées sur la figure elle-même.

Les photographies, bien contrastées doivent s'inscrire dans le format 15 X10. La numérotation des figures et des photographies et commune. Une liste doit en être fournie à part, avec leurs titres.

Toutes les figures doivent être présentées dans le texte : (Fig) aux emplacements souhaités.

#### 5. PRESENTATION DES TABLEAUX :

Ils sont numérotés à part des figures et doivent être présentés dans le texte : (tableau 1) aux emplacements qui leur sont destinés.

Adresse : Monsieur A. ZERGUERRAS Rédacteur en chef  
"journal of Technology"  
Ecole Nationale Polytechnique  
Avenue Pasteur - Hassen Badi ALGER 10°

Tél : 76 59 29 - 76 53 03 - 76 53 01

-----  
Je désire souscrire un abonnement annuel au journal of  
Technology

Nom:.....

Raison Social:.....

Adresse:..... Abonnement annuel(1)

Prix promotionnel

..... 2 numéros:80 DA ALGERIE

90 FF ETRANGER

15 \$ U.S "

Je joins mon règlement à la demande

au compte C.C.P N° 16196-58

signature

Agent comptable

Ecole Nationale Polytechnique

B.P. N° 182

Hacen-Badi EL-HARRACH

(1)Frais d'envois en sus

-----  
Ecole Nationale Polytechnique

B.P.N°182

Hacen-Badi EL-Harrach

Alger 10° ALGERIE

-----  
Je désire souscrire un abonnement annuel au journal of  
Technology

Nom:.....

Raison Social:.....

Adresse:..... Abonnement annuel (1)

Prix promotionnel

2 numéros:80 DA ALGERIE

90 FF ETRANGER

15 \$ U.S "

Je joins mon règlement à la demande

au compte C.C.P N° 16196-58

Signature

Agent comptable

Ecole Nationale Polytechnique

B.P N° 182

Hacen-Badi EL-HARRACH

(1)Frais d'envois en sus

-----  
Ecole Nationale Polytechnique

B.P.N° 182

Hacen-Badi EL-HARRACH

Alger 10° ALGERIE

*Achévé d'imprimer sur les presses de*

**L'OFFICE DES PUBLICATIONS  
UNIVERSITAIRES**

*1, Place Centrale - Ben-Aknoun - ALGER*



## TABLE DES MATIERES

	Pages
1-Modélisation d'antennes plaques multicouches de forme arbitraire en mode quasi T.E.M. R.AKSAS - A.ZERGUERRAS	1
2-Utilisation de l'algorithme L.B.G et du Treillis quantification vectorielle D.BERKANI - A.CHEKIMA -B.DERRAS - G.TURGEON	35
3-Sensibilite du coût d'usinage aux variations des parametres de coupe D.LEBLANC - M.KHALFOUN	53
4-Optimisation des paramètres d'amortissement d'un camion sous l'effet des excitations aléatoires M.KSIAZEK - A.MEDDAD	77
5-Profiles des tuyères supersoniques R.HAQUI -A.GAHMOUSSE	88
6-Ecoulements diphasiques en conduites verticales part I . écoulements liquide -liquide A.KETTAB - A.LINE - L.MESBERNAT	98
7-Ecoulement diphasiques en conduites verticales part II . Modélisation en écoulements gaz-liquide A.KETTAB - A.LINE - L.MASBERNAT	138
8-Interactions énergétiques lors de l'adsorption sur charbon actif- cas de quelques molécules aromatiques- A.GAID	168