

An International Publication of Engineering Science



# AJOT

**ALGERIAN JOURNAL OF TECHNOLOGY**

**Workshop sur la Modélisation  
En Electrotechnique et en Mécanique**

**MEM'05**

Organisé par les Laboratoires de Recherche  
LRE et LGMD de l'ENP Alger  
GREEN et LEMTA de l'ENSEM Nancy

**ENP-Alger 13-14 Avril 2005**

Numéro Spécial

ISSN 1111-357X

An International Publication of Engineering Science



# AJOT

**ALGERIAN JOURNAL OF TECHNOLOGY**

**Workshop sur la Modélisation  
En Electrotechnique et en Mécanique**

**MEM'05**

Organisé par les Laboratoires de Recherche  
LRE et LGMD de l'ENP Alger  
GREEN et LEMTA de l'ENSEM Nancy

**ENP-Alger 13-14 Avril 2005**

Numéro Spécial

ISSN 1111-357X



## Workshop sur la Modélisation En Electrotechnique et en Mécanique MEM'05

13-14 avril 2005 ENP, Alger-ALGERIE

<http://www.enp.edu.dz/mem05.html>

### Organisé par :

Laboratoires de Recherche et Institutions : LRE et LGMD, ENP Alger ; GREEN et LEMTA, INPL, UHP Nancy.

### Président d'honneur :

Pr. M. K. BERRAH, Directeur de l'ENP, Alger, Algérie

### Présidents du Comité Scientifique :

Pr. B. LAPORTE INPL, Nancy, France

Pr. G. MAURICE INPL, Nancy, France

### Co-Présidents du Comité Scientifique :

Pr R. IBTIOUEN, ENP Alger, Algérie

Pr S. RECHAK, ENP Alger, Algérie

### Président du Comité d'Organisation :

Pr. A. BOUBAKEUR, ENP Alger, Algérie

### Co-Présidents du Comité d'Organisation :

Dr. M. OUADJAOUT, ENP Alger, Algérie

Dr. N. TAKORABET, GREEN, INPL, Nancy, France

### Membres du Comité Scientifique :

Pr A. BALI, ENP Alger, Algérie

Pr A. BOUBAKEUR, ENP, Algérie

Pr. M. S. BOUCHERIT, ENP Alger, Algérie

Pr F. BOUDJEMA, ENP Alger, Algérie

Pr. C. CUNAT, LEMTA, INPL, Nancy, France

Pr. H. DUCAUQUIS, LEMTA, INPL, Nancy, France

Pr. J.F. GANGHOFFER, LEMTA, INPL, Nancy, France

Pr. R. IBTIOUEN, ENP Alger, Algérie

Pr. B. LAPORTE, INPL, Nancy, France

Pr. G. MAURICE, LEMTA, INPL, Nancy, France

Pr. S. RECHAK, ENP Alger, Algérie

Pr O. TOUHAMI, ENP Alger, Algérie

Dr. M'b. TAGHITE LEMTA, UHP, Nancy, France

Dr N. TAKORABET, GREEN, INPL, Nancy, France

Dr. G. VINSARD LEMTA, INPL Nancy, France

### Membres du Comité d'Organisation :

Dr. M. OUADJAOUT, ENP Alger, Algérie

Dr M. BOUAZIZ, ENP Alger, Algérie

Dr. N. TAKORABET, GREEN, INPL, Nancy, France

Dr. M. HABOUSSI, LEMTA, INPL, Nancy, France

Dr M. BOUDOUR, USTHB, Bab-Ezzouar, Algérie

Dr. S. DUFOUR, GREEN, INPL, Nancy, France

Dr. M. O. MAHMOUDI, ENP Alger, Algérie

Dr. A. MEKHALDI, ENP Alger, Algérie

Dr. S. MEKHTOUB, ENP Alger, Algérie

Dr. S. MEZANI, Sheffield University, U. K.

Dr. M'b. TAGHITE, LEMTA, INPL, Nancy, France

### Secrétariat :

Dr C. LARBES, R. TAHMI, ENP Alger, M. LEMDJED ENP Alger, S. BOUAZABIA, USTHB, Alger.

## Avant - Propos

Les liens effectifs entre l'ENP et l'INPL en général et l'ENSEM Nancy en particulier, dans le domaine de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, remontent aux années soixante-dix. Aujourd'hui, à partir de deux accords-programmes en cours CMEP (TASSILI), deux équipes de l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP) d'Alger et deux autres équipes partenaires de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (ENSEM) de Nancy respectivement en Electrotechnique et en Mécanique, organisent une rencontre scientifique, Workshop MEM'05, permettant d'approfondir les liens de coopération qui existent entre elles.

Cette rencontre scientifique concerne le domaine de la modélisation théorique et numérique au niveau des sciences de l'Ingénieur dans les spécialités Electrotechnique et Mécanique. Elle permet de rassembler des chercheurs et des experts, et en particulier ceux des quatre Laboratoires de recherche des deux Etablissements (LRE et LGMD pour l'ENP et GREEN et LEMTA pour l'ENSEM), afin de discuter de l'état de l'art sur le thème de la modélisation lié aux deux domaines suscités, et de présenter les résultats les plus récents de leurs travaux de recherche ainsi que les perspectives de leurs futurs développements.

Vu l'intérêt suscité par ce Workshop, les organisateurs ont ouvert la participation aux chercheurs d'autres Laboratoires en Electrotechnique et en Mécanique travaillant sur les thèmes abordés. Ces thèmes, faisant partie des deux projets CMEP, sont pour l'aspect Electrotechnique : les méthodes de calcul en Electrotechnique, les calculs couplés (Electromagnétique, Thermique, Mécanique,...), la modélisation des dispositifs électromagnétiques, le couplage de champs attachés à des domaines en mouvements relatifs, l'optimisation et les problèmes inverses et les applications industrielles. En Mécanique, les thèmes sont : la thermo-élasticité, la viscoélasticité, la plasticité, la rupture, la fissuration, l'homogénéisation (multi-périodiques et multi-échelles), les matériaux composites, la prévision de la dégénérescence des modèles lors du passage micro-macro et les applications industrielles ou biologiques.

Le Comité d'organisation a reçu une cinquantaine de propositions émanant de 22 Laboratoires de recherche algériens et étrangers. Après une évaluation mixte algéro-française, le Comité Scientifique du Workshop MEM'05, a retenu 32 dont 50% proviennent des équipes partenaires des deux accord-programmes CMEP.

Cette rencontre scientifique s'inscrit dans le cadre de la coopération bilatérale entre l'Algérie et la France. Elle a eu le soutien de Monsieur le Directeur de l'ENP, le Pr M. K. Berrah, qui a mis les moyens nécessaires à la disposition du Comité d'Organisation présidé par notre dynamique Collègue Pr A. Boubakeur. Le Workshop a eu le soutien du MESRS à travers le Bureau CMEP représenté par Monsieur S. Nouar. Cette rencontre a eu le soutien concret de l'Ambassade de France à Alger sous couvert de Monsieur Jean Toussaint. Nous tenons à les remercier tous profondément.

Nos vifs remerciements s'adressent également aux deux Chefs de projets CMEP du côté français et présidents du Comité Scientifique du Workshop MEM'05, à savoir Monsieur le Pr B. Laporte pour l'Electrotechnique et Monsieur le Pr G. Maurice pour la Mécanique pour leur participation à la tenue de cette rencontre scientifique en lui donnant un caractère important. Nous tenons également à remercier tous les Collègues membres du Comité Scientifique et tous les Collègues membres du Comité d'Organisation ainsi que les membres du Secrétariat qui n'ont ménagé aucun effort pour le succès de cette rencontre.

Nous adressons nos remerciements particuliers à l'ADEP, à l'EDIEL d'El-Achour, au Groupe ELSECOM et à MICHELIN Algérie pour avoir apporté leur aide et leur contribution à la tenue de cette rencontre, favorisant le rapprochement entre nos Laboratoires et l'Industrie.

Pr R. Ibtouen

ENP

## Sommaire

	Pages
<p><b>S. Mezani , B. Laporte , N. Takorabet</b>  <i>Calcul du moteur à induction en tenant compte de la saturation et des harmoniques d'espace.</i></p>	09
<p>University of Sheffield EEE Department U. K            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France</p>	
<p><b>Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet</b>  <i>Maillage et Minimisation de la Largeur de Bande pour les Structures Cylindriques Creuses.</i></p>	21
<p>UMMTizi-Ouzou Algérie LRE-ENP Alger Algérie            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France</p>	
<p><b>R. Lateb, N. Takorabet , F. Meibody-Tabar</b>  <i>Méthodes de réduction du couple pulsatoire dans les machines synchrones à aimants permanents.</i></p>	27
<p>GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France</p>	
<p><b>Y. Ouazir, R. Ibtouen, N.Takorabet, O. Touhami</b>  <i>Analyse par EF de la magnétodynamique complexe couplée aux circuits électriques des machines à induction avec couplage des champs du stator et du rotor dans l'entrefer.</i></p>	33
<p>LRE-ENP Alger Algérie            LRE-ENP Alger Algérie            GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL Nancy France LRE-ENP Alger Algérie</p>	
<p><b>H. Bessai, A. Ait-Hammouda, S. Vivier, M. Hecquet, P. Brochet, R. Ibtouen</b>  <i>Etude de sensibilité acoustique d'une machine asynchrone à vitesse variable.</i></p>	39
<p>UMMTizi-Ouzou Algérie            L2EP-Ecole Centrale de Lille France            L2EP-Ecole Centrale de Lille France            L2EP-Ecole Centrale de Lille France            LRE-ENP Alger Algérie</p>	
<p><b>D. Kairous S. Mekhtoub R. Ibtouen O. Touhami</b>  <i>Modèle d'un générateur asynchrone auto-amorcé lors d'un retour réseau.</i></p>	49
<p>LRE-ENP Alger Algérie            LRE-ENP Alger Algérie            LRE-ENP Alger Algérie            LRE-ENP Alger Algérie</p>	
<p><b>H. Menana</b>  <i>Modélisation des courants induits dans une tôle mince conductrice.</i></p>	57
<p>LRE-ENP Alger Algérie</p>	
<p><b>H. Houassine, A. Bendjerad, D. Moussaoui</b>  <i>Modélisation Vectorielle des Pertes Magnétiques dans les Tôles FeSi 3% en Régime d'Induction Sinusoïdale.</i></p>	61
<p>LES-EMP Bordj-El-Bahri Algérie            LES-EMP Bordj-El-Bahri Algérie            LES-EMP Bordj-El-Bahri Algérie</p>	
<p><b>H. Bouzeboudja, B. Naama, A. Chaker</b>  <i>Optimisation des Puissances actives par les Algorithmes Génétiques.</i></p>	67
<p>USTOran Algérie            U. Djillali Liabes SBA Algérie            Lab. Réseaux Electriques ENSET Oran Algérie</p>	
<p><b>K. Boughrara, R. Ibtouen, O. Touhami</b>  <i>Step by step FEA analysis of Brushless Permanent Magnet Motor.</i></p>	73
<p>LRE-ENP Alger Algérie LRE-ENP Alger Algérie LRE-ENP Alger Algérie</p>	
<p><b>S. Laïssaoui, D. Sedira, A. Ladjimi et M. R. Mékidèche</b>  <i>Modélisation Magnéto-Thermique d'un Moteur à Induction.</i></p>	79
<p>LAMEL-Université de Jijel Algérie            LAMEL-Université de Jijel Algérie            LAMEL-Université de Jijel Algérie            LAMEL-Université de Jijel Algérie</p>	

<b>M. Zaouia, H. Mohellebi, A. Abdellah</b> <i>Modèle de couplage électro-magnéto-mécanique pour un lanceur électromagnétique multiphasé à deux étages.</i>	85
UMMTizi-Ouzou Algérie UMMTizi-Ouzou Algérie LES-EMP Bordj-El-Bahri Algérie	
<b>M. Bouheraoua, N. Benamrouche, S. Haddad</b> <i>Etude de la sensibilité d'un modèle thermique d'un moteur asynchrone à cage.</i>	91
UMMTizi-Ouzou Algérie UMMTizi-Ouzou Algérie UMMTizi-Ouzou Algérie	
<b>H. Bali, Z. Boulassel-Belli, Y. Cheriguen</b> <i>Couplage magnétique-électrique sous environnement MatLab.</i>	97
Université de Jijel Algérie Université de Jijel Algérie Université de Jijel Algérie	
<b>L. Mokhnache, P. Verma, A. Boubakeur, R. Kattan</b> <i>Neuro-Fuzzy Applications in High Voltage Transformer Oil Maintenance.</i>	103
Université de Batna Algérie Thapan Institute of Engineering & Technology, Patiala -147 004, India LRE-ENP Alger Algérie Université libanaise, Beyrouth, Liban	
<b>S. Bouazabia, L. Hadjout, M. Boulahbal</b> <i>Modélisation d'une décharge surfacique dans un système cercle-cercle sous tension alternative.</i>	113
Département d'Electrotechnique, USTHB Alger Algérie Département d'Electrotechnique, USTHB Alger Algérie Département d'Electrotechnique, USTHB Alger Algérie	
<b>Y. Sahali, M. K. Fellah</b> <i>Study of the Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion (OMTHD) technique in comparison with the Harmonic Elimination (OHSW) technique applied to Multilevel Inverters.</i>	119
ICEPS – Université Djillali Liabes SBA Algérie ICEPS – Université Djillali Liabes SBA Algérie	
<b>M. Boudour, A. Hellal</b> <i>Large Scale Power System Security Assessment Using Intelligent Programming.</i>	127
Département d'Electrotechnique, USTHB Alger Algérie Université de Laghouat Algérie	
<b>A. Ben senouci, A. M. Abdel Ghany</b> <i>Optimum design of a discrete output feedback control for interconnected power systems using genetic algorithm.</i>	133
Electrical Technology Department – College of Technology Al-Baha PO Box 6, KSA Electrical Technology Department – College of Technology Al-Baha PO Box 6, KSA	
<b>M'barek Taghite , K. Taous, G. Maurice, A. Ould-Hammouda , H. Lanchon-Ducauquis</b> <i>Torsion d'un cylindre avec double périodicité. Endommagement.</i>	143
LEMTA (UMR-CNRS 7563) ENSEM INPL Nancy France LMA Metz, Université de Metz, Île du Sauley, Metz France LEMTA (UMR-CNRS 7563) ENSEM INPL Nancy France ENS Kouba Algérie LEMTA (UMR-CNRS 7563) ENSEM INPL Nancy France	
<b>B. K. Hachi, S. Rechak, M. Ouadjaout, M. Haboussi</b> <i>Modélisation des fissures semi-elliptiques par couplage de la méthode d'hybridation des fonctions de poids HWFM avec la méthode de fonction de poids du point PWFm.</i>	147
CUD Djelfa Algérie LGMD-ENP Alger Algérie LGMD-ENP Alger Algérie LEMTA (UMR-CNRS 7563) ENSEM INPL Nancy France	
<b>N. Touat, S. Rechak, A. Ghoul, M. Ameur</b> <i>Stochastic Search Algorithms for Dynamic Finite Element Model Updating.</i>	153
Département de Mécanique, USTHB, Algérie LGMD-ENP Alger Algérie Département de Mécanique, USTHB, Algérie Département de Mécanique, USTHB, Algérie	

<b>M. Rokbi, A. Bezazi, H. Osmani</b> <i>Influence de la séquence d'empilement sur le comportement en statique des stratifiés verre E-Polyester.</i> Université Md Boudiaf M'Sila, Algérie DRG Dpt of Mechanical Engineering, University of Sheffield, UK OMP, UFAS, Sétif Algérie	163
<b>N. Touat, A. Ahmed Ben Yahia, S. Rechak</b> <i>The Centrifugal Force Algorithm for Optimization Problems.</i> Département de Mécanique, USTHB, Algérie Département de Mécanique, USTHB, Algérie LGMD-ENP Alger Algérie	169
<b>A. Koudri-Boudjelthia , A. Bouabdallah , A. Ghoul</b> <i>Influence de la température sur les paramètres de fluage d'un matériau composite.</i> Université Hassiba Ben Bouali, Chlef, Algérie Faculté de physique, USTHB, Algérie	179
<b>A. Oudina, H. Djelouah</b> <i>Modélisation de la propagation des ondes ultrasonores impulsionnelles dans les fluides visqueux.</i> Faculté de physique, USTHB, Algérie Faculté de physique, USTHB, Algérie	185
<b>N. Tala-Ighil , A. Bounif</b> <i>Modélisation d'un contact Thermo hydrodynamique Lubrifer.</i> LCI- CSC, Chéraga, Alger Algérie Institut de Mécanique, USTOran, Algérie.	195
<b>A. Hocine, A. Bezazi, A. Benamar</b> <i>Analyse numérique d'un réservoir composite liner métallique sous pression.</i> Département de Mécanique, UHB, Chlef, Algérie DRG Dpt of Mechanical Engineering, University of Sheffield, UK LFM-ENSET Oran, Algérie	201
<b>R. Ayad</b> <i>Le concept « Laboratoire virtuel ». Un outil de conception optimisée des systèmes d'emballages.</i> ESIEC- GMMS N° 2617, Université de Reims Champagne-Ardenne, France	207
<b>A. Alliche</b> <i>Formulation mathématique d'un problème de couplage thermo-hygro-mécanique en milieux poreux non saturés : Application au cas des matériaux de construction des bâtiments.</i> LM2S, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, France	213
<b>F. Mokhtari, A. Bouabdallah, S. Hanchi, M. Zizi</b> <i>Etude de l'influence des effets de Marangoni sur la croissance cristalline.</i> LTSE, USTHB, Algérie LTSE, USTHB, Algérie UER-Mécanique EMP, Bordj-El-Bahri, Algérie LTSE, USTHB, Algérie	223
<b>H. Allag, M. E. H. Latreche, M. R. Mekidèche</b> <i>2D FEM For axial magnetic forces calculation exerted on a moving parts of magnetic actuators considering the hysteresis phenomenon.</i> LEC – Université de Constantine, Algérie LEC – Université de Constantine Algérie LAMEL – Université de Jijel, Algérie	231

# CALCUL DU MOTEUR A INDUCTION EN TENANT COMPTE DE LA SATURATION ET DES HARMONIQUES D'ESPACE

S. Mezani <sup>1\*</sup>, B. Laporte <sup>2</sup>, N. Takorabet <sup>2</sup>

<sup>1</sup> The University of Sheffield EEE Department  
Mappin Street S1 3 JD Sheffield UK  
email : [s.mezani@sheffield.ac.uk](mailto:s.mezani@sheffield.ac.uk)

<sup>2</sup> GREEN (UMR-CNRS 7037) ENSEM INPL  
02, avenue de la Forêt de Haye 54516 Vandoeuvre France  
email : [bernard.laporte@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:bernard.laporte@ensem.inpl-nancy.fr)  
email : [noureddine.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:noureddine.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr)

## I. RESUME

Les auteurs présentent une méthode de calcul des performances, en régime établi sinusoïdal, du moteur à induction. Le couplage des champs dans l'entrefer, pour chaque harmonique d'espace, se fait par la méthode du double entrefer. Le principe de superposition permet de déterminer la solution finale. Afin de traiter les problèmes non linéaires, une approche qui permet d'introduire des réductivités équivalentes est proposée. Les calculs effectués sont comparés à des mesures.

**Mots Clés :** moteur à induction, éléments finis, harmoniques d'espace, mouvement, saturation.

## II. INTRODUCTION

De tous les moteurs électriques, le moteur à induction est le plus répandu. Il n'est donc pas du tout surprenant de voir qu'il fait encore l'objet de nombreux travaux de recherche visant à améliorer sa modélisation et à optimiser sa conception. En dépit de sa simplicité de fabrication et de mise en œuvre, la modélisation et le calcul du moteur à induction ne sont pas des choses aisées.

En adoptant une approche Lagrangienne, les équations, gouvernant la diffusion du champ électromagnétique, sont résolues numériquement et de façon indépendante par rapport à deux référentiels : l'un fixe lié au stator et l'autre mobile lié au rotor. La difficulté réside dans le couplage de ces deux champs par le suivi de la position du rotor à chaque pas de temps. Plusieurs méthodes ont été imaginées dans le cas de la modélisation par éléments finis. Les méthodes de type bande de roulement [1] ou ligne de glissement [2], bien qu'elles présentent certains

inconvénients, sont couramment utilisées car facile à mettre en œuvre. On peut aussi restaurer la continuité naturelle des grandeurs physiques sur l'interface de couplage en introduisant des multiplicateurs de Lagrange. Dans cette méthode, les domaines statorique et rotorique sont maillés une fois pour toute [3]. Une autre méthode consiste à ne pas mailler l'entrefer où la solution y est déterminée analytiquement. Cette méthode, appelée macro-élément, donne de très bons résultats mais le temps de calcul est plus important que dans les autres méthodes [4].

Ces méthodes temporelles sont très performantes mais elles ont l'inconvénient d'imposer des pas de temps très courts pour prendre en compte les effets de dentures ; les temps de calculs sont donc très longs. La méthode du double entrefer avec approximation du premier harmonique d'espace est une alternative fort intéressante car elle conduit à des temps de calculs moins importants [5], [6]. Dans cette méthode, seul l'harmonique principal du champ calculé dans le domaine du stator sert de source au calcul rotorique et réciproquement. Ainsi, le suivi instantané du seul premier harmonique d'espace permet des pas de temps beaucoup plus importants que dans les méthodes habituelles qui introduisent l'effet de la denture.

Pour des machines alimentées par des sources à variation sinusoïdale par rapport au temps et opérant à vitesse constante (régime permanent), on peut calculer tout le démarrage par l'une des méthodes sus-citées. Il faut alors effectuer des calculs sur plusieurs périodes temporelles jusqu'à la disparition totale du régime transitoire. Cette démarche impose des temps de calculs très importants et apparaît lourde lorsque l'on recherche uniquement les performances en régime permanent. Une alternative fort intéressante consiste à utiliser les représentations complexes des différentes grandeurs.

L'hypothèse admise est que les grandeurs électromagnétiques sont à variation temporelle sinusoïdale. On utilise ainsi des variables complexes qui ont l'avantage de ne pas nécessiter d'itérations dans le temps pour déterminer la solution. Ceci conduit à un gain de temps considérable en comparaison avec le modèle pas à pas. L'inconvénient majeur réside dans le fait qu'on ne peut traiter, en toute rigueur, que les problèmes linéaires. La saturation magnétique ne peut être prise en considération que de manière très globale.

Parmi les modèles élaborés pour obtenir un point de fonctionnement à vitesse donnée, on peut citer la méthode, basée sur le schéma équivalent qui, à position relative fixée du stator et du rotor, consiste à effectuer le calcul dans le repère du stator en divisant la résistivité des parties conductrices de l'induit par le glissement [7]. Cette méthode présente l'inconvénient théorique de "faire passer" tous les harmoniques d'espace créés par l'inducteur avec la pulsation  $g\omega_s$  alors que dans la réalité,  $g$  étant petit, la pulsation des harmoniques 5 et 7, par exemple, est proche de  $6\omega_s$  au rotor (respectivement  $(6-5g)\omega_s$  et  $(7g-6)\omega_s$ ).

Nous présentons dans cet article une modélisation reposant sur une analyse harmonique du problème par la méthode du double entrefer. La méthode que nous proposons permet le calcul, en régime permanent, du moteur à induction tout en tenant compte de la présence des harmoniques d'espace. Afin d'appréhender le problème de la saturation tout en utilisant cette méthode fréquentielle de calcul, il faut préciser le sens que la notion de représentation complexe peut conserver dans le cas non linéaire. Une approche introduisant des réductivités équivalentes est ainsi proposée.

### III. MODELISATION ELECTROMAGNETIQUE

Considérons une machine asynchrone triphasée à  $p$  paires de pôles. Le stator est alimenté à partir d'une source triphasée équilibrée de pulsation  $\omega_s$ . Le rotor tourne à la vitesse mécanique  $\Omega$ . Nous pouvons considérer deux référentiels, Fig.1. :

- un référentiel fixe lié au domaine statorique  $D_s$  comportant l'entrefer  $D_e$  ;
- un référentiel tournant par rapport au premier et lié au domaine rotorique  $D_r$  qui comporte également l'entrefer  $D_e$ .

$\Gamma_s$  et  $\Gamma_r$  sont les frontières de l'entrefer dont les rayons sont  $R_s$  et  $R_r$  respectivement.

Dans l'hypothèse 2D, la machine est supposée infiniment longue suivant l'axe de la machine. Le potentiel vecteur magnétique, qui possède une seule composante suivant cet axe, a deux déterminations que nous notons  $a_s(P,t)$  dans le domaine du stator  $D_s$  et  $a_r(P',t)$  dans le domaine du rotor  $D_r$ .

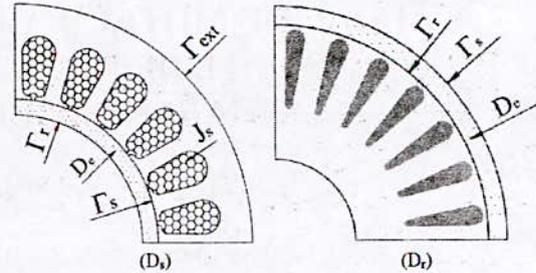


Fig. 1. Domaines statorique et rotorique

Les coordonnées des points P et P' sont liées par :

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + \Omega t \end{cases} \quad (1)$$

Le stator est constitué de tôles feuilletées qui empêchent la circulation de courants induits dans la direction axiale. La conductivité électrique est donc nulle au niveau du stator. L'équation vérifiée par le potentiel vecteur magnétique s'écrit dans  $D_s$  :

$$\text{div}(\vec{v}_s \text{grad}(a_s)) + j_s = 0 \quad (2)$$

De plus, sur le bord  $\Gamma_r$  de  $D_s$ , il doit vérifier :

$$a_s(R_r, \theta, t) = a_r(R_r, \theta', t) \quad (3)$$

Au niveau du rotor, la diffusion du champ est gouvernée dans  $D_r$  par l'équation :

$$\text{div}(\vec{v}_r \text{grad}(a_r)) - \sigma_r \frac{\partial a_r}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

De plus, sur le bord  $\Gamma_s$  de  $D_r$ , le potentiel vecteur  $a_r$  doit vérifier :

$$a_s(R_s, \theta, t) = a_r(R_s, \theta', t) \quad (5)$$

Dans ces équations,  $v$  représente la réductivité magnétique,  $\sigma$  la conductivité électrique et  $j_s$  la densité de courant imposée au niveau des encoches statoriques par les sources extérieures. Les indices s et r correspondent au stator et au rotor respectivement.

L'entrefer  $D_e$  est inclus à la fois dans  $D_s$  et  $D_r$ , le potentiel vecteur est donc calculé deux fois dans l'entrefer où il vérifie l'équation de Laplace.

Si les relations (3) et (5) étaient strictement vérifiées, ces deux déterminations coïncideraient.

On se propose de faire coïncider les développements en série de Fourier de ces relations, jusqu'à un certain ordre.

## IV. METHODE DU DOUBLE ENTREFER

La machine étant alimentée par un réseau sinusoïdal triphasé équilibré, les sources de champ ne présentent qu'un seul harmonique de temps de pulsation  $\omega_s$ . Le bobinage statorique étant distribué dans  $N_s$  encoches, il crée dans l'entrefer, en plus du champ principal à  $p$  paires de pôles, des champs harmoniques qui tournent à des vitesses différentes de celle du fondamental.

Dans le cas des matériaux magnétiques linéaires et en négligeant la modulation due aux dentures, nous utilisons le principe de superposition. En régime établi, nous écrivons alors le développement suivant du potentiel vecteur magnétique, sur  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_r$  :

$$\begin{cases} a_s(R_s, \theta, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_n \bar{C}_n^r \exp(j(n\theta - \omega_s t)) \\ a_r(R_r, \theta', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_n \bar{C}_n^r \exp(j(n\theta' - g_n \omega_s t)) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_s(R_r, \theta, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_n \bar{C}_n^s \exp(j(n\theta - \omega_s t)) \\ a_r(R_r, \theta', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_n \bar{C}_n^s \exp(j(n\theta' - g_n \omega_s t)) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_r \quad (7)$$

où, d'après (1) :

$$g_n = 1 - n \frac{\Omega}{\omega_s} \quad (8)$$

est le glissement pour l'harmonique d'espace de rang  $n$ .  $\bar{C}_n^s$  et  $\bar{C}_n^r$  sont des coefficients complexes.

## A. Le champ dans le domaine statorique

Le potentiel vecteur dans  $D_s$  s'écrit ainsi :

$$a_s(P, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \left( \bar{X}_s^s(P) + \sum_n \bar{C}_n^s \bar{A}_n^s(P) \right) \exp(-j\omega_s t) \right] \quad (9)$$

$\bar{X}_s^s$ ,  $\bar{A}_n^s$  sont des potentiels vecteurs correspondant respectivement aux champs source et de réaction d'induit. La détermination de ces potentiels est effectuée séparément en résolvant des problèmes élémentaires que nous explicitons ci-dessous.

A.1. Etape 1 : Calcul de  $\bar{X}_s^s$ 

Il s'agit donc du problème source. Le bobinage statorique est alimenté par des courants triphasés équilibrés

d'amplitude complexe  $\bar{I}$ . En notation complexe, ces courants s'écrivent :

$$\bar{I}_q = \bar{I} \exp(-j2\pi(q-1)/3) ; q = 1, 2, 3 \quad (10)$$

$\bar{X}_s^s$  est solution de l'équation suivante :

$$\operatorname{div} \left( \nu_s \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\bar{X}_s^s) \right) + \bar{J}_s = 0 \quad (11)$$

où  $\bar{J}_s$  est la représentation complexe de la densité de courant au niveau des encoches statoriques qui est liée aux courants de phase par une matrice de connexion des encoches par rapport aux phases.

Les conditions aux limites associées à (11) sont :

$$\begin{cases} \bar{X}_s^s = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}} \\ \bar{X}_s^s = 0 & \text{sur } \Gamma_r \end{cases} \quad (12)$$

Afin de déterminer le spectre des harmoniques, créés par le bobinage statorique, nous utilisons le développement en série de Fourier du potentiel vecteur  $\bar{X}_s^s$  sur l'alésage statorique. L'harmonique d'espace de rang  $n$  sur  $\Gamma_s$  se calcule par :

$$\bar{\mu}_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \bar{X}_s^s(R_s, \theta) \exp(-jn\theta) d\theta \quad (13)$$

A. 2. Etape 2 : Calcul de  $\bar{A}_n^s$ 

Il s'agit du problème de réaction du champ rotorique (réaction d'induit). Les courants dans les encoches statoriques sont nuls et  $\bar{A}_n^s$  est solution de l'équation :

$$\operatorname{div} \left( \nu_s \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\bar{A}_n^s) \right) = 0 \quad (14)$$

à laquelle on associe les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \bar{A}_n^s = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{ext}} \\ \bar{A}_n^s = \exp(jn\theta) & \text{sur } \Gamma_r \end{cases} \quad (15)$$

L'harmonique d'espace de rang  $n$  du potentiel vecteur  $\bar{A}_n^s$  sur  $\Gamma_s$  se détermine par :

$$\bar{\lambda}_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \bar{A}_n^s(R_s, \theta) \exp(-jn\theta) d\theta \quad (16)$$

### B. Le champ dans le domaine rotorique

Chacun des champs harmoniques transmis du stator vers le rotor se diffuse dans  $D_r$  avec un glissement correspondant au rang de l'harmonique considéré (8).

Le potentiel vecteur dans  $D_r$  s'écrit :

$$a_r(P', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \sum_n \bar{C}_n^r \bar{A}_n^r(P') \exp(-jg_n \omega_s t) \right] \quad (17)$$

Le calcul du potentiel vecteur  $\bar{A}_n^r$  est effectué en résolvant le problème élémentaire suivant.

#### B. 1. Etape 3 : Calcul de $\bar{A}_n^r$

L'équation de diffusion du champ (4), pour l'harmonique  $n$ , s'écrit :

$$\operatorname{div} \left( v_r \operatorname{grad}(\bar{A}_n^r) \right) - jg_n \omega_s \sigma_n \bar{A}_n^r = 0 \quad (18)$$

où l'on a introduit une conductivité  $\sigma_n$  dépendant de l'harmonique considéré dans la mesure où l'on tient compte d'un trajet de fermeture différent dans les couronnes de court-circuit [8].

A l'équation (18), on associe la condition aux limites :

$$\bar{A}_n^r(R_s, \theta') = \exp(jn\theta') \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (19)$$

Nous déterminons l'harmonique d'espace de rang  $n$  du potentiel vecteur  $\bar{A}_n^r$  sur  $\Gamma_r$  par :

$$\bar{\lambda}_n^r = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \bar{A}_n^r(R_r, \theta') \exp(-jn\theta') d\theta' \quad (20)$$

### C. Connexion des champs du stator et du rotor

Les champs électromagnétiques au stator et au rotor doivent coïncider dans l'entrefer  $D_e$ , région commune aux deux domaines  $D_s$  et  $D_r$ , Fig.1. Le potentiel vecteur étant une fonction harmonique dans l'entrefer, il suffit de faire coïncider  $a_s$  et  $a_r$  sur le bord de  $D_e$  pour qu'ils coïncident partout dans l'entrefer. En utilisant les approximations du potentiel vecteur (9) et (17), ainsi que les expressions (13), (16) et (20) des coefficients de ces approximations, nous sommes amenés à écrire :

$$\begin{cases} \bar{C}_n^r \bar{\lambda}_n^r - \bar{C}_n^s = 0 & \text{sur } \Gamma_r \\ \bar{C}_n^r - \bar{\lambda}_n^s \bar{C}_n^s = \bar{\mu}_n^s & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (21)$$

La détermination de  $\bar{C}_n^s$  et  $\bar{C}_n^r$  permet de remonter aux valeurs du potentiel vecteur dans toute la machine par (9) et (17).

## V. COURANTS DANS LA MACHINE

La méthode que nous venons d'exposer suppose que la machine est alimentée par des générateurs de courants triphasés équilibrés, alors que dans la réalité, celle-ci est alimentée par des générateurs de tension.

Tout d'abord, pour les courants triphasés équilibrés de valeur efficace unité, nous déterminons les flux dans les  $N_s$  encoches du stator. Pour la  $k^{\text{ème}}$  encoche, le flux total est déterminé en calculant la valeur moyenne du potentiel vecteur sur la surface de l'encoche, soit :

$$\bar{\phi}_k = \frac{L_u}{S_k} \iint_{S_k} \left( \bar{X}_s^r(P) + \sum_n \bar{A}_n^s(P) \right) ds \quad (22)$$

où  $S_k$  est la surface de l'encoche  $k$  et  $L_u$  la longueur utile de la machine.

Nous obtenons ainsi le vecteur, noté  $\{\bar{\phi}\}$ , des  $N_s$  flux d'encoches qui comprennent également les flux de fuite d'encoches.

Nous obtenons également le vecteur, noté  $\{\bar{\psi}\}$ , des flux de phase ce qui permet de déterminer le vecteur des forces électromotrices :

$$\{\bar{E}\} = \begin{Bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{Bmatrix} = j\omega_s \{\bar{\psi}\} \quad (23)$$

L'impédance opérationnelle par phase est donnée par la relation :

$$\bar{Z}_{op} = \frac{\bar{E}_1}{I_1} = \frac{\bar{E}_2}{I_2} = \frac{\bar{E}_3}{I_3} \quad (24)$$

Sur la Fig.2, nous avons représenté cette impédance en nous ramenant au schéma électrique équivalent en chaîne du moteur à induction qui tient compte des harmoniques d'espace [9].

La réactance de fuite d'encoche  $x_{se}$  correspond au champ  $\bar{X}_s^r$  créé par les courants sources ; elle est prise en compte dans le calcul des  $\bar{\phi}_k$  par (22), contrairement à la réactance  $x_{tb}$  des têtes de bobines.

En se référant au schéma équivalent de la Fig.2., le courant d'une phase au stator est finalement obtenu par :

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{op} + r_s + jx_{tb}} \quad (25)$$

où :

- $r_s$  est la résistance d'une phase au stator
- $x_{tb}$  est la réactance de fuite des têtes de bobines pour une phase statorique que l'on peut déterminer par des mesures spécifiques [8].

Dans la mesure où nous avons assumé la linéarité des matériaux ferromagnétiques, les potentiels vecteurs statorique et rotorique sont obtenus en multipliant ceux déterminés pour un courant statorique unitaire, relations (9) et (17), par le courant  $\bar{I}$  calculé par (25).

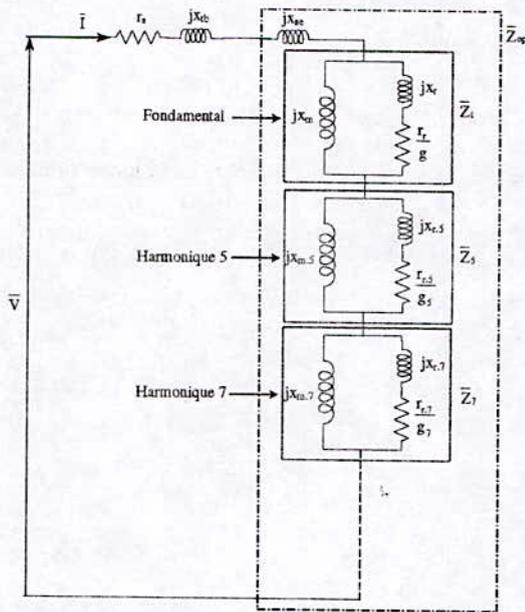


Fig. 2. Schéma équivalent par phase de la MAS

## VI. APPROCHE DE LA SATURATION

La méthode que nous avons employée pour le calcul du potentiel vecteur magnétique dans la machine utilise la superposition de champs élémentaires pour déterminer la solution finale. De ce fait, le traitement des non-linéarités introduites par les matériaux ferromagnétiques est en principe impossible car incompatible avec le principe de superposition.

De plus, l'utilisation des représentations complexes implique une variation temporelle sinusoïdale de toutes les grandeurs électromagnétiques. Or, la réponse à une induction magnétique sinusoïdale n'est pas un champ magnétique sinusoïdal si les matériaux magnétiques ne

sont pas linéaires ; la réciproque est également vraie, et dans le cas général, ni le champ magnétique ni l'induction magnétique ne varient de façon sinusoïdale en fonction du temps.

Nous supposons que l'induction est alternative dans toutes les parties saturables. Notons que dans certaines zones de la machine, le champ est de nature tournante ; les zones correspondant à ce dernier cas sont néanmoins peu nombreuses de sorte que dans les zones présentant une direction privilégiée (dents et culasse), le champ est pratiquement unidirectionnel. Les vecteurs, champ  $\vec{h}$  et induction  $\vec{b}$ , ont donc une direction fixe localement, et nous notons leur mesure algébrique, suivant cette direction,  $h(t)$  et  $b(t)$  respectivement.

Dans ces conditions, et afin de conserver les représentations complexes qui ont l'avantage d'éliminer la variable temps, nous introduisons la notions de réductivité magnétique équivalente en définissant une loi de milieu équivalente.

$h(t)$  et  $b(t)$  présentent essentiellement un fondamental de pulsation  $\omega_s t$  au stator et  $\omega_r t$  au rotor, du moins dans le cas où le premier harmonique d'espace est prépondérant. Le développement en série de Fourier de  $h$  et  $b$  introduit les représentations complexes des différents harmoniques, tous d'ordre impair.

La considération effective, ne serait ce que de deux harmoniques, dans  $h$  et  $b$  conduit à une trop grande complexité. Nous envisageons alors l'une ou l'autre des deux hypothèses simplificatrices suivantes : ou bien nous considérons que  $h(t)$  est à variation temporelle sinusoïdale, ou bien nous considérons que c'est  $b(t)$ .

### A. Détermination de la réductivité équivalente

La définition d'une réductivité équivalente est délicate, on rencontre différentes définitions suivant les auteurs. Nous citons par exemple les quatre définitions suivantes de la réductivité équivalente [10], [11], [12] :

#### A. 1. Champ magnétique sinusoïdal

La courbe de magnétisation est donnée sous forme d'un tableau de points  $(h_i ; b_i)$  que l'on approxime par " $b=f(h)$ ". Le champ magnétique  $h(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps :

$$h(t) = H\sqrt{2}\sin(\phi) \quad (26)$$

où  $\phi = \omega_s t$  au stator et  $\phi = \omega_r t$  au rotor ; le choix de l'origine des temps est évidemment arbitraire.

L'induction magnétique  $b$  est périodique son développement en série de Fourier est :

$$b(t) = B\sqrt{2} \sin(\phi) + \dots \quad (27)$$

avec :

$$B\sqrt{2} = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} f(H\sqrt{2} \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi \quad (28)$$

f étant impaire, f sin(φ) est paire, de sorte que :

$$B\sqrt{2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(H\sqrt{2} \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi \quad (29)$$

Une première définition pour la réductivité équivalente, notée  $v_{h1}$ , est le rapport de H à B :

$$v_{h1} = \frac{H\sqrt{2}}{\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(H\sqrt{2} \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi} \quad (30)$$

Elle dépend évidemment de l'amplitude de H, c'est-à-dire des points où l'on s'arrête sur la courbe de magnétisation pour repartir en sens inverse.

Une autre approche consiste à trouver une réductivité équivalente  $v_{h2}$  telle que la densité de coénergie, calculée à partir de  $v_{h2}$ , soit égale à la densité de coénergie réelle :

$$v_{h2} = \frac{H^2}{\int_0^{\pi/2} f(\tau) d\tau} \quad (31)$$

### A. 2. Induction magnétique sinusoïdale

Connaissant la loi "h=g(b)", on écrit :

$$b(t) = B\sqrt{2} \sin(\phi) \quad (32)$$

Le champ magnétique h est périodique, son développement en série de Fourier est :

$$h(t) = H\sqrt{2} \sin(\phi) + \dots \quad (33)$$

avec :

$$H\sqrt{2} = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} g(B\sqrt{2} \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi \quad (34)$$

On calcule de manière analogue à  $v_{h1}$ , donnée par (30), la réductivité équivalente  $v_{b1}$  rapport de H à B :

$$v_{b1} = \frac{\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(B\sqrt{2} \sin(\phi)) \sin(\phi) d\phi}{B\sqrt{2}} \quad (35)$$

Elle dépend de l'amplitude de B, c'est-à-dire des points où l'on s'arrête sur la courbe de magnétisation pour repartir en sens inverse.

De façon analogue à  $v_{h2}$ , nous pouvons définir une réductivité équivalente  $v_{b2}$  telle que la densité d'énergie calculée à partir de cette dernière soit égale à la densité d'énergie réelle :

$$v_{b2} = \frac{\int_0^{B\sqrt{2}} g(\tau) d\tau}{B^2} \quad (36)$$

Nous avons tracé, sur la Fig. 3., l'allure de la variation de la réductivité équivalente en fonction du module de l'induction magnétique pour les différentes définitions. Nous avons également inclus la réductivité  $v_{dc}$  correspondant à la courbe de première aimantation en courant continu du matériau magnétique utilisé.

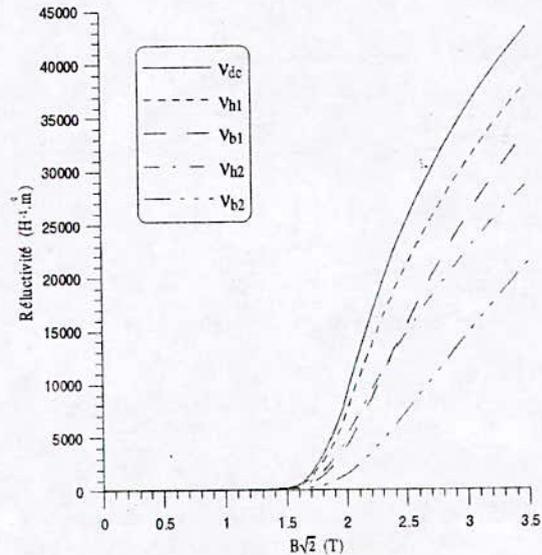


Fig. 3. Réductivité équivalente obtenue pour les différentes définitions

## VII. RESULTATS ET VALIDATION

Afin de valider la méthode de calcul en régime saturé, nous avons opté pour le calcul d'une machine à encoches fermées au rotor. Les principales caractéristiques de ce moteur sont données sur le Tableau I.

Tableau I  
Caractéristiques du moteur étudié

Caractéristique	Valeur	Unité
Puissance utile	5.5	kW
Nombre de phases	3	-
Fréquence d'alimentation	50	Hz
Nombre de pôles	4	-
Type d'enroulement	Concentrique	-
Nombre de conducteurs en série par phase	19	-
Connexion des enroulements	Etoile (Y)	-
Classe d'isolation	F	-
Nombre d'encoches au stator (semi fermées)	48	-
Nombre d'encoches au rotor (fermées)	28	-
Largeur de l'entrefer	0.4	mm
Longueur utile	160	mm
Résistance d'une phase au stator à 25°C	1.05	$\Omega$
Tension d'alimentation	380	V
Glissement	4.13	%
Courant absorbé	11.62	A
Couple nominal	37	N.m
Facteur de puissance	0.865	-
Rendement	84.26	%

Nous avons comparé les performances calculées en utilisant les différentes définitions de la réductivité magnétique avec l'expérience. Les figures 4 et 5 montrent les variations, en fonction du glissement, du courant absorbé et du couple électromagnétique respectivement.

L'examen des résultats obtenus montre que les caractéristiques calculées sont globalement semblables jusqu'à un glissement de 8% environ. Nous notons d'ailleurs une bonne concordance avec l'expérience.

Aux forts glissements, nous obtenons pour les définitions  $v_{b1}$  et  $v_{h1}$  de la réductivité, des caractéristiques similaires. Concernant les définitions  $v_{b2}$  et  $v_{h2}$  de la réductivité, les performances sont nettement différentes par rapport aux deux premières.

Dans la zone de fonctionnement normal du moteur, la faible dépendance des performances, par rapport à la définition de la perméabilité équivalente, provient du fait que la perméabilité du fer (dans une machine à cage avec des tôles feuilletées) ne joue pas un rôle important dans la détermination des performances externes.

Dans le cas où la machine est très saturée (jusqu'à  $g=2\%$  sur la Fig.4), nous obtenons les résultats du Tableau II concernant l'évaluation du courant à vide. Le courant mesuré à vide est de l'ordre de 4.7A alors que les valeurs calculées les plus proches sont 4.46A (définition  $v_{b2}$ ) et 4.99A (définition  $v_{b1}$ ). Cela confirme bien que lors du fonctionnement à vide, l'induction dans le moteur peut être considérée comme étant sinusoïdale. On note, dans ce cas, un certain avantage à la définition  $v_{b2}$ .

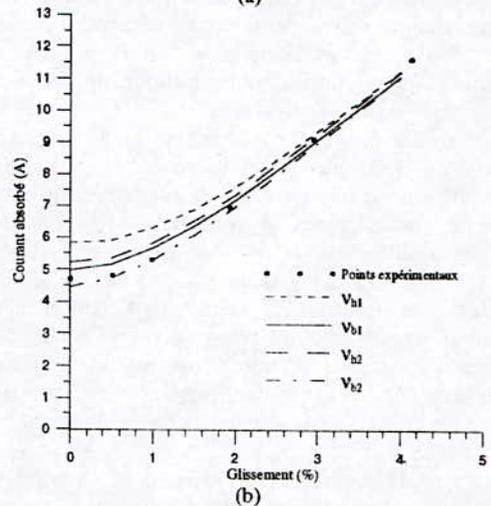
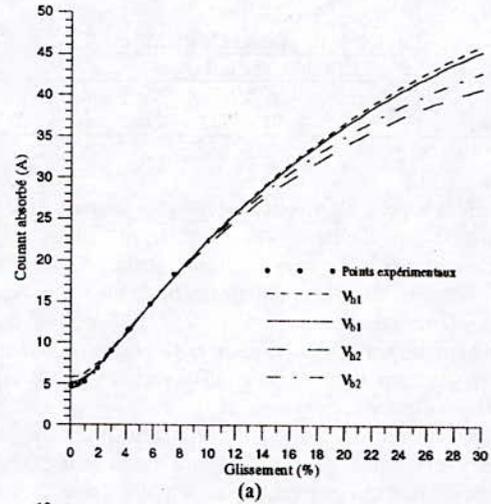


Fig. 4. Courant absorbé (a) avec zoom pour  $g < 2\%$  (b)

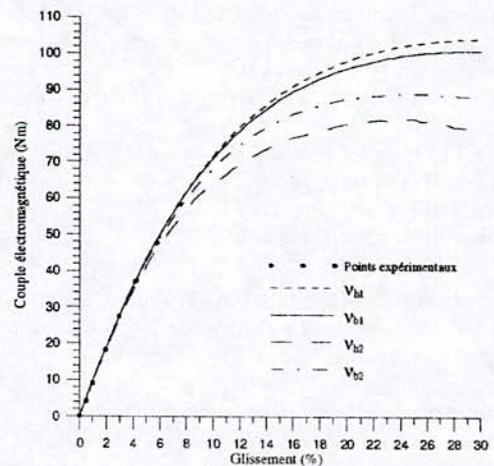


Fig. 5. Couple électromagnétique

Tableau II  
Courant à vide du moteur à  $V = 220$  volts  
Réductivité utilisée

	$V_{h1}$	$V_{b1}$	$V_{h2}$	$V_{b2}$	mesure
Courant (A)	5.83	4.99	5.21	4.46	4.7

Pour valider les calculs électromagnétiques, en particulier pour mettre en évidence les singularités, dues aux harmoniques d'espace, dans la caractéristique couple-vitesse, nous avons conçu un enroulement où toutes les bobines élémentaires sont accessibles. En fonction du mode de connexion de ces bobines, nous pouvons obtenir différents spectres harmoniques qui favorisent tel ou tel harmonique d'espace.

Dans sa version d'origine, les caractéristiques de la machine sont données dans le Tableau I. Le moteur étudié comporte 48 encoches au stator pour 4 pôles. La machine a été spécialement bobinée de façon à avoir accès à toutes les bobines élémentaires. Selon le mode de connexion de ces bobines, nous pouvons obtenir différents spectres pour les harmoniques d'espace.

Nous disposons d'un stator non bobiné à 48 encoches. L'objectif est de concevoir un bobinage où toutes les bobines élémentaires sont accessibles permettant ainsi de réaliser des configurations qui conduisent à des spectres harmoniques différents. Il est souhaitable de pouvoir favoriser un ou deux harmoniques à la fois afin de mieux visualiser expérimentalement leurs effets. Différentes simulations ont été effectuées pour dégager le type de bobinage qui convient le mieux aux essais que nous voulons mener. Nous avons finalement opté pour un pas de bobinage de 11/12 qui atténue les harmoniques 11 et 13 mais pas les 5 et 7.

Avec ce type de bobinage, nous avons donc 48 bobines élémentaires que nous connectons sur un bornier contenant 96 sorties, Fig.6. Chaque phase contient 16 bobines élémentaires, (4 bobines élémentaires par pôle et par phase). Ceci permet de réaliser des bobinages symétriques en alimentant 1, 2, 3 ou 4 bobines élémentaires par pôle et par phase.

Les différentes bobines élémentaires sont repérées comme suit, Fig.6. :

- bobine 1 (B1) : aller 1- retour 1'
- bobine 2 (B2) : aller 2- retour 2'
- bobine 3 (B3) : aller 3- retour 3'
- bobine 4 (B4) : aller 4- retour 4'

Bien entendu, selon les règles des bobinages triphasés équilibrés, le motif (a-a') se répète de façon périodique sur toutes les encoches du stator.

Un récapitulatif des taux d'harmonique obtenus pour les différentes configurations de bobinage est présenté sur la Tableau III. Les harmoniques 11 et 13 ne sont pas représentés car ils sont fortement atténués par le pas de bobinage adopté.

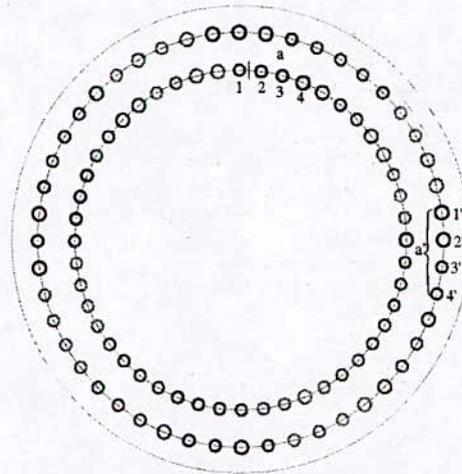


Fig. 6. Sorties des bobines élémentaires sur le bornier

Table III  
Taux d'harmonique obtenus pour les différentes configurations de bobinage en pourcentage du fondamental

Bobines manquantes	Taux d'harmonique en pourcentage du fondamental				
	H1 n=2	H5 n=10	H7 n=14	H17 n=34	H19 n=38
Aucune	100	17.15	10.10	10.10	17.15
B1	100	41.42	10.10	10.10	41.42
B2	100	17.15	31.78	31.78	17.15
B1 et B2	100	64.03	37.70	37.70	64.03
B2 et B3	100	33.14	61.40	61.40	33.14

Le banc d'essais complet, Fig. 7., est constitué du moteur étudié accouplé mécaniquement à une machine à courant continu servant de charge et qui débite sur des résistances réglables. Les mesures électriques sont réalisées avec des appareils classiques. La mesure de la vitesse est obtenue grâce à une dynamo tachymétrique, montée en bout d'arbre, qui fournit 0.06 volts/tr/mn.

#### A. Mesure du couple

Nous avons déterminé le couple indirectement par la mesure de l'accélération angulaire. Si l'on connaît le moment d'inertie de la partie tournante ainsi que les divers coefficients de frottement, on peut déduire le couple par le biais de l'équation mécanique du système. L'accélération est obtenue par dérivation numérique de la vitesse enregistrée.

Notons qu'il est difficile d'effectuer les mesures de couple sur le moteur seul à vide, car son démarrage est trop rapide, nous lui avons donc fait entraîner un volant d'inertie. Pour obtenir la caractéristique couple-vitesse sur toute la plage de glissement comprise entre 0 et 2, nous laissons tourner le moteur à vide puis nous inversons deux phases au stator. Le moteur décélère alors jusqu'à l'arrêt puis redémarre dans le sens inverse pour revenir à la vitesse de fonctionnement à vide.

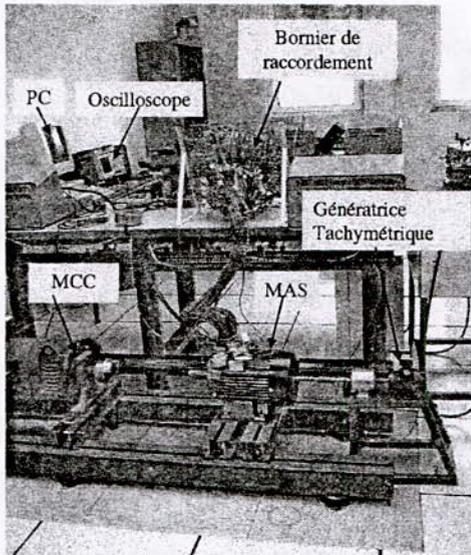


Fig. 7. Le banc d'essais

Le couple mécanique est obtenu par :

$$\Gamma(\Omega) = J_t \left( \frac{d\Omega}{dt} + f_2 \Omega^2 + f_1 \Omega \pm f_0 \right) \quad (37)$$

Dans cette dernière équation,  $J_t$  représente l'inertie totale de la partie tournante,  $\Omega$  la vitesse de rotation,  $\Gamma$  le couple électromagnétique et  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  sont les coefficients de frottement. Les signes '-' et '+' correspondent, selon la loi de Coulomb régissant les frottements secs, respectivement aux phases de décélération et d'accélération.

L'identification des coefficients de frottement est basée sur la méthode utilisée en [13]. Les valeurs des différents paramètres mécaniques du moteur étudié sont présentées sur le Tableau IV.

Afin de rester dans les limites admissibles pour le courant statorique, le moteur est alimenté par une tension sinusoïdale de 125V efficace entre phases à 50Hz.

Lors des essais effectués, les résistances et les inductances de fuite des têtes de bobines diffèrent selon le nombre de bobines manquantes dans le bobinage statorique. Nous donnons, sur la Tableau V, les valeurs de ces paramètres mesurés dans les conditions des différents essais [8].

Tableau IV  
Paramètres mécaniques du moteur étudié

$J_t$ (kg.m <sup>2</sup> )	$f_0$ (s <sup>-2</sup> )	$f_1$ (s <sup>-1</sup> )	$f_2$
0.123	0.036	0.011	-5.73 10 <sup>-5</sup>

Tableau V  
Résistance et inductance de fuite des têtes de bobines (par phase) pour différentes configurations du bobinage

	Bobines manquantes		
	aucune	1	2
$R_s$ ( $\Omega$ )	2.2	1.8	1.4
$L_{fb}$ (mH)	0.35	0.27	0.2

Sur la Fig.8, nous présentons la vitesse mesurée ainsi que la caractéristique couple-vitesse pour la configuration de bobinage où l'on a déconnecté la bobine B2. L'harmonique d'espace prépondérant est dans ce cas le 7 ( $n=14$ ), Tableau III. Les résultats obtenus grâce au modèle numérique développé concordent avec les mesures effectuées dans la zone de fonctionnement en moteur, par contre, le résultat est moins bon ailleurs.

Cette différence est due aux couples parasites introduits par la circulation de courants entre les barres via les tôles. Le modèle électromagnétique que nous avons développé ne tient pas compte de ce phénomène typiquement 3D, et il est d'ailleurs extrêmement difficile de l'incorporer dans une modélisation par éléments finis, même en 3D. Plusieurs auteurs ont étudié ce phénomène et des mesures de couple ont montré que les courants inter barres sont à l'origine d'importants couples additionnels mais aussi de pertes fer supplémentaires non négligeables [14], [15], [16].

Pour la configuration de bobinage où les bobines B2 et B3 sont déconnectées, la vitesse mesurée et la caractéristique couple-vitesse sont présentées sur la Fig.9. Le Tableau III montre l'importance des harmoniques 5 et 7, ce qui est bien vérifié par les mesures. Les calculs effectués concordent bien avec les mesures jusqu'à une vitesse d'environ 150 tr/mn, par contre, dans la zone de fonctionnement en frein, l'effet des courants inter barres est assez net.

## VIII. CONCLUSIONS

Nous avons présenté un modèle électromagnétique qui utilise la résolution par éléments finis 2D des équations du champ en adoptant la représentation complexe des grandeurs à variation sinusoïdale par rapport au temps. Nous avons vu comment tenir compte du mouvement du rotor par le couplage des champs dans l'entrefer, pour chaque harmonique d'espace, par la méthode du double entrefer. Le principe de superposition permet de déterminer la solution finale.

Afin de traiter les problèmes non linéaires, nous avons proposé une approche qui permet d'introduire des réluctivités équivalentes. Différentes définitions de la réluctivité équivalente sont adoptées et les performances d'un moteur à induction, calculées en utilisant chacune de ces définitions, sont comparées à des mesures. Il s'avère que l'induction magnétique peut être considérée comme sinusoïdale lors d'un fonctionnement à vide, alors que, comme il fallait s'y attendre, le champ présente des harmoniques importants. Par ailleurs, il est difficile de conclure quant à la pertinence d'utiliser l'une ou l'autre des différentes définitions de la réluctivité effective.

Dans la phase de validation de nos calculs, nous avons conçu un banc d'essais qui permet des mesures spécifiques du couple.

Le moteur est muni d'un bobinage où toutes les bobines élémentaires sont accessibles. Selon le mode de connexion de ces bobines, nous pouvons obtenir différents spectres harmoniques. Le couple est obtenu par une méthode dynamique basée sur la dérivation de la vitesse de rotation. Les résultats du calcul sont en bonne concordance avec les mesures effectuées dans la zone stable de fonctionnement.

Cependant, le rotor utilisé étant à barres inclinées, le phénomène des courants inter barres est à l'origine de couples additionnels non négligeables, en particulier lors du fonctionnement en frein.

Le travail que nous avons effectué n'est pas exhaustif et nous pensons que les modèles que nous avons développés doivent être affinés pour, entre autres, prendre en compte la spécificité des problèmes 3D. En effet, une attention particulière doit être prêtée aux phénomènes liés aux courants inter barres, dont nous avons apprécié les effets au travers des différentes mesures de couple que nous avons effectuées.

#### IX. REFERENCES

- [1] S. R. H. Hoole, "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, No. 6, November 1985, pp. 2292-2295.
- [2] T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time stepping techniques", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 471-473.
- [3] D. Rodger, H. C. Lai, P. J. Leonard, "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 548-550.
- [4] A. A. Abdelrazek, J. L. Coulomb, M. Féliachi, J. C. Sabonnadière, "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No. 2, March 1982, pp. 655-659.
- [5] G. Vinsard, B. Laporte, "A new formulation for induction machine computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, September 1994, pp. 3693-3696.
- [6] J. P. Bock, "Modélisation et calcul couplé des champs électromagnétiques dans les machines asynchrones en régime transitoire", Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy (France), Septembre 1996, 140 p.
- [7] E. Vassent, G. Meunier, J. C. Sabonnadière, "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, No. 4, July 1989, pp. 3064-3066.
- [8] S. Mezani, "Modélisation électromagnétique et thermique des moteurs à induction, en tenant compte des harmoniques d'espace", Thèse de Doctorat de l'INPL, Nancy (France), Juillet 2004, 113 p.
- [9] P. L. Alger, *Induction machines - Their behavior and uses*, Gordon and Breach Science Publishers, 3<sup>rd</sup> edition, 1995, 528 p.
- [10] B. Laporte, "Etude du comportement d'un matériau ferromagnétique isotrope dans un champ glissant", *Revue Générale de l'Electricité (RGE)*, Tome 83, No. 3, Mars 1974, pp. 155-160.
- [11] J. Luomi, A. Niemenmaa, A. Arkkio, "On the use of effective reluctivities in magnetic field analysis of induction motors fed from a sinusoidal voltage source", *Proceeding ICEM*, Munich (Germany), 1986, pp. 706-709.
- [12] N. A. Demerdash, D. H. Gillot, "A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 10, No. 3, September 1974, pp. 682-685.
- [13] B. Laporte, "Contribution au calcul des machines à pôles massifs", Thèse de Docteur-Ingénieur, Faculté des Sciences de l'Université de Nancy (France), 9 Octobre 1970, 51 p.
- [14] A. M. Odok, "Stray-load losses and stray torques in induction machines", *AIEE Transactions*, No. 77, Pt. II, 1958, pp.43-53.
- [15] N. Christofides, "Origins of load losses in induction motors with cast aluminium rotors", *Proceedings IEE*, Vol. 112, No. 12, December 1965, pp. 2317-2332.
- [16] R. Carlson, C. A. da Silva, N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, "Analysis of the effect of inter-bar currents on the performance of polyphase cage-induction motors", *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 39, No. 6, November/December 2003, pp. 1674-1680.

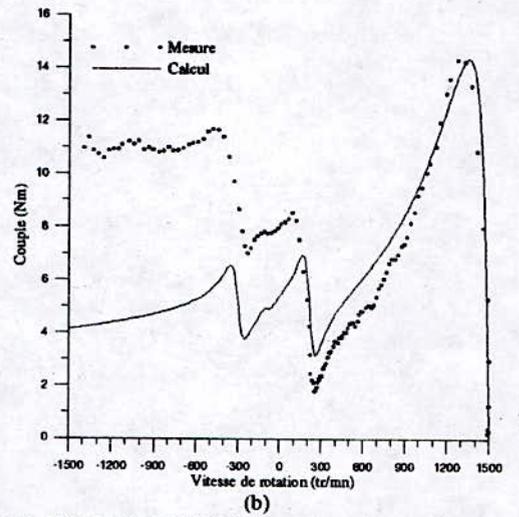
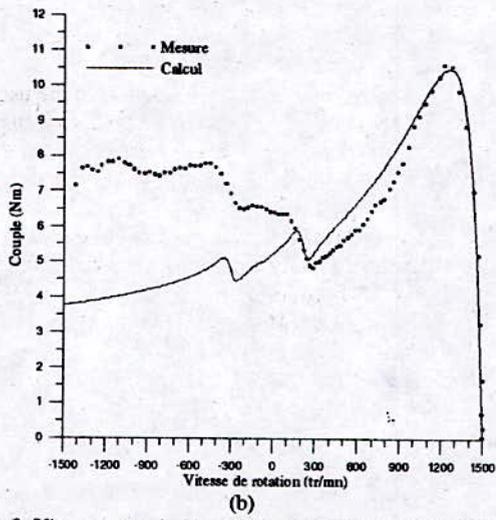
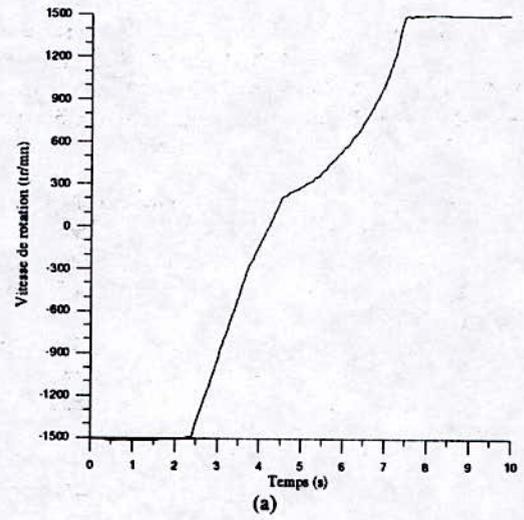
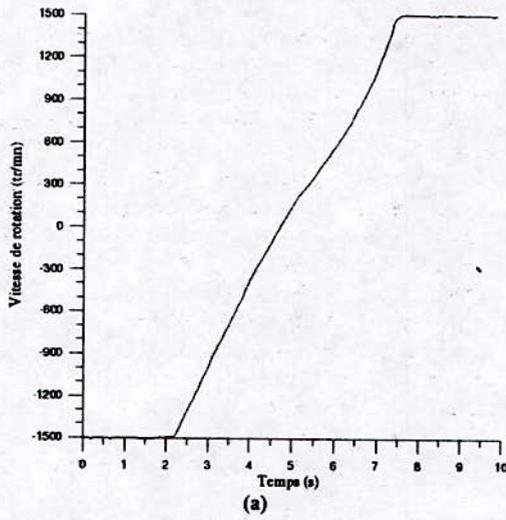


Fig. 8. Vitesse mesurée (a) et comparaison des couples mesuré et calculé (b) (bobine B2 manquante)

Fig. 9. Vitesse mesurée (a) et comparaison des couples mesuré et calculé (b) (bobines B2 et B3 manquantes)

# Maillage et Minimisation de la Largeur de Bande pour les Structures Cylindriques Creuses

\*Y. Boutora, \*\*R. Ibtouen, \*\*\*N. Takorabet

\*Université MM de Tizi-Ouzou, RP 17 Tizi Ouzou 15000 Algerie

E-mail : [boutora\\_youcef@yahoo.com](mailto:boutora_youcef@yahoo.com)

\*\*E.N. Polytechnique BP 182 El-Harrach 16200 Alger Algerie

E-mail : [ribtiouen@yahoo.com](mailto:ribtiouen@yahoo.com)

\*\*\*GREEN ENSEM INPL

2, av. de la Forêt de Haye 54516 Vandoeuvre lès Nancy – France

E-mail : [n.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:n.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr)

Résumé – Le maillage des structures, génère, pour la résolution par éléments finis, des matrices de rigidité creuses. Des méthodes de minimisation de largeur de bande sont adaptées en vue de réduire leur stockage. Nous proposons une nouvelle méthode de numérotation simple et efficace des nœuds du maillage d'une structure cylindrique creuse en vue de la minimisation de la largeur de bande. Cette méthode est intéressante pour la résolution des équations électromagnétiques dans les machines électriques tournantes.

Keywords: bandwidth minimisation, finite elements method.

## I. INTRODUCTION :

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour la résolution d'équations aux dérivées partielles conduit à des systèmes d'équations généralement creux [1]. Le coût généré par la résolution de ces systèmes dépend de la taille du système, de la méthode de stockage utilisée, ainsi que de la méthode de résolution choisie [2-3].

Dans les systèmes de moyenne taille, où le nombre de nœuds est inférieur à 5000, on préconise l'utilisation de méthodes directes, pour leur précision. Au-delà, les méthodes indirectes sont le plus souvent utilisées, à l'exemple de la méthode du gradient conjugué et celle du bi-gradient conjugué [3]. Ces méthodes conviennent pour un stockage vectoriel, ou seuls les éléments non nuls sont stockés. Cependant, ces méthodes sont susceptibles d'entraîner un cumul d'erreur dans le cas d'une résolution pas à pas dans le temps, des équations aux dérivées partielles à cause de l'imprécision générée par ces mêmes méthodes. La recherche d'une meilleure précision devient contraignante en temps d'exécution. Le recours aux méthodes directes est délicat. Une des méthodes requises pour optimiser le calcul direct consiste à minimiser la largeur de bande des matrices de rigidité.

Des méthodes de minimisation ont donc vu le jour tel que la méthode de Cuthill – Mckee [4], à laquelle on a associé la méthode GPS [5]. Cette méthode est basée sur la construction d'un graphe associé à la matrice du système afin de renuméroter les nœuds de façon à réduire l'excentricité du graphe associé à la matrice [2]. De nouvelles méthodes, issues des mathématiques opérationnelles, ont été appliquées en vue d'optimiser cette renumérotation. On peut citer l'exemple de la

méthode « Tabu search » [6] ou l'application des algorithmes génétiques [7].

Nous proposons une méthode de numérotation (ou de renumérotation) des nœuds d'un maillage donné adapté aux structures cylindriques creuses que l'on rencontre en électrotechnique au travers de machines électriques tournantes.

L'intérêt de cette méthode réside essentiellement dans le coût dérisoire, en temps d'exécution et de mise en œuvre comparé à celui exigée par les méthodes citées plus haut.

En effet, les positions des numéros sont supposées connues à l'avance et seule la numérotation du maillage est affectée. La bande obtenue est comparable à celle renvoyée par la méthode de Cuthill Mckee [4] pour la même structure.

## II. GRAPHE ASSOCIE ET EXCENTRICITE MAXIMALE

### A. Matrice et graphe associé

Soit une matrice  $A$  quelconque de dimension  $(n \times n)$  symétrique définie positive. Sa largeur de bande est donnée comme suit [2-3]:

$$lb(A) = i - \min \{ |i - j| \mid a_{ij} \neq 0 \} \quad (1)$$

A chaque ligne est associé un élément diagonal non nul, qu'on appellera nœud. A tout élément non nul de chaque ligne sera associé un couplet (ligne – colonne) représenté par un segment liant les nœuds de la ligne et de la colonne du couplet.

Cette combinaison de nœuds et de segments forme un graphe dit graphe  $G$  associé à la matrice  $A$  et noté :

$$G^A = (X^A, E^A) \quad (2)$$

Où  $X^A$  représente l'ensemble des nœuds de la matrice  $A$ , et  $E^A$  l'ensemble des segments de la matrice  $A$ .

Le graphe est valide si et seulement si

$$\forall \{x_i, x_j\} \in E^A, a_{ij} = a_{ji} \neq 0, i \neq j \quad (3)$$

où  $x_i$  et  $x_j$  représentent les nœuds de  $X^A$ , et les couples  $\{x_i, x_j\}$  les segments de  $E^A$ .

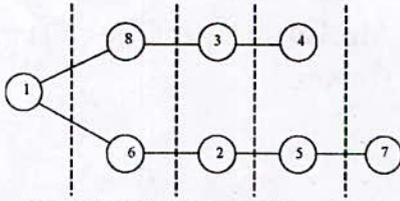


Fig. 1. Graphe G(A) associé à la matrice A

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \otimes & & \otimes \\ & 2 & & & \otimes & \otimes & \\ & & 3 & \otimes & & & \otimes \\ & & \otimes & 4 & & & \\ \otimes & \otimes & & & 5 & & \otimes \\ & & & & \otimes & 6 & \\ & & & & & & 7 \\ \otimes & \otimes & & & & & & 8 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Les croix  $\otimes$  représentent sur la matrice les éléments non nuls. Le graphe associé à cet exemple est donné en Fig. 1. Sur le graphe, les éléments non nuls sont représentés par des segments.

B. Excentricité maximale

L'excentricité est le diamètre du graphe, soit l'éloignement maximal en terme de niveaux entre les extrémités du graphe associé. Dans l'exemple cité, l'excentricité obtenue dépend du nœud de départ. Ainsi, si (1) est le nœud de départ, l'excentricité maximale obtenue jusqu'au nœud (7) est de 5 niveaux. (voir Fig. 1.).

Si on choisit le nœud (7) ou (4) comme nœud de départ, l'excentricité maximale est maximisée à 8 niveaux et la renumérotation la plus simple et la plus logique pour minimiser la largeur de bande consiste à numéroter dans le sens progressif (voir Fig. 2.), et la matrice associée est donnée par A'.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \otimes & & & & & & \\ \otimes & 2 & \otimes & & & & & \\ & \otimes & 3 & \otimes & & & & \\ & & \otimes & 4 & \otimes & & & \\ & & & \otimes & 5 & \otimes & & \\ & & & & \otimes & 6 & \otimes & \\ & & & & & \otimes & 7 & \otimes \\ & & & & & & \otimes & 8 \end{pmatrix} \quad (5)$$

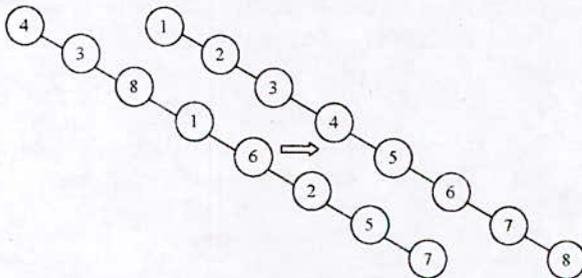


Fig. 2. Excentricité maximale et renumérotation.

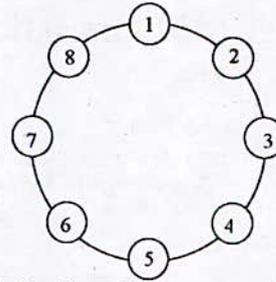


Fig. 3. Graphe fermé associé à une structure simple circulaire.

La méthode de l'excentricité maximale, qui consiste à choisir le nœud de départ adéquat permet de minimiser la largeur de bande.

Dans le cas où un segment (1-8) vient fermer (matrice A') le graphe G(A') obtenu en figure (Fig. 2), on aboutit à une structure circulaire. Dans ce cas, la largeur de bande devient maximale. (voir Fig. 3.):

En appliquant le principe de l'excentricité maximale, et en numérotant niveau par niveau, nous obtenons la renumérotation de la figure (Fig. 4.).

Une remarque est faite considérant que, sur le graphe, nous retrouvons sur le côté gauche des nombres impairs, et sur la droite des nombres pairs. Cette caractéristique sera exploitée pour mettre en œuvre notre méthode. La matrice résultante de cette numérotation est donnée par :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \otimes & \otimes & & & & & \\ \otimes & 2 & & \otimes & & & & \\ \otimes & & 3 & & \otimes & & & \\ & \otimes & & 4 & & \otimes & & \\ & & \otimes & & 5 & & \otimes & \\ & & & \otimes & & 6 & & \otimes \\ & & & & \otimes & & 7 & \otimes \\ & & & & & \otimes & \otimes & 8 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Nous voyons que la largeur de bande a été réduite. C'est sur ces principes que nous avons construit notre méthode de numérotation.

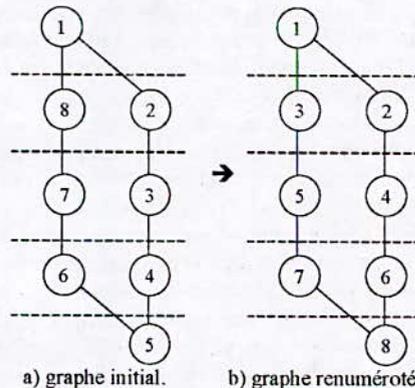


Fig. 4. Excentricité maximale et renumérotation dans le cas de la structure circulaire.

### III. METHODE PROPOSEE

La méthode que nous proposons dans notre article consiste à modifier la numérotation des nœuds en agissant directement sur le maillage, soit avant même la construction de la matrice. Elle est basée sur le principe de la méthode de l'excentricité maximale. En associant les deux types de renumérotation présentés, et en les appliquant à deux types de maillage : triangulation de Delaunay et maillage régulier, nous avons obtenu des largeurs de bande très réduites.

#### A. Largeur de bande et maillage

Dans la numérotation des éléments, la largeur de bande des matrices globales obtenues est associée à la différence maximale des numéros des nœuds formant chaque élément du maillage. La largeur de bande maximale du système est la différence maximale déterminée pour tous les éléments ; elle est donnée par [1] :

$$lb = \max |N_i - N_j| \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

où  $N_i$  et  $N_j$  représentent les numéros associés aux éléments d'un maillage donné.

Une numérotation adéquate permet donc de réduire la valeur de cette largeur de bande. Il suffit donc de réduire l'écart entre les numéros au niveau de chaque élément. C'est l'objectif même de la méthode que nous proposons.

#### B. Maillage et graphe associé à la matrice de rigidité

Le graphe associé à la matrice découlant d'un maillage donné est comme suit :

- Les nœuds du graphe correspondent aux nœuds du maillage ;
- Les segments du graphe sont donnés par les segments du maillage.

#### C. Principe de la méthode de renumérotation :

Soit une structure cylindrique creuse quelconque. Effectuons une triangulation au sens de Delaunay. Il s'agit maintenant de numéroter ou de renumérotter les nœuds obtenus. Décomposons la structure en  $N_s$  secteurs ; où  $N_s$  est un nombre pair.

Chaque secteur porte alors sur une ouverture angulaire de  $2\pi/N_s$  (Fig. 5.). La numérotation de ces secteurs est particulière.

- On numérote en s'inspirant de la structure circulaire (Fig.3 et Fig.4) en progressant dans le sens trigonométrique avec des nombres impairs de 1 à  $N_s - 1$ , puis toujours dans le même sens en numérotant de façon régressive avec les numéros pairs de  $N_s$  à 2.
- Les nœuds de chaque secteur sont comptés selon la valeur du rayon associé (Fig. 6.), comme pour le cas de la structure ouverte (Fig. 2).

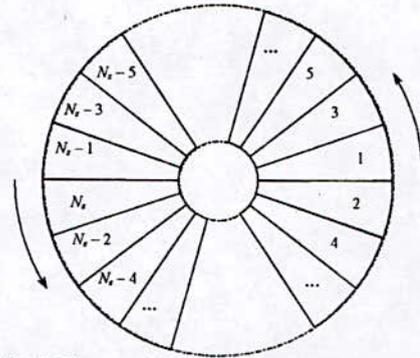


Fig. 5. Décomposition et numérotation des secteurs

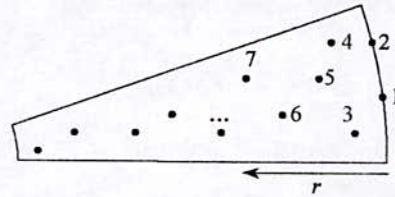


Fig. 6. Numérotation "radiale régressive" du nuage de points du secteur 1.

L'algorithme nécessaire pour réaliser cette numérotation est de construction facile. La renumérotation selon la position géométrique des nœuds fournit un vecteur permutation appliqué directement à la numérotation des nœuds de chaque élément (connectivités).

### IV. APPLICATION

#### A. Structure circulaire quelconque

Dans ce qui suit, nous considérons une structure cylindrique simple. La Figure (Fig.7) en illustre le maillage.

La numérotation effectuée sur la matrice en question a donné une matrice bande dont le profil (les points correspondent aux éléments non nuls ; les éléments nuls n'étant pas représentés) est donné par (Fig. 9.a). Nous avons appliqué l'algorithme de minimisation de largeur de bande de Cuthill - Mckee [4], et nous avons obtenu le profil de la matrice bande (Fig. 9.b.).

La bande minimale obtenue pour ce système est  $lb = 141$ , ce qui correspond à 5,5% de la taille du système (nombre de nœuds total).

Le nombre de secteurs joue un grand rôle dans la minimisation. En effet, nous devons avoir des secteurs qui doivent être équilibrés dans la répartition des nœuds. Dans ce cas, la Fig. 8 montre l'influence du nombre de secteurs sur la largeur de bande du système. Elle montre que la variation de la largeur de bande avec le nombre de secteurs de partage de la structure est une décroissance de type exponentiel. Au delà d'un nombre de secteurs supérieur à 180, la largeur se stabilise à un taux compris entre 5% et 6% de la taille du système.

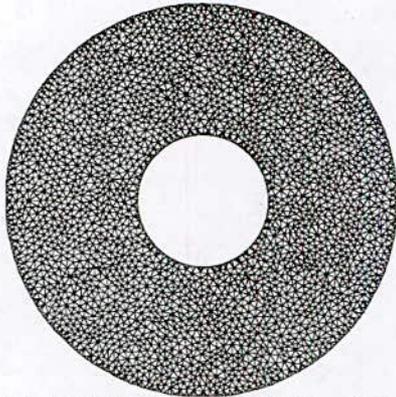


Fig. 7. Maillage d'une structure cylindrique simple (4925 éléments, 2578 nœuds)

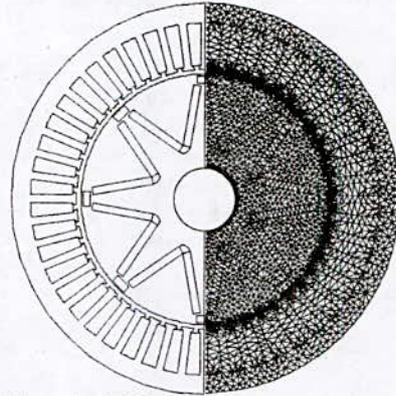


Fig. 10. Exemple 2 : Machine à aimants enterrés et maillage (18329 éléments, 9386 nœuds).

B. Application à une machine tournante

B. 1. Machine synchrone à aimants enterrés

Nous avons appliqué la méthode pour le maillage d'une machine synchrone à aimants enterrés, tétrapolaire, dont le rotor est muni d'une cage d'écureuil. Le stator comporte 48 encoches. La structure est de construction assez complexe (Fig. 10.).

Après avoir appliqué l'algorithme de numérotation, nous avons obtenu une largeur de bande minimale de 412, soit de 4,37 % de la taille du système. Le système est donc réduit de plus de 95%. La Fig. 11 montre une évolution de la largeur de bande analogue à celle obtenue sur la Fig. 8. On constate que pour un nombre de secteurs supérieur à 180, la largeur de bande se stabilise entre 4% et 5% de la taille du système.

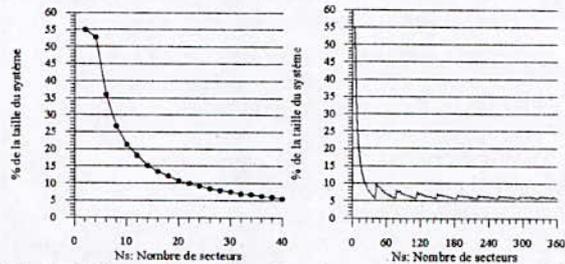


Fig. 11. Influence du nombre de secteurs sur la largeur de bande du système (Exemple 2)

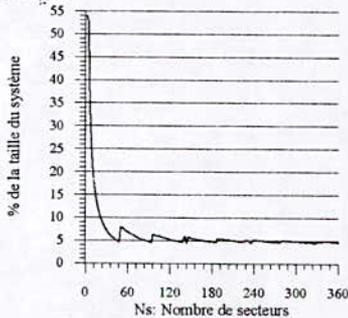
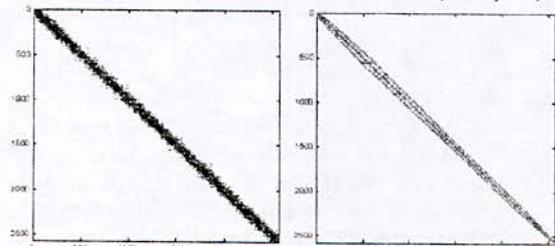


Fig. 8. Largeur de bande et nombre de secteurs (Exemple 1)



a) Méthode proposée b) Méthode de Cuthill Mc-kee  
Fig. 9. Profil (éléments non nuls) de la matrice obtenue avec les deux méthodes pour l'exemple 1 (Fig. 8)

B. 2. Machine synchrone à aimants à pôles lisses :

Un autre exemple d'application porte sur une structure de machine synchrone à aimants permanents à pôles lisses [10] alimentée en BDCM (Fig. 12). Cette structure, de construction relativement simple, est maillée en vue d'une résolution éléments finis à l'aide de triangles rectangles de manière régulière (Fig. 13).

Dans ce cas, nous comptons un nombre de nœuds  $N_r$  par secteur pratiquement constant. Dans le cas où l'ouverture d'un secteur correspond au pas de maillage, la largeur de bande obtenue, avec la même méthode, ne dépend que du nombre de nœuds comptés dans un secteur, c'est-à-dire sur une ligne radiale.

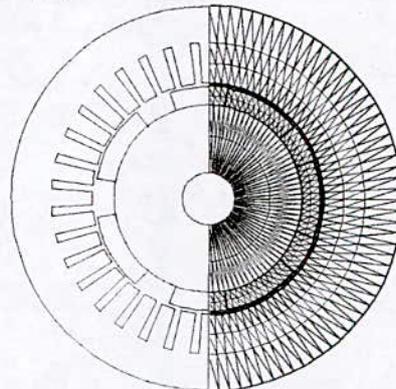


Fig. 12. Machine synchrone à pôles lisses et maillage régulier.

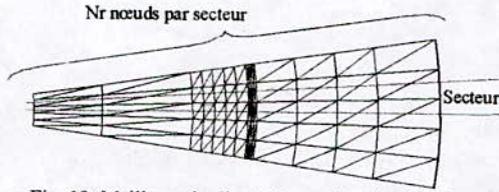


Fig. 13. Maillage régulier de la machine à pôles lisses

Ce type de maillage est facile à réaliser ; de plus, ses caractéristiques déduites après application de la méthode sont comme suit :

$$N_e = 2N_s(N_r - 1) \quad (8)$$

$$N_n = N_s N_r \quad (9)$$

$$l_b = 2N_r + 1 \quad (10)$$

$$N_z = 4N_s N_r - 2N_s \quad (11)$$

Où  $N_e$ ,  $N_n$  et  $N_z$  sont respectivement les nombres d'éléments et de nœuds du maillage, ainsi que le nombre d'éléments non nuls sur la matrice de rigidité.

Ce type de maillage permet donc, pour ces structures simplifiées d'effectuer un maillage très fin pour un pas angulaire. La résolution peut se faire sans avoir à remailler la structure, tout en effectuant des déplacements très fins, en utilisant une méthode directe pour la résolution, et en ne modifiant à chaque pas de calcul que le vecteur des contraintes. Le pas de déplacement peut être aisément modifié.

## V. ALGORITHME

La méthode réside en une renumérotation basée sur un positionnement géométrique selon les coordonnées polaires ( $r, \theta$ ). Il s'agit donc principalement d'opérations de tri. Il s'agit de classer chaque nœud dans le secteur correspondant (selon  $\theta$ ), puis de trier ces nœuds dans un vecteur  $V$  en fonction du rayon  $r$ .

$$\Delta\theta = 2\pi/N_s$$

Pour  $i$  allant de 1 à  $N_n$  faire

Calculer  $\theta_i$

$$k = \text{entière}(\theta_i / \Delta\theta)$$

si ( $k \leq N_s/2$ ) alors  $l_k = 2k + 1$

sinon  $l_k = 2(N_s - k)$

fin si

$$P(l_k) = P(l_k + 1)$$

$$V(P(l_k), l_k) = i$$

Fin pour  $i$

Pour  $i$  allant de 1 à  $N_s$  faire

Pour  $j$  allant de 1 à  $P(i)$

Pour  $k$  allant de  $j+1$  à  $P(i)$

Si ( $R_{V(k,i)} > R_{V(j,i)}$ ) alors

Permuter  $V(k,i)$  et  $V(j,i)$

Fin si

Fin pour  $k, j$  et  $i$ .

Le vecteur permutation est obtenu en y stockant progressivement la matrice  $V$ .  $R_{V(k,i)}$  est le rayon lié au nœud  $V(k,i)$ .

Dans le cas d'un remaillage répétitif, on dissocie la matrice de permutation  $V$  (calculée une seule fois) en deux sous matrices  $V_s$  (pour la partie statique) et  $V_m$  (pour la partie mobile). A chaque fois que la rotation du moteur dépasse le secteur, on procède à une renumérotation simplement en déplaçant les colonnes de la matrice  $V_m$ .

L'algorithme présenté est simple à mettre en œuvre, ne fait pas intervenir beaucoup d'artifices, et d'exécution rapide. Il n'est exécuté qu'une seule fois. De plus, la renumérotation est pratiquement instantanée lors des remaillages, ce qui lui confère un avantage certain par rapport aux méthodes de renumérotation classiques.

## VI. COMPARAISON AVEC L'ALGORITHME DE CUTHILL MCKEE

La méthode de Cuthill et Mac kee [2, 4] est une méthode de réduction du profil et de la bande d'une matrice creuse. Cette méthode, introduite en 1969, fut enrichie par la méthode de l'excentricité maximale qui permet de choisir le meilleur sommet pour la renumérotation. Cette méthode est dite méthode GPS (initiales de ses auteurs Gibbs, Poole et Stockmeyer [5]). Actuellement on utilise la dénomination de méthode de numérotation inverse.

Nous avons appliqué notre méthode ainsi que la méthode Cuthill Mc\_kee à une structure cylindrique simple (exemple 1 : Fig. 7) puis à la machine synchrone décrite plus haut (exemple 2 : Fig. 10) dans le but de comparer leurs performances. Les résultats de la comparaison des deux méthodes sont rassemblés sur le Tableau 1.

Le Tableau 1. montre que la méthode de Cuthill - Mc Kee est sensiblement plus performante. Le premier constat est que les structures circulaires creuses présentent une largeur de bande minimale avantageuse pouvant représenter pour des structures compliquées, telle que celle de l'exemple 2, un rapport de 2% de la taille globale du système.

Dans le cas du maillage régulier, la méthode proposée permet de réduire de 33% la largeur de bande obtenue avec la méthode de Cuthill Mc Kee. En effet, la bande obtenue dans ce cas également ne dépend pas du nombre de secteurs et vaut :

$$l_b = 3N_r \quad (12)$$

Comme attendu, cette méthode de numérotation s'adapte mieux au maillage régulier. La méthode proposée présente l'avantage d'être d'une mise en œuvre simple " utilisation souple ". En effet, le placement des numéros des nœuds étant connu, elle s'adapte facilement aux cas où on considère la rotation effective d'une partie par rapport à une autre. Pour des applications où le maillage de la structure se refait à chaque pas de temps, la renumérotation des nœuds doit être effectuée autant de fois.

Tableau 1 :

Comparaison des résultats obtenus par la méthode proposée et par celle de Cuthill Mc Kee.

Nn (nœuds)	Ne (éléments)	lb (Cuthill)	Lb (proposée)
Exemple 1			
62	88	12	12
2578	4925	76 - 2,94%	141 - 5,47%
6361	12002	117 - 1,83%	182 - 2,86%
10528	20336	171 - 1,62%	227 - 2,15%
Exemple 2			
9386	18329	175 - 1,86%	411 - 4,37%
8517	16678	186 - 2,18%	486 - 5,70%
9134	17800	195 - 2,13%	456 - 4,99%

La rapidité d'exécution de la méthode proposée redonne un intérêt certain par rapport à l'utilisation des autres méthodes. Le temps de remaillage serait moindre et l'opération plus simple à effectuer. Au vu des résultats obtenus, la méthode proposée permet de réduire la taille des systèmes de 98% à 95% de leur taille initiale.

#### VII. CONCLUSION

L'analyse des systèmes algébriques linéaires de grande taille reste un sujet intéressant du fait qu'ils représentent la plupart des modèles des systèmes physiques aujourd'hui. Les matrices générées parfois, à l'exemple de la méthode des éléments finis, sont creuses. Le stockage représente un coût évident dans le coût inhérent à leur résolution. De ce stockage dépend le choix de la méthode de résolution choisie (directe ou itérative).

Nous avons présenté une méthode de numérotation, s'intégrant facilement dans les maillages (générateurs de maillage) pour la méthode des éléments finis, qui permet, sans faire intervenir d'artifices externes, pour des structures cylindriques creuses courantes dans l'étude des machines électriques tournantes, d'optimiser, dans une certaine mesure, la largeur de bande.

L'algorithme est facile à mettre en œuvre, rapide, et surtout, n'est exécuté qu'une seule fois. Il peut présenter un avantage certain dans l'étude des régimes prenant en compte la rotation effective du rotor par rapport au stator.

#### VIII. REFERENCES

- [1] K. Hameyer, R. Belmans. *Numerical modelling and design of electrical machines and devices*. WITPress, Southampton, 1999.
- [2] A. George, J.W-H. Liu. *Computer solution of large sparse positive definite systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [3] I. Duff, A. Erisman, J. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Oxford Science Publications, 1986.
- [4] Cuthill, E. and MacKee, J. « Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices » *Proc. ACM National Conference, Association for Computing Machinery*, New York, 1969, pp.157-172 [5] Gibbs N. E., W. G. Poole and P. K. Stockmeyer. « An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of Sparse Matrix ». *SIAM J. Numer. Anal.*, 13-2, 1976, pp. 236-250
- [6] R. Marti, V. Campos, M. Laguna, F. Glover. « Tabu Search for the Matrix Bandwidth Minimization » *2001 European Journal of Operational Research*, 135 (2), 2001, pp.211-220.
- [7] Lim, A. Rodrigues, B. Fei Xiao. « Using an evolutionary algorithm for bandwidth minimization *Evolutionary Computation* ». CEC '03, Vol. 1, Dec. 8-12, 2003, pp. 678 - 683.
- [8] P.Theilin, H. Nee. « Calculation of the airgap flux density of PM synchronous motors with buried magnets including axial leakage and teeth saturation » *Electrical Machines and Drives. Ninth International Conference on* (Conf. Publ. No. 468), 1-3 Sept. 1999, pp. 339 -345.
- [9] P.Theilin, H. Nee. « Suggestions regarding the pole-number of inverter-fed PM-synchronous motors with buried magnets ». *Power Electronics and Variable Speed Drives, 1998. Seventh International Conference on (IEE Conf. Publ. No. 456)*, 21-23 Sept. 1998, pp 544 - 547.
- [10] B.Laporte, P. Manfe « Machines à aimants: de la conception aux prototypes ». *Firtech Univerdstry91*, France 23-24 mai 1991, pp 173 - 187

# METHODES DE REDUCTION DU COUPLE PULSATOIRE DANS LES MACHINES SYNCHRONES A AIMANTS PERMANENTS

R. Lateb, N. Takorabet \*, F. Meibody-Tabar  
INPL-GREEN-CNRS (UMR-7034)

02, avenue de la Forêt de Haye 54516 Vandoeuvre France

email : [ramdane.lateb@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:ramdane.lateb@ensem.inpl-nancy.fr)

email : [noureddine.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:noureddine.takorabet@ensem.inpl-nancy.fr)

email : [farid.meibody-tabar@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:farid.meibody-tabar@ensem.inpl-nancy.fr)

## I. RESUME

Les auteurs présentent un ensemble de techniques permettant de réduire le couple pulsatoire dans les machines synchrones à aimants permanents. Un aspect nouveau réside dans l'étude de l'effet de la segmentation des aimants sur le couple de détente. Une analyse par série de Fourier vient prédire certains résultats confirmés par un calcul par éléments finis.

Mots Clés : moteur à aimants, éléments finis, couple de détente, segmentation des aimants.

## II. INTRODUCTION

L'utilisation des moteurs synchrones à aimants permanents dans des applications industrielles de forte puissance est, de nos jours, très attractive grâce à leur forte puissance massique comparée à celle d'autres types de moteurs électriques. La propulsion marine et la transformation de l'énergie éolienne sont des exemples d'applications où les machines à aimants peuvent trouver un intérêt certain [1]. La conception des machines à aimants doit tenir compte des exigences de ces applications. Il se trouve qu'une des plus importantes exigences réside dans les vibrations mécaniques de la structure, plus particulièrement pour des vitesses relativement basses. Ces vibrations peuvent être réduites en réduisant les harmoniques de couple qui en sont à l'origine. La réduction des harmoniques de couple peut être assurées grâce à plusieurs techniques proposées par différents auteurs [2]. Parmi ces techniques, certaines agissent sur la forme d'ondes des courants d'alimentations pour des machines alimentées par des convertisseurs statiques et dont on connaît la forme d'onde des forces électromotrices (fém) [3]. D'autres techniques agissent sur la structure de la machine même pour réduire les harmoniques intrinsèques de la fém.

Une de ces méthodes consiste à choisir un bobinage adéquat lorsque le nombre d'encoches et la polarité sont imposés. Cette approche, bien que classique, permet de trouver des solutions parfois originales et intéressantes. Par contre, l'action sur le bobinage n'influe en rien sur le couple de détente qui provient de l'interaction des aimants avec l'armature statorique dentée présentant une perméance d'entrefer variable. L'action sur le couple de détente est alors réduite au choix de l'épanouissement des aimants mais celui-ci influe fortement sur les performances principales de la machine telles que le couple moyen et les harmoniques de la force électromotrice. Il est de coutume de choisir un épanouissement permettant de réduire les premiers harmoniques d'espaces gênant (le 5<sup>ème</sup> et le 7<sup>ème</sup> en général). Il est évident que des encoches statoriques fermées conduisent à une réduction du couple de détente mais cette solution n'est technologiquement pas réalisable et conduit, de plus, à une réduction de la fém. cette solution peut être approchée par l'utilisation de cales magnétiques sur les encoches statoriques et dont la perméabilité est choisie de sorte que l'effet soit concentré sur la réduction des fluctuations de la perméance sans réduire la fém.

Pour les moteurs de fortes puissances et dont les pas polaires sont relativement grands, chaque pôle d'aimants rotorique est réalisé à l'aide d'une juxtaposition de plusieurs blocs d'aimants de même polarité. La figure 1 montre un exemple où chaque pôle d'aimant est divisé en 2, 3 ou 6 blocs élémentaires.

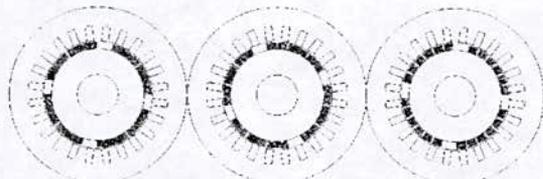


Fig.1. Principe de segmentation des aimants en plusieurs sous-aimants de même polarité

Cette manière de construire les pôles rotoriques est souvent motivée par des considérations économiques et technologiques. En effet, le collage d'un aimant sur la surface du rotor est une opération très délicate et coûteuse, surtout lorsque les aimants ont une grande taille. Nous étudierons dans cet article l'effet de cette segmentation des aimants rotoriques sur les harmoniques de couple et particulièrement le couple de détente. Nous étudierons différentes configurations et tenterons de donner une explication quantitative des résultats grâce à une analyse de Fourier.

### III. TECHNIQUES DE REDUCTION DE COUPLE DE DETENTE

Etant causé par l'interaction des aimants et de la denture statorique, le couple de détente est sensible aux paramètres suivants : Le nombre de dents statoriques, l'épanouissement des aimants et la segmentation des aimants. Nous explicitons l'influence de ces trois facteurs dans ce qui suit :

#### A. Nombre d'encoches :

Pour une machine ayant  $N_e$  encoches par paire de pôles, la contribution d'un aimant au couple de détente peut être mise sous la forme :

$$T_{cm}(\theta) = \sum_{h=1}^{\infty} T_h \sin(h N_e \theta) \quad (1)$$

où  $T_{cm}$  est le coefficient de Fourier du  $h^{ième}$  harmonique et  $\theta$  et l'angle électrique correspondant à la position du rotor. Pour illustrer l'influence du nombre d'encoches, nous considérons une armature statorique ayant 12 encoches par paire de pôles et une autre en ayant 13 (Fig. 2). On observe sur la figure 2.a que les deux aimants nord et sud ont la même position relative par rapport aux dents statoriques. Le couple de détente total est égale à deux fois celui produit par un seul aimant.

Par contre, dans la deuxième configuration (Fig. 2.b), les aimants ont des positions relatives décalées d'un demi pas dentaire  $\theta_0 = \pi / N_e$ . Le couple de détente global est de la forme :

$$T_{cp}(\theta) = \sum_{h=1}^{\infty} T_h [\sin(h N_e \theta) + \sin(h N_e (\theta - \theta_0))] \quad (2)$$

d'où :

$$T_{cp}(\theta) = \sum_{h=1}^{\infty} T_h [\sin(h N_e \theta)(1 + \cos(h N_e \theta_0)) - \cos(h N_e \theta) \sin(h N_e \theta_0)] \quad (3)$$

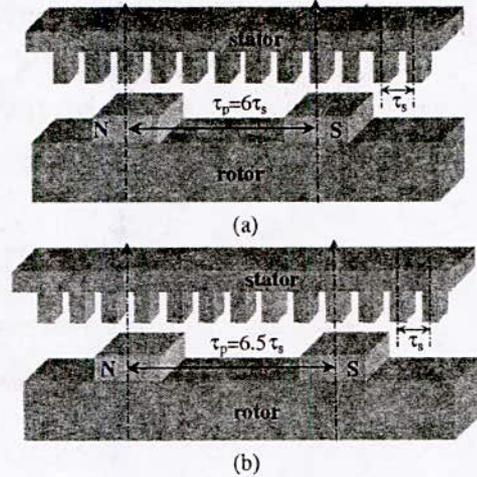


Fig. 2. Deux configurations possibles  
(a) 2 pôles - 12 encoches  
(b) 2 pôles - 13 encoches

En injectant l'expression de  $\theta_0$  dans (3), on montre que le fondamental ( $h=1$ ) ainsi s'annule. Il ne reste ainsi que les harmoniques pairs. La fréquence du fondamental est donc multiplié par deux. D'une manière générale, on peut montrer que la fréquence fondamentale du couple de détente est le plus petit multiple commun entre le nombre d'encoches et le nombre de pôles d'aimants. Nous rappelons que l'augmentation de la fréquence fondamentale du couple de détente est un avantage intéressant car cela éloigne les fréquences des vibrations mécaniques. Ainsi le risque de résonance mécanique avec les fréquences propres des structures est réduit.

#### B. Epanouissement des aimants :

Le couple de détente est principalement dû à l'interaction des flans d'aimants avec les encoches statoriques. En négligeant les effets de bord ainsi que la courbure du rotor, on peut considérer que le champ est confiné dans l'espace entre l'aimant et la dent et il est parfaitement uniforme. Sur la figure 3, on représente schématiquement la situation où l'on a un aimant couvrant trois dents statoriques. Sous les hypothèses annoncées, le champ est confiné dans les zones hachurées. Le déplacement de l'aimant vers l'avant ne fait pas varier l'énergie sous les dents (2, 3, et 4). Seule l'énergie sous la dent 1 varie. Dans ces trois positions, c'est le flan arrière de l'aimant qui agit. Ainsi, la dérivée de l'énergie qui est une image du couple de détente est une fonction périodique que l'on peut mettre sous la forme :

$$T_{trailing}(\theta) = T_0 + \sum_{h=1}^{\infty} T'_h \cos(h N_e \theta) \quad (4)$$

Soit  $\alpha_m$  l'épanouissement de l'aimant exprimé en angle électrique. Le couple produit par le flan avant est égale et

opposé à celui produit par le flan avant mais décalé de l'angle  $\alpha_m$ .

$$T_{leading}(\theta) = -T_0 - \sum_{h=1}^{\infty} T'_h \cos(hN_e(\theta - \alpha_m)) \quad (5)$$

Le couple totale produit par l'interaction de l'aimant avec les dents statoriques est donc de la forme :

$$T_{cm}(\theta) = \sum_{h=1}^{\infty} T'_h (\cos(hN_e\theta) - \cos(hN_e(\theta - \alpha_m))) \quad (6)$$

Sous les hypothèses émises ci-haut, et en analysant l'équation (6), on montre aisément que pour éliminer le couple de détente, il suffit de choisir l'épanouissement  $\alpha_m$  de sorte que cette somme soit nulle. Soit alors :

$$\alpha_m = \frac{2\pi k}{N_{sp}} = \tau_s k \quad (7)$$

où  $k$  est un entier positif et  $\tau_s$  le pas dentaire.

Cette condition indique que l'épanouissement polaire de l'aimant doit être un multiple entier du pas dentaire. Mais ce résultat ne tient pas compte l'effet de courbure des aimants et surtout des effets de bord. Dans ces conditions, un couple de détente nul est impossible à obtenir. Cependant on arrive à des minima intéressants lorsque l'épanouissement de l'aimant vérifie :

$$\alpha_m = (n \pm \varepsilon)\tau_s \quad \text{avec } 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (8)$$

Les valeurs de  $\varepsilon$  que l'on retrouve sont souvent de l'ordre de 0.14 à 0.17 selon que l'on tienne compte ou non de l'effet de courbure [4], [5].

### C. Segmentation des aimants

Comme on l'a précédemment relaté, pour des raisons de construction et de coût, dans les machines à aimants permanents de grandes puissances, chaque pôle d'aimants est segmenté en plusieurs blocs d'aimants élémentaires.

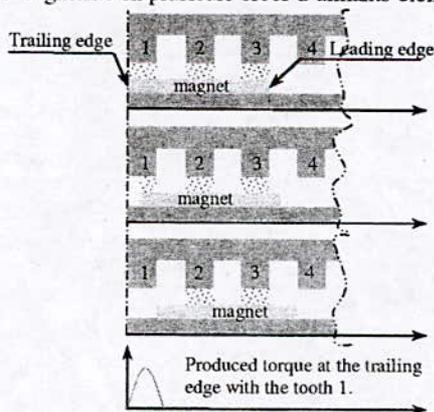


Fig. 3. Approche simplifiée du phénomène de couple de détente

Dans ce qui suit, lorsque l'on segmente, on utilise des blocs de forme rectangulaires avec une aimantation parallèle alors que dans le cas d'un bloc unique, l'aimantation est radiale et la forme de l'aimant est incurvée (tuile). On adoptera la notation suivante :

- RSMM pour « rectangular surface mounted magnets »
- CSMM pour « curved surface mounted magnet »

La figure (4) montre la représentation géométrique d'un bloc rectangulaire d'aimant sous un pôle. La relation entre l'épanouissement global  $\alpha_m$  d'un pôle d'aimant et les épanouissements des blocs élémentaires  $\alpha_{mb}$  s'exprime :

$$\begin{cases} \alpha_m = N\alpha_{mb} \\ \beta = \alpha_{mb} + \gamma \end{cases} \quad (9)$$

où  $N$  le nombre de blocs d'aimants élémentaires. Les épanouissements des blocs d'aimants peuvent s'exprimer en fonction du pas dentaire.

$$\begin{cases} (n \pm \varepsilon)\tau_s \\ 0 \leq \varepsilon < 1 \end{cases} \quad (10)$$

avec  $n$  un nombre entier.

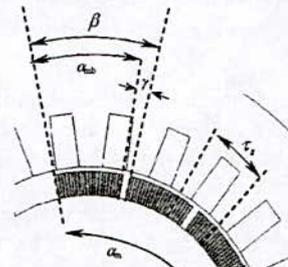


Fig. 4. Coupe transversale d'un pôle segmenté en 3 blocs d'aimants

## VIII. RESULTATS

La méthode des éléments finis est utilisée pour calculer les caractéristiques de la machine. Afin d'augmenter la précision des résultats et particulièrement pour le calcul du couple de détente, on applique un maillage fin au voisinage et dans l'entrefer. Grâce aux symétries géométrique et électrique, les simulations sont effectuées sur une paire de pôle de la machine, permettant ainsi un gain significatif en temps de calcul. Par ailleurs, on considère 60 positions du rotor sur un pas dentaire. Les simulations prennent en compte l'effet de la saturation des dents et des culasses.

Les calculs sont effectués pour une machine de forte puissance ayant 16 pôles et tournant à basse vitesse, avec des aimants montés en surface est une alimentation considérée sinusoïdale. Le pas d'enroulement adopté permet de faire disparaître l'harmonique 5 de bobinage

(15 encoches par paire de pôles). De plus, le choix d'un nombre impair d'encoches par paire de pôles, permet de doubler la fréquence principale des pulsations du couple de détente. Des cales magnétiques sont introduites dans les isthmes d'encoches pour réduire l'amplitude du couple de détente.

En considérant que les courants de phase sont fonction de la position du rotor  $\theta$  (machine autopilotée), le couple électromagnétique  $T_{em}$  est la somme du couple de détente  $T_c$  et du couple  $T_{e-i}$ , issue de l'interaction aimants-courants :

$$T_{em}(\theta) = T_c(\theta) + T_{e-i}(\theta)$$

$$T_c(\theta) + \frac{1}{\Omega} \sum_{j=1}^q i_j(\theta) \times e_j(\theta)$$

$\Omega$  est la vitesse angulaire du moteur,  $i_j$  et  $e_j$  sont respectivement le courant et la fém à vide de la  $j^{\text{ème}}$  phase.  $q$  le nombre de phase ( $q = 3$ )

On considère les courants de phase comme sinusoïdaux alors que la fém contient des harmoniques. Ces harmoniques sont à l'origine des composantes pulsatoires de  $T_{e-i}$ . Ces couples pulsatoires  $T_r$  associés aux couple de détente  $T_c$  sont les effets indésirables à atténuer que l'on identifiera dans cet article comme le couple pulsatoire total.  $T_{moy}$  est le couple moyen.

La figure (5) montre l'effet de l'épanouissement des aimants sur le couple moyen d'une machine avec  $N$  blocs d'aimants par pôle,  $N$  variant de 1 à 6. Il est évident que le cas d'un pôle non segmenté présente le plus grand couple dans la mesure où le volume d'aimants est plus important et que l'entrefer est constant. Inversement, le cas le plus défavorable est manifestement lors de la segmentation en deux blocs par pôle, car l'entrefer moyen est plus important (entrefer non uniforme) et par conséquent l'induction d'entrefer  $y$  est affectée. Quelque soit le nombre de blocs d'aimants adopté par pôle, une constante émerge de la figure, à savoir qu'au delà de

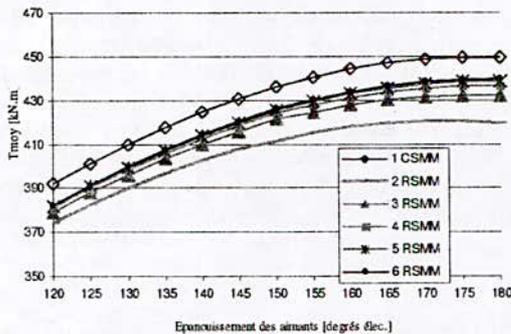


Fig 5. Couple moyen en fonction de l'épanouissement global des aimants

$\alpha_m \approx 165^\circ$ , le profit en couple moyen est faible comparé au coût des aimants lié à l'augmentation du volume.

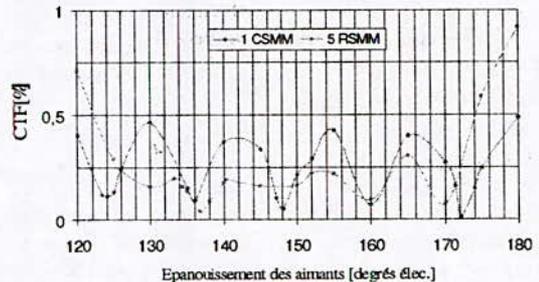
D'autre part, en dessous de  $\alpha_m \approx 145^\circ$ , le couple moyen est relativement faible. La variation de l'épanouissement des aimants présente non seulement un effet avéré sur le couple moyen mais influence aussi, de manière significative, le couple pulsatoire et le couple de détente. Toutefois, l'effet sur ces deux composantes diffère et par conséquent un compromis est nécessaire pour pouvoir atténuer les deux composantes à la fois.

Afin d'effectuer une étude comparative des différentes configurations, on se propose de définir les critères suivants :

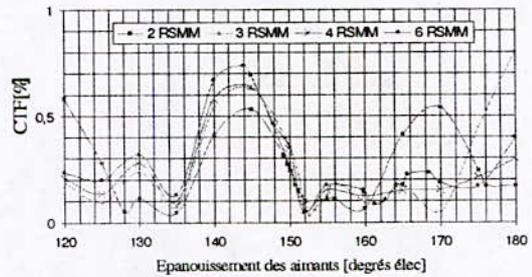
$$CTF = \frac{T_{c\text{pp}}}{T_{moy}} ; \quad PTF = \frac{T_{r\text{pp}}}{T_{moy}} \quad (13)$$

où  $CTF$  et  $PTF$  sont appelés respectivement : facteur de couple de détente et facteur de couple pulsatoire total.  $T_{c\text{pp}}$  et  $T_{r\text{pp}}$  représentent respectivement, le couple de détente crête à crête et le couple pulsatoire total crête à crête. A priori, bien qu'il n'est pas évident de faire ressortir une règle générale, on observe au vu de la figure (7), que l'épanouissement des aimants présente un effet sur le couple de détente.

On retrouve une certaine régularité dans les positions des minima du couple de détente. Ce résultat rejoint la prédiction de l'équation (8). Cependant l'espace entre deux minima successifs est d'un demi pas dentaire au



(a)



(b)

Fig 6. Facteur de couple de détente en fonction de l'épanouissement des aimants

lieu d'un pas dentaire. La raison provient du fait que nous avons un nombre d'encoches impair sur une paire de pôles ce qui divise par deux la période des oscillations.

En effet, comme il a été précisé dans l'article [6], le nombre de minima est lié au nombre impair d'encoches par paire de pôle.

Concernant les structures présentant des aimants segmentés, on peut affirmer que certaines configurations présentent l'intérêt d'avoir un couple de détente faible pour un épanouissement global particulier en occurrence  $\alpha_m = 152^\circ$ , comme le montre par ailleurs, la figure 7. Toutefois, il faut aussi considérer le couple pulsatoire total, comme on peut le voir sur la figure 8. Au regard des résultats présentés dans la figure 8, l'épanouissement présentant un faible couple pulsatoire total se situe dans la plage de  $155^\circ$  à  $165^\circ$ , ce qui par ailleurs, correspond à la plage où le couple moyen est optimum. Soulignons que l'effet de la segmentation sur le couple pulsatoire total semble minime puisque l'on observe la même évolution du facteur PTF et ce, quelque soit la structure adoptée (nombre de blocs d'aimants).

Bien que les critères importants sont de maximiser le couple moyen et de minimiser le couple pulsatoire, il est néanmoins nécessaire de prendre en considération les rangs des harmoniques de couple. En effet, l'idéal étant à la fois de réduire l'amplitude des pulsations et d'augmenter la pulsation du couple pulsatoire. Pour ce faire, nous avons étudié l'effet de l'épanouissement et de la segmentation sur les

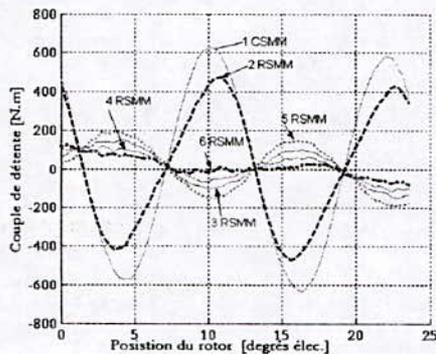


Fig 7 Formes d'onde du couple de détente pour  $\alpha_m = 152^\circ$  (° électrique).

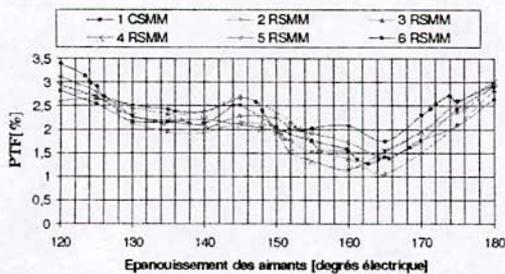


Fig 8. Facteur du couple pulsatoire total en fonction de l'épanouissement des aimants

harmoniques de rang 7, 11 et 13 de la fém à vide. Ces derniers créent avec le fondamental de courant, l'harmonique de rang 6 et 12 du couple.

Comme le montre la figure 9, l'évolution de l'amplitude de l'harmonique 7 semble identique pour quasiment toute les configurations présentées (sauf pour le cas de 3 blocs d'aimants par pôles). Le minima pour la plage d'épanouissement étudiée se situe à  $155^\circ$  ( $160^\circ$  pour 3 RSMM). La segmentation, par contre, semble affectée l'effet des harmoniques 11 et 13 en fonction de l'épanouissement. Les courbes de la figure 9.a et 9.b présentent deux minima qui ne coïncident pas avec celui du 7<sup>ème</sup> harmonique. Mais si l'objectif est de réduire le 6<sup>ème</sup> harmonique de couple, il suffit de choisir un épanouissement de  $155^\circ$  correspondant au minimum du rang harmonique 7 de la fém. Rappelons que le bobinage adopté élimine le 5<sup>ème</sup> harmonique de fém.

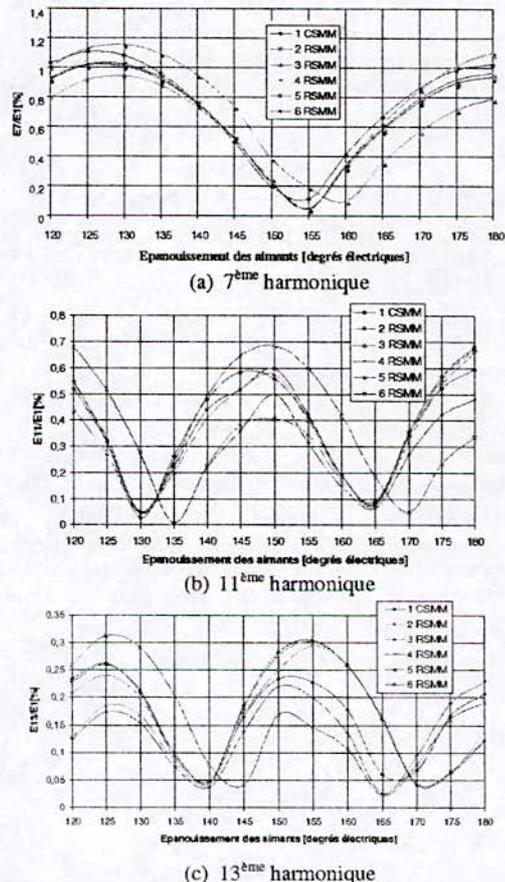


Fig 9. 7<sup>ème</sup>, 11<sup>ème</sup> an 13<sup>ème</sup> harmonique de la fém en fonction de l'épanouissement des aimants

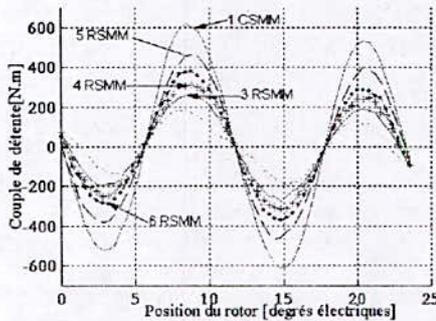


Fig 10. Formes d'onde du couple de détente  
 $\alpha_m = 155^\circ$  ( $^\circ$  électrique)

Pour cet épanouissement ( $\alpha_m = 155^\circ$ ), nous avons choisi de présenter dans la figure 10, la forme d'onde du couple de détente. Au regard des différentes observations et analyses, il en ressort qu'un épanouissement de  $155^\circ$  permet à la fois d'avoir un couple moyen important, de réduire l'amplitude du couple pulsatoire total et d'augmenter sa pulsation. Le choix d'un nombre de blocs de 4 par pôles, permet d'atténuer le couple de détente et le couple pulsatoire total.

#### VIII. CONCLUSIONS

Les moteurs à aimants permanents suscitent de plus en plus d'intérêt dans le domaine des fortes puissances à entraînement direct où un couple à faibles pulsations est essentiel. Le couple de détente fait partie des effets indésirables contribuant aux bruits et aux vibrations du motor. Ce dernier peut être réduit en combinant des techniques connues et établies.

Pour des raisons de coût de fabrication, les aimants d'un pôle dans les machines de grandes puissances sont souvent assemblées par blocs (segmentation). Dans cet article nous avons mis en relief le fait que le nombre de blocs par pôle peut être considéré comme un paramètre d'optimisation agissant sur des phénomènes locaux tel que le couple de détente et les harmoniques élevés de couple. Toutefois cette technique

de choix d'un nombre approprié de blocs d'aimants par pôles ne peut être effective sans la considération des principaux paramètres qui eux imposent le couple moyen. Soulignons que les pertes par courant de Foucault au sein des aimants peuvent être réduites en adoptant la segmentation.

A l'issue de l'analyse des résultats, on a mis en évidence que le type de bobinage adopté, le nombre d'encoches par paire de pôles et l'épanouissement des aimants sont les principaux paramètres agissant sur les performances de la machine (couple moyen, couple pulsatoire, 6<sup>ème</sup> harmonique du couple). Pour un choix approprié de ces paramètres, un choix adapté du nombre de blocs par pôle permet de réduire le couple de détente et par la même occasion le couple pulsatoire total.

#### IX. REFERENCES

- [1] A. Arkkio, N. Bianchi, S. Bolognani, T. Jokinen, F. Luise, M. Rosu, "Design of Synchronous PM Motor for Submersed Marine Propulsion Systems", *International Conference on Electrical Machines (ICEM 2002)*, Paper No 523, 25-28 August 2002, Brugge, Belgium.
- [2] Thomas M. Jahns, Wen L. Soong, "Pulsating Torque Minimization Techniques for Permanent Magnet AC Motors Drives- A Review", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 43, No 2, pp 321-330, April 1996.
- [3] J-P. Martin, F. Meibody-Tabar, B. Davat "Multiple-phase Permanent Magnet Synchronous Machine Supplied By VSIs Working Under Fault Conditions", *IEEE Industry Applications Conference, 2000, 35<sup>th</sup> IAS Annual Meeting*, October 2000, Roma- Italy
- [4] T.Li, G.R. Slemon, "Reduction of Cogging Torque in Permanent Magnet Motors", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, NO.6, pp 2901-2903, Nov 1988.
- [5] T. Ishikawa, G. R. Slemon, "A Method of Reducing Ripple Torque in Permanent Magnet Motors without Skewing", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, NO.2, pp 2028-2031, March 1993.
- [6] R. Lateb, N. Takorabet, F. Meibody-Tabar, J. Enon, A. Sarribouette, "Design Technique for Reducing the Cogging Torque in Large Surface Mounted Magnet Motors", *Proceedings of the ICEM' 04, Poland*

# Analyse par EF de la magnétodynamique complexe couplée aux circuits électriques des machines à induction avec couplage des champs du stator et du rotor dans l'entrefer

Y. Ouazir\*, R. Ibtouen\*, N. Takorabet\*\*, O. Touhami\*

\*ENP Alger Laboratoire de Recherche en Electrotechnique, BP 182 El-Harrach 16200 Alger, Algérie

\*\* GREEN ENSEM INPL, 2, av. de la Forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès Nancy France

**Résumé** – On présente une méthode permettant de coupler le champ du stator avec celui du rotor dans le cas des machines à induction avec des maillages séparés. L'équation réalisant ce couplage est déterminée sur une interface artificielle située dans l'entrefer et introduite dans le modèle éléments finis, de la magnétodynamique complexe, couplé aux circuits électriques à l'aide de la technique de transformation. Les résultats obtenus concordent avec les résultats expérimentaux.

**Mots Clés** : Machine à induction, méthode des éléments finis, magnétodynamique, couplage d'interface.

## I. INTRODUCTION

L'analyse du champ, au niveau magnéto-statique, dans les machines électriques est bien avancée au vu des diverses approches numériques développées. Comparé au régime magnéto-statique, le régime magnétodynamique reste une tâche difficile; en particulier dans les machines à induction alimentées en tension à cause de l'existence du mouvement relatif du rotor par rapport au stator. La difficulté réside dans le couplage magnétique du stator avec le rotor. Évidemment, de tels problèmes sont résolus en utilisant des techniques de calcul pas à pas dans le temps. Cependant, ces dernières méthodes présentent l'inconvénient d'un temps de calcul prohibitif surtout quand on s'intéresse au régime permanent sous une alimentation sinusoïdale où le transitoire n'est pas nécessaire [1, 2]. L'utilisation du modèle magnétodynamique complexe couplé aux circuits électriques s'avère très intéressant pour réduire le temps de calcul malgré qu'il soit plus adapté au cas linéaire. Dans de tels modèles, le rotor étant immobile, plusieurs méthodes ont été présentées. Dans l'une de ces méthodes [3], le mouvement du rotor est considéré en multipliant la conductivité du rotor par le glissement. Donc tous les harmoniques d'espace sont associés à ce glissement qui correspond à l'harmonique d'espace fondamental. Pour remédier à ce problème, des méthodes plus élaborées, basées sur la décomposition spectrale du champ dans l'entrefer, ont été proposées comme la méthode du double entrefer [4] ou couplage d'interface et celle des multiplicateurs de Lagrange [5].

Cet article présente une méthode alternative pour coupler les champs du stator et du rotor et calculer en

utilisant les éléments finis (EF), les machines à induction alimentées en tension. Dans cette approche, une équation de couplage est déterminée dans une interface située dans l'entrefer, pour lier le champ harmonique fondamental du stator à celui du rotor. Une technique de transformation [6] est utilisée pour introduire cette équation de couplage dans le procédé de calcul par EF où deux maillages séparés sont employés. Les équations électriques du stator et de la cage du rotor sont directement couplées à l'équation du champ magnétique. La méthode développée est testée sur deux types de rotor de machines à induction (rotor massif et rotor à cage). Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux.

## II. MODELE ELECTROMAGNETIQUE

### A. Equation du champ magnétique

Dans un modèle 2D, le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  présente une seule composante axiale. Deux domaines sont utilisés pour décrire la géométrie du moteur : le stator  $\Omega_s$  et le rotor  $\Omega_r$ . L'interface artificielle  $\Gamma$  est située dans l'entrefer (Fig.1). Les coordonnées des deux points, P dans  $\Omega_s$  et P' dans  $\Omega_r$ , sont reliées par  $(r = r'$  et  $\theta = \theta' + \Omega t)$ , où  $\Omega$  représente la vitesse mécanique du rotor.

Sous l'hypothèse d'un régime harmonique en ne tenant compte que du fondamental des harmoniques d'espace, les potentiels vecteurs magnétiques,  $a_s$  dans  $\Omega_s$  et  $a_r$  dans  $\Omega_r$ , s'écrivent, en notation complexe, comme suit :

$$a_s(P, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \underline{A}_s(P) \exp(-j\omega_s t) \} \quad (1)$$

$$a_r(P', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ \underline{A}_r(P') \exp(-jg\omega_s t) \} \quad (2)$$

où  $\omega_s$  et  $g$  représentent respectivement la pulsation du champ magnétique imposée par l'alimentation du stator et le glissement qui est donné, pour une machine à  $p$  paires de pôle, par :

$$g = 1 - p \frac{\Omega}{\omega_s}$$

$\underline{A}_s$  et  $\underline{A}_r$  dénotent la représentation complexe de  $a_s$  et  $a_r$  respectivement. A partir des équations de Maxwell, la répartition du potentiel vecteur magnétique dans les deux

domaines considérés peut être déterminée par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (v_s \nabla \underline{A}_s) + \underline{J}_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \\ \nabla \cdot (v_r \nabla \underline{A}_r) - \sigma (jg\omega_s \underline{A}_r - \frac{U_b}{L}) = 0 & \text{dans } \Omega_r \\ \underline{A}_r(R, \theta) = \underline{A}_s(R, \theta) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3)$$

où,  $\underline{J}_s$ ,  $v$  et  $\sigma$  représentent, respectivement, la densité complexe de courant au stator, la réductivité magnétique et la conductivité électrique.  $R$  est le rayon de l'interface circulaire  $\Gamma$ . La saturation magnétique du fer est prise en compte par l'introduction d'une réductivité équivalente, déterminée par le rapport du fondamental du champ magnétique sur l'induction magnétique supposée sinusoïdale [7].

**B. Equations des circuits électriques du stator et du rotor**

Pour analyser les machines à induction alimentées en tension, l'équation du champ magnétique doit être couplée avec les équations des circuits. Les impédances des têtes de bobines au stator et celles des anneaux de court circuit de la cage sont introduites pour compléter l'analyse par EF en 2D. Ces quantités sont généralement mesurées ou calculées analytiquement.

**B. 1. Stator**

Si on note par  $R_s$  et  $l_s$ , la résistance et l'inductance de fuite des têtes de bobines par phase du bobinage statorique, l'équation du circuit des trois phases du stator, en notation complexe et sous forme matricielle, s'écrit :

$$\{\underline{V}_s\} = [\underline{Z}_s] \{\underline{I}_s\} + \{\underline{E}_s\} \quad (4)$$

où

$$[\underline{Z}_s] = [R_s] + j[l_s \omega_s]$$

est l'impédance du stator;  $\{\underline{V}_s\}$ ,  $\{\underline{I}_s\}$  et  $\{\underline{E}_s\}$  représentent respectivement, les vecteurs tensions d'alimentation, courants et fem dans le stator. Les fem des trois phases peuvent être reliées au potentiel vecteur magnétique  $\underline{A}$ , par l'équation suivante :

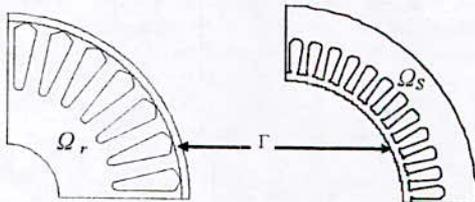


Fig. 1. Définition des domaines du stator et du rotor (l'entrefer est zoomé).

$$\{\underline{E}_s\} = \frac{L}{S} (j\omega_s (\iint_{\Omega_+} \underline{A}_s d\Omega - \iint_{\Omega_-} \underline{A}_s d\Omega)) \quad (5)$$

où  $L$  et  $S$  sont la longueur utile et la surface totale des conducteurs du stator;  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  sont, respectivement, la section des conducteurs aller et retour du bobinage. Avec les expressions (4) et (5), l'équation du circuit du stator couplée aux grandeurs magnétiques, est la suivante :

$$\{\underline{V}_s\} = [\underline{Z}_s] \{\underline{I}_s\} + j\omega_s \frac{L}{S} (\iint_{\Omega_+} \underline{A}_s d\Omega - \iint_{\Omega_-} \underline{A}_s d\Omega) \quad (6)$$

**B. 2. Rotor**

Les barres de la cage du rotor sont des conducteurs massifs court-circuités par des anneaux, on peut les assimiler à un circuit polyphasé. Le schéma électrique équivalent de la cage du rotor, présenté sur la Fig. 2, est donc constitué par les résistances en continu des barres ( $R_b$ ) et par les impédances des anneaux

$$[\underline{Z}_e] = [R_e] + jg\omega_s [l_e]$$

En utilisant les lois de Kirchhoff, les tensions et les courants induits dans les barres de la cage sont exprimés comme suit :

$$-\frac{1}{2} [M] [M]^T \{\underline{I}_b\} = [\underline{Z}_e] \{\underline{I}_b\} \quad (7)$$

où  $\{\underline{I}_b\}$  et  $\{\underline{V}_b\}$  sont les vecteurs courants et tensions induits dans les barres;  $[M]$  est une matrice de connexion ( $n_b, n_b$ ),  $n_b$  est le nombre de barres considérées, donné par :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La densité de courant de la k<sup>ème</sup> barre de section  $\Omega_b^k$  est :

$$J_b^k = -\sigma (jg\omega_s \underline{A} - \frac{U_b^k}{L}) \quad (8)$$

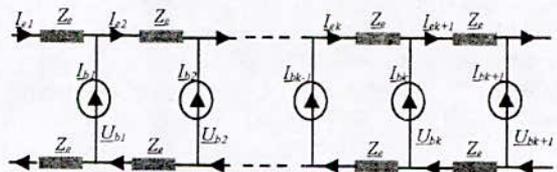


Fig. 2. Modèle du circuit de la cage du rotor.

donc, le courant total dans cette barre est :

$$I_b^k = \iint_{\Omega_b^k} J_b^k d\Omega_b^k \quad (9)$$

En injectant l'équation (8) dans l'équation (9), le courant total dans la  $k^{\text{ième}}$  barre s'écrit :

$$I_b^k = -j\sigma g \omega_s \iint_{\Omega_b^k} \underline{A}_r d\Omega_b^k + \frac{1}{R_b} U_b^k \quad (10)$$

Et, pour toutes les barres, le vecteur courant  $\{\underline{I}_b\}$  s'écrit :

$$\{\underline{I}_b\} = -j\sigma g \omega_s \iint_{\Omega} \underline{A}_r d\Omega + \frac{1}{R_b} \{\underline{U}_b\} \quad (11)$$

où  $\Omega$  représente la section totale des barres.

Ainsi, l'équation électrique du circuit du rotor est obtenue par la combinaison des équations (7) et (11):

$$-j\sigma g \omega_s \iint_{\Omega} \underline{A}_r d\Omega + \{\underline{Y}_r\} \{\underline{U}_b\} = 0 \quad (12)$$

avec :

$$\{\underline{Y}_r\} = [R_b]^{-1} + \frac{1}{2} [Z_e]^{-1} [M] [M]^T \quad (12)$$

### III. FOMULATION ELEMENTS FINIS DU PROBLEME COUPLE

#### A. Equation de couplage du champ dans l'entrefer

Le potentiel vecteur magnétique  $\underline{A}_s^\Gamma$  sur l'interface  $\Gamma$  par rapport au repère du stator, peut être développé en séries de Fourier complexe. Son fondamental est donné par :

$$\underline{A}_s^\Gamma(R, \theta) = \underline{C}_1^s \exp(jp\theta) \quad (13)$$

où  $\underline{C}_1^s$  est le coefficient de Fourier du fondamental de  $\underline{A}_s^\Gamma$ . En considérant les valeurs nodales sur l'interface, on obtient :

$$\underline{A}_s^\Gamma(\theta) = \{\underline{C}_1^s\}^T \{\underline{A}_s^\Gamma\} \exp(jp\theta) \quad (14)$$

$\underline{C}_1^s$  est un vecteur qui donne les valeurs de  $\underline{C}_1^s$  pour chaque nœud du stator situé sur l'interface  $\Gamma$ . Les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique des nœuds du rotor situés sur la même interface  $\Gamma$ , sont exprimées en fonction du vecteur  $\{\underline{A}_r^\Gamma\}$  en effectuant une transformation de coordonnées :

$$\{\underline{A}_r^\Gamma\} = [M] \{\underline{A}_s^\Gamma\} \quad (15)$$

C'est la forme matricielle de la troisième équation du système (3) où le vecteur  $\underline{C}_1^s$  dans (14) est inclus dans la matrice  $M$  pour chaque position d'un nœud de  $\Omega_r$  sur  $\Gamma$ . Cette équation de couplage doit être introduite dans la résolution du système (3).

#### B. Technique de transformation pour le couplage des équations de champ du stator et du rotor

L'application de la méthode Galerkin au système d'équations (3) conduit à la fonctionnelle suivante :

$$F = \begin{Bmatrix} \underline{A}_s \\ \underline{A}_r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{A}_s \\ \underline{A}_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{A}_s \\ \underline{A}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \underline{F}_s \\ \underline{F}_r \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

où,  $K$  et  $R$  sont respectivement les matrices masses du stator et du rotor. L'équation de couplage d'interface (15) est introduite dans la fonctionnelle (16) à l'aide d'une matrice de transformation  $[S]$ , telle que :

$$\begin{Bmatrix} \underline{A}_s \\ \underline{A}_r \end{Bmatrix} = [S] \{\underline{A}'\}$$

avec :

$$\{\underline{A}'\} = \begin{Bmatrix} \underline{A}_{s-\Gamma} \\ \underline{A}_s^\Gamma \\ \underline{A}_{r-\Gamma} \end{Bmatrix}^T$$

$\underline{A}_{s-\Gamma}$  et  $\underline{A}_{r-\Gamma}$  représentent respectivement les valeurs nodales des potentiels vecteurs magnétiques des nœuds dans  $\Omega_s$  et  $\Omega_r$  sans ceux sur  $\Gamma$ . La nouvelle fonctionnelle devient :

$$F' = \{\underline{A}'\}^T [S]^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} [S] \{\underline{A}'\} - \{\underline{A}'\}^T [S]^T \begin{Bmatrix} \underline{F}_s \\ \underline{F}_r \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Ainsi, la distribution du potentiel vecteur, dans les deux domaines, obtenue par la minimisation de cette nouvelle fonctionnelle, nous amène à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{s\Gamma} & 0 \\ K_{\Gamma s} & K_{\Gamma\Gamma} + M^T R_{\Gamma\Gamma} M & M^T R_{\Gamma r} \\ 0 & R_{r\Gamma} M & R_{rr} \end{bmatrix} \{\underline{A}'\} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_s \\ 0 \\ \underline{F}_r \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Le second terme de cette équation présente le vecteur source du champ magnétique dans  $\Omega_s$ ,  $\Omega_r$  et  $\Gamma$ .

Dans le domaine  $\Omega_s$ , le vecteur source  $\{\underline{F}_s\}$  décrit la densité de courant, supposée uniforme, dans le bobinage. Sa forme discrétisée en éléments finis triangulaires, pour chaque nœud (i) d'un élément (e), est donnée par :

$$\underline{F}_{si}^e = \iint_{\Omega_e} N_i \underline{J}_0 d\Omega_e = \frac{\Delta^e}{3} \underline{J}_0$$

où  $\underline{J}_0$  est exprimé en fonction des courants de phase du stator comme suit :

$$\underline{J}_0 = \frac{N^e}{\Delta^e} \beta^e (\alpha_a^e \underline{I}_a + \alpha_b^e \underline{I}_b + \alpha_c^e \underline{I}_c)$$

$N^e$  représente le nombre de conducteurs par élément,  $\beta^e$  est un coefficient égal à  $(\pm 1)$  donnant la polarité des conducteurs et  $(\alpha_a^e, \alpha_b^e, \alpha_c^e)$  définissent l'appartenance des éléments aux phases. Sous forme matricielle, on obtient :

$$\{\underline{F}^e\} = [C^e] \{\underline{I}_s\}$$

Et pour tous les éléments on peut écrire :

$$\{\underline{F}\} = [C] \{\underline{I}_s\} \quad (19)$$

$[C]$  est une matrice de connexion  $(3, n)$ .

Dans le domaine  $\Omega_r$ , le vecteur source  $\{\underline{F}_r\}$  est relié aux tensions induites aux bornes des barres du rotor. Sa forme discrétisée en éléments finis triangulaires, pour chaque nœud (i) d'un élément (e) appartenant à la  $k^{\text{ème}}$  barre, est donnée par :

$$\underline{F}_{ri}^{ek} = \sigma \iint_{\Omega_e} N_i \frac{U_b^k}{L} d\Omega_e$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\{\underline{F}_r\} = [Y^e] \{\underline{U}_b\}$$

Et pour tous les éléments on peut écrire :

$$\{\underline{F}_r\} = [Y] \{\underline{U}_b\} \quad (20)$$

où  $[Y]$  est une matrice de connexion  $(n, n)$ .

En considérant les équations (19) et (20), le système d'équations (18) sera transformé en :

$$[B \quad -C \quad -Y] \begin{Bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{I}_s \\ \underline{U}_b \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (21)$$

où  $B$  représente la matrice masse globale donnée par :

$$[B] = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sr} & 0 \\ K_{rs} & K_{rr} + M^T R_{rr} M & M^T R_{rr} \\ 0 & R_{rr} M & R_{rr} \end{bmatrix}$$

Cette matrice symétrique met en évidence les blocks de la matrice relative au couplage d'interface des deux domaines.

### C. Formulation en éléments finis des équations de circuit

La formulation en éléments finis des équations (6) et (12), des circuits du stator et de la cage du rotor, conduit à l'équation matricielle (22) pour le circuit du stator et à l'équation matricielle (23) pour le circuit de la cage du rotor. Ces équations matricielles sont les suivantes :

$$-[C]^T \{\underline{A}'\} + \frac{j}{\omega_s L} [Z_s] \{\underline{I}_s\} = \left\{ \frac{j}{\omega_s L} \underline{V}_s \right\} \quad (22)$$

$$-[Y]^T \{\underline{A}'\} + [Y_r] \{\underline{U}_b\} = 0 \quad (23)$$

### D. Equations globale du système couplé

La combinaison des équations (21), (22) et (23) conduit au système global représentant le couplage des équations du champ aux équations des circuits électriques dans la région magnétique considérée. Ainsi le système matriciel final à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} B & -C & -Y \\ -C^T & \frac{1}{j\omega_s L} Z_s & 0 \\ -Y^T & 0 & Z_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{A}' \\ \underline{I}_s \\ \underline{U}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{j\omega_s L} \underline{V}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Ce système d'équations non linéaires est résolu par la méthode de substitutions successives avec un facteur de relaxation.

## IV. RESULTATS

La méthode développée est testée sur deux types de moteurs à induction : Un rotor à rotor massif lisse et un autre à rotor à cage à encoches fermées (voir le Tableau I pour les paramètres). Ces deux types de moteurs asynchrones fonctionnent, évidemment, à un niveau de saturation élevé. La Figure 2 montre la distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'entrefer pour les nœuds du stator et ceux du rotor situés sur l'interface de couplage. Sur la Fig. 3, nous présentons deux cartes de champ relatives aux deux types de moteur, après recombinaison des deux domaines. Ces deux dernières figures montrent le couplage des lignes de champ au niveau de l'interface artificielle considérée. Sur la Fig. 4, nous avons présenté les performances pour les des deux types de moteur testés. A savoir le couple, le courant dans le stator et le facteur de puissance en fonction de la vitesse de rotation. Et enfin nous avons donné, sur la Fig. 5, les courants dans la cage du rotor à la vitesse nominale. Les résultats obtenus concordent avec ceux mesurés.

TABLEAU I  
PARAMETRES DES DEUX MOTEURS ETUDIES

paramètres	Rotor	Rotor	Unités
	à cage	massif	
Puissance nominale	5.5	2.2	kW
Tension par phase	220	220	V
Nombre d'encoches au stator	48	36	-
Nombre d'encoches au rotor	28	-	-
Epaisseur de l'entrefer	0.4	0.4	mm
Longueur utile	160	110	mm

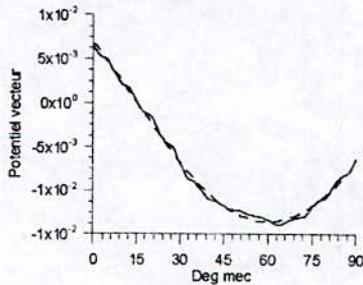


Fig. 2. Potentiel vecteur magnétique sur l'interface de couplage (côté stator : ligne continue ; côté rotor : ligne discontinue).

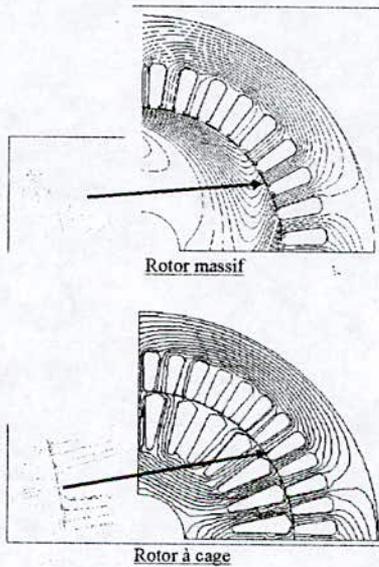
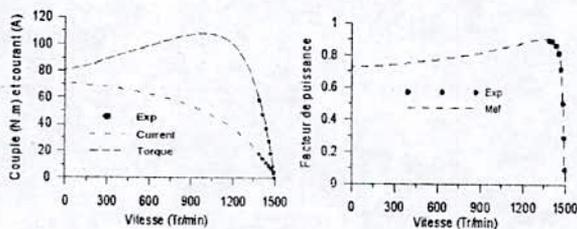


Fig.3. Carte de champ



(b)- Rotor à cage

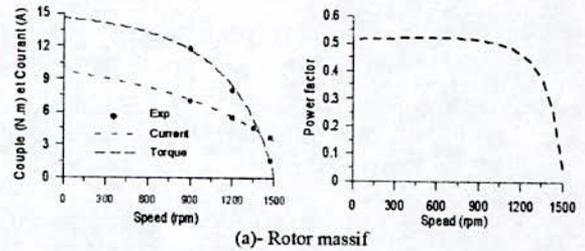


Fig. 4. Couple, courant et facteur de puissance en fonction de la vitesse

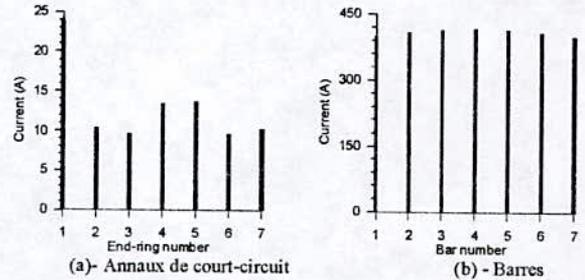


Fig. 5. Courants dans la cage à la vitesse nominale.

## V. CONCLUSION

Une méthode de couplage des champs du stator et du rotor au niveau d'une interface particulière située dans l'entrefer est développée. L'équation de couplage dans cette interface est introduite dans l'analyse, par éléments finis, de la magnétodynamique complexe couplée aux circuits électriques en utilisant la technique de transformation. L'effet de la saturation magnétique du fer dans le système global est pris en compte par l'introduction d'une réductivité équivalente. Avec le développement de cette méthode, les performances de deux types de machines à induction (rotor massif et rotor à cage classique) sont calculées en régime sinusoïdal. Les résultats obtenus concordent avec ceux issus de l'expérimentation. Cette méthode peut être encore adaptée pour des calculs pas à pas dans le temps.

## REFERENCES

- [1] C. S. Biddlecombe, J. Simkin, A.P. Jay, J.K. Sylkulsy and S. Lepaul, "Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion," *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 3182-3185, 1998.
- [3] E. Vassent, G. Meunier and J. C. Sabonnadiere, "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements," *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 3064-3066, 1989.
- [4] G. Vinsard and B. Laporte, "A new formulation for induction machine computation," *IEEE Trans. on Mag.* Vol. 30, No. 5, pp. 3693-3696, 1994.
- [5] H. De Gerssem and K. Hameyer, "Air-gap flux splitting for the time-harmonic finite-element simulation of single-phase induction machines," *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 38, no. 2, pp. 1221-1224, 2002.
- [6] G. Touzot and G. Dhatt, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine SA Editeur, Paris, 1984.
- [7] B. Laporte, "Etude du comportement d'un matériau ferromagnétique isotrope dans un champ glissant," *Revue Générale de l'Electricité*, vol. 83, no. 3, pp. 155-160, Mars 1974.

## Etude de sensibilité acoustique d'une machine asynchrone à vitesse variable

H. Bessai\*, A. Ait-Hammouda\*\*, S. Vivier\*\*, M. Hecquet\*\*, P. Brochet\*\*, R. Ibtouen\*\*\*

\* Département d'Electrotechnique – Faculté de Génie Electrique et d'Informatique – Université Mouloud Mammeri, 15000 Tizi-Ouzou

\*\* L2EP – Ecole Centrale de Lille, Cité Scientifique, B.P.48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex France

\*\*\* LRE Ecole Nationale Polytechnique ENP Alger, BP 182 El-Harrach 16200 Alger

**Résumé** – Cet article présente une application de la méthode des plans d'expériences à l'étude de sensibilité acoustique d'une machine asynchrone fonctionnant à vitesse variable.

La méthode des plans d'expériences combinée à un modèle analytique permet de disposer d'un outil bien adapté en vue d'une optimisation.

Premièrement la technique de screening permet de sélectionner les paramètres de la machine ayant un influence significative sur le bruit acoustique émis par la machine, ensuite la technique des surfaces de réponses est utilisée pour la recherche des conditions optimales en bruit et de définir des configurations de machines présentant un minimum de bruit sur un large plage de fonctionnement.

**Mots clés** – Modèle analytique multi-physique, machine asynchrone, plans d'expériences, Screening, Surface de réponse, bruit acoustique.

### I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, les conditions d'utilisation des machines électriques ont évolué et les contraintes économiques poussent à la réalisation de machines de plus en plus compactes et légères. Ainsi, la conception et l'optimisation des machines électriques demandent de prendre en considération de nombreux phénomènes : électromagnétique, mécanique, thermique, vibro-acoustique, etc.

De plus, les contraintes sur la réduction du bruit émis par les machines électriques sont de plus en plus restrictives comme le montre le nombre important de projets sur le sujet.

Plusieurs études [1, 2] ont montré que les vibrations sont la conséquence de l'excitation d'un système mécanique par des efforts dont l'origine est électromagnétique. Il existe aussi d'autres sources, telles

que les bruits aérodynamiques, les bruits de roulements ... et dont nous ne parlerons pas dans cette étude.

La réduction de ces bruits et vibrations, à alimentation donnée, est un axe dominant de progrès pour le développement de ces systèmes.

Parallèlement, les outils et méthodes d'analyses sont de plus en plus performants et précis, permettant ainsi d'étudier des phénomènes couplés : utilisation de la méthode des éléments finis en magnétodynamique (couplage circuit), modèle réseaux de perméances couplés [3, 4].

Deux voies peuvent alors être adoptées : agir sur les vibrations par action sur l'excitation ou bien par modification de la structure du système.

Dans ce travail, nous allons explorer la deuxième solution. En effet, nombreux sont les travaux qui présentent des méthodes basées sur le contrôle de l'alimentation, l'injection d'harmoniques dans les enroulements afin de réduire le bruit magnétique [5].

L'objectif général de notre travail est à partir d'un modèle souple et rapide, d'étudier la sensibilité vibro-acoustique d'une machine asynchrone à vitesse variable.

L'idée est de prendre en considération dès la phase de conception la notion de bruit d'origine électromagnétique. Pour cela on utilise un modèle analytique multi-physique, permettant de prédire le bruit et développé par A. Ait Hammouda [6].

L'étude de sensibilité est effectuée par la technique des plans d'expériences [7]. Ainsi, dans un premier temps une étude qualitative est menée pour repérer les facteurs influents au niveau acoustique par l'utilisation de la technique de screening.

Le second volet de notre étude est quantitatif, et vise à déterminer les variations du bruit acoustique de la machine vis-à-vis des facteurs influents et de rechercher les conditions optimales en bruit par la technique des surfaces de réponse obtenues par l'utilisation des plans treillis.

## II. PRESENTATION DU MODELE MULTI-PHYSIQUE

Le modèle utilisé calcule l'induction dans l'entrefer et donc la force radiale agissant sur la culasse. Cette dernière est considérée comme un anneau homogène capable de vibrations de flexion. L'analyse modale est menée et le calcul des déformations et des fréquences de résonances sont effectués. Finalement, l'intensité acoustique est déterminée pour avoir le bruit global émis par la machine.

### A. Modèle électromagnétique

Le modèle considère uniquement le fonctionnement à vide de la machine asynchrone et une perméabilité  $\mu_r$  infinie (pas de saturation), ce qui implique que la composante tangentielle de l'induction sera négligée face à la composante radiale.

Les forces mises en jeu dans la création du bruit magnétique s'exercent sur le fer du stator et du rotor. La relation de Maxwell donne l'expression de la force radiale selon l'induction :

$$F_{\text{radiale}} = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \quad (1)$$

$S$  (en  $m^2$ ) étant la section du circuit magnétique soumise à l'induction  $B$  (en Tesla).

L'induction dans l'entrefer est constituée d'une somme infinie d'harmoniques d'induction. Ainsi, si  $\alpha$  représente la position angulaire d'un point de l'entrefer par rapport à un axe donné, l'expression de la composante de rang  $h$ , d'amplitude  $B_h$ , de pulsation  $\omega_h$  et de phase  $\varphi_h$  est :

$$B_h(\alpha, t) = B_h \cos(\omega_h t - h\alpha - \varphi_h) \quad (2)$$

Par conséquent, on obtient la densité de force :

$$\sum F(\alpha, t) = \frac{[\sum B_h(\alpha, t)]^2}{2\mu_0} \quad (3)$$

En tenant compte de tous les termes et après développement on obtient une composante de force qui s'écrit comme suit :

$$f(\alpha, t) = \hat{F} \cos(\omega_f t + m\alpha + \varphi_f) \quad (4)$$

Où :

- $\omega_f = \omega_{h1} \pm \omega_{h2}$  : est la pulsation de la force.
- $m = h_1 \pm h_2$  : le nombre de mode.
- $\varphi_f = \varphi_{h1} \pm \varphi_{h2}$  : son déphasage.

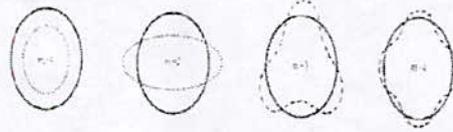


Figure 1 : déformations du stator pour différents modes

Le nombre de modes est un paramètre important. En effet, il nous renseigne sur la façon dont agit la sollicitation (figure 1).

### B. Modèle vibratoire

L'étude analytique du bruit d'une machine tournante nécessite de modéliser la structure mécanique de cette machine. En effet, de nombreux travaux, notamment ceux de H. Jordan [8] ou P.L. Timar [2], ont montré, en considérant comme structure du stator un anneau lisse, qu'une vibration devient particulièrement gênante lorsque la fréquence de résonance de celle-ci tend à s'approcher de la fréquence de résonance de la structure de la machine.

Pour la détermination théorique de ces déformations, on a cependant intérêt à examiner d'abord l'effet d'une répartition de force constante dans le temps que l'on appelle déformation statique.

#### B. 1. Amplitudes des déformations statiques

Le modèle d'Alger [9], destiné pour le stator des machines triphasées pour lesquelles le poids des dents est pris en compte, considère une poutre maintenue librement à ces extrémités et soumise à une force distribuée de façon sinusoïdale sur sa longueur.

Pour le mode  $m = 0$ , un effort de traction de la culasse se produit, l'amplitude de la déformation statique du stator est donné par :

$$Y_{0S} = \frac{R_a R_c \hat{F}}{E h} \quad (5)$$

Dans les cas où  $m = 1$ , on peut réunir les forces en une force de trépidation résultante agissant au centre de gravité du rotor, auquel cas aucun changement de forme des paquets de tôles n'intervient, il se produit plutôt une flexion de l'arbre du rotor.

L'amplitude statique de flexion de l'arbre rotorique s'écrit :

$$Y_{1S} = \frac{4 R_a l^3 L}{3 d^4} \hat{F} \quad (6)$$

Pour  $m > 1$ , la culasse est soumise à un effort de flexion et on aura :

$$Y_{ms} = 12 \frac{R_a R_c^3}{E h^3} \frac{\hat{F}}{(m^2 - 1)^2} \quad (7)$$

Cette dernière relation montre que les forces correspondantes aux modes les plus bas seront plus gênantes que celles des rangs les plus élevés.

## B. 2. Déformations dynamiques

### B.2.1. Détermination des fréquences de résonances

Les vibrations dynamiques sont liées aux fréquences de résonance mécanique de la structure. Différentes fréquences apparaissent selon le mode vibratoire.

Pour le mode 0 la fréquence  $F_0$  correspond à des vibrations radiales :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho R_c^2 \Delta}} \quad (8)$$

Lorsque  $m = 1$ , la fréquence de résonance est relative aux flexions de l'arbre rotorique.

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3Ed^4}{8l^3 10^3 [L(4R_a^2 - d^2) + 0.5ld^2]}} \quad (9)$$

Pour  $m \geq 2$ , deux fréquences de résonance du stator sont considérées, relatives aux vibrations radiales et longitudinales.

$$F_m = F_0 \frac{h}{2\sqrt{3}} \frac{m(m^2 - 1)}{R_c \sqrt{m^2 + 1}} \quad (\text{Déformation radiale}) \quad (10)$$

$$F_m = F_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad (\text{Déformation longitudinale}) \quad (11)$$

### B.2.2. Amplitudes des déformations radiales dynamiques

L'amplitude des déformations dynamiques est donnée par le produit de l'amplitude des déformations statiques par un coefficient noté  $\eta_m$ .

$$Y_{md} = \eta_m Y_{ms} \quad (12)$$

Avec :

$$\eta_m = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f_i}{F_m}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta_a \frac{f_i}{F_m}\right)^2}}$$

$\zeta_a$  : coefficient d'amortissement donné par Timar [2] et dont les valeurs sont de l'ordre de (0.01 - 0.04)

## C. Rayonnement acoustique de la machine

L'intensité acoustique à la surface de la machine est donnée par :

$$I_s = 8200 \sigma f_i^2 Y_{md}^2 \quad (13)$$

Le coefficient  $\sigma$  est le facteur de rayonnement. Celui-ci traduit la capacité d'une machine à être un bon haut parleur. Ce coefficient dépend des dimensions de la machine, du mode vibratoire et de la longueur d'onde  $\lambda$  à émettre.

La puissance acoustique est donnée par la relation :

$$W = \frac{I_s S_e}{2m + 1} \quad (14)$$

Où  $S_e$  est la surface d'où sont émises les vibrations.

## III. METHODE DES PLANS D'EXPERIENCES

### A. Introduction

Aujourd'hui, la conception est basée systématiquement sur le calcul. Les progrès technologiques de ces dernières années ont permis l'élaboration de méthodes numériques pouvant être employées pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. Ainsi pour un dispositif particulier, la recherche d'une configuration optimale devient possible sans nécessiter la fabrication de nouveaux prototypes.

Classiquement, trois grandes familles peuvent être distingués parmi les méthodes d'optimisation. Les premières sont les méthodes déterministes comme la méthode du gradient par exemple. Les secondes méthodes sont stochastiques. Elles procèdent à une exploration guidée en partie par des choix aléatoires. Enfin, on distingue les méthodes d'optimisation issues des techniques de l'intelligence artificielle comme par exemple les réseaux de neurones artificiels.

En marge de ces algorithmes, la méthode des plans d'expériences peut être utilisée pour l'optimisation d'un système [10]. La méthode des plans d'expériences est un ensemble homogène d'outils et de méthodes algébriques-statistiques visant à établir et analyser les relations existant entre les grandeurs étudiées (réponses) et leurs sources de variations supposées (facteurs) [7].

## B. Méthodes des plans d'expériences

Pour chaque expérimentateur désirant simuler le fonctionnement d'un dispositif, il est nécessaire de connaître la valeur des facteurs ou paramètres physiques influençant le système. Une façon naturelle d'identifier le rôle d'un facteur  $X_1$  sur la réponse  $Y$  d'une expérience, est d'étudier l'influence de plusieurs de ses valeurs alors que le niveau des autres variables reste fixe. Le tracé de la courbe  $Y=f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  est alors possible. Elle représente l'évolution de  $Y$  en fonction de  $X_1$  avec une invariance des autres facteurs. Il faudrait effectuer la même opération pour  $X_2, X_3, \dots, X_n$  pour voir leurs influences sur le système.

Avec une telle approche, le nombre d'expériences à réaliser est élevé. A titre d'exemples, l'étude de l'influence de sept facteurs en prenant cinq points par variable nécessite  $5^7$  simulations; ce qui est difficilement envisageable. En ne prenant plus que deux points par variable il y a encore 128 essais à réaliser ce qui reste important. A la différence de cette approche classique, dans la méthode des plans d'expériences on fait varier les niveaux de tous les facteurs à la fois et à chaque expérience, mais de manière programmée et raisonnée [11].

Cette méthode tente par un nombre restreint d'essais d'étudier l'effet de chaque facteur influent sur l'expérience réalisée. Plutôt que d'étudier indépendamment l'effet de chaque facteur, la méthode examine l'effet d'un facteur tiré d'une moyenne [12]. Parmi les applications de la méthode des plans d'expériences on a la technique de Screening et la technique des surfaces des réponses.

### B.1. Technique du Screening

Elle permet de déterminer, parmi un ensemble initial de facteurs, les éléments *influentes*.

De part le principe même du screening, l'expérimentateur a tout intérêt à tester l'influence d'un grand nombre de facteurs, même s'il présuppose la présence de grandeurs non influentes. Cette technique se base sur la construction de plans factoriels complets ou de plans factoriels fractionnaires.

Si chacun des facteurs prends uniquement deux niveaux, on aura un plan factoriel complet  $2^k$ .

$k$  étant le nombre de facteurs.

On définit alors, l'effet moyen d'un facteur  $X_1$  sur la réponse  $Y$  comme :

$$E_1 = (Y_{\text{moy}}^+ - Y_{\text{moy}}^-) / 2$$

Avec :

$Y_{\text{moy}}^+$  : moyenne des réponses lorsque  $X_1$  prend son niveau haut.

$Y_{\text{moy}}^-$  : moyenne des réponses lorsque  $X_1$  prend son niveau bas.

Ainsi, simplement par l'examen des effets, les facteurs peuvent être classés entre eux suivant leur capacité plus ou moins forte à faire varier la réponse étudiée.

### B.2. Surface de réponse

Une surface de réponse permet de déterminer d'une façon quantitative, les variations de la fonction réponse vis-à-vis des facteurs d'influence significative [13].

Cette analyse vient s'appliquer à la suite de l'étude de screening, puisque on n'utilise que les facteurs précédemment jugés influents.

La méthodologie des surfaces de réponse, repose sur la construction de plans particuliers appelés couramment plans de RSM (Response Surface Methodology), on peut citer les plans Doehlert, grilles, Box-Behnken, etc.

## IV. APPLICATION

La machine étudiée est de type asynchrone, utilisée dans la traction ferroviaire (ALSTOM). Cette machine fonctionne sur une large gamme de vitesses (0 à 5000tr/min) et possède un nombre d'encoches de 54 au stator et 44 au rotor.

Notre objectif pour la suite de cette étude est dans un premier temps de repérer les facteurs influents au niveau acoustique puis d'obtenir une configuration de machine qui pour une large bande de fréquence donne un bruit minimum.

### A. Choix des paramètres de la machine

Nous avons choisi 10 grandeurs caractéristiques, susceptibles d'avoir une influence sur le bruit acoustique émis par la machine (tableau 1). La fréquence d'alimentation est prise comme un paramètre.

### B. Screening

#### B.1. Choix du plan

Pour voir l'influence de chacun des facteurs choisis sur le bruit acoustique de la machine, on a choisi un plan factoriel à deux niveaux.

Dans le tableau 2 sont présentés les facteurs sélectionnés ainsi que les niveaux pris par chacun des facteurs.

La réalisation d'un plan factoriel complet nécessite  $2^{10}$  simulations, soit 1024 simulations ce qui est prohibitif en temps de calcul. Pour pouvoir allier temps de calcul et précision des résultats nous avons choisi un plan factoriel fractionnaire  $2^{10}/2^3 = 2^7$  qui nécessite 128 expériences. Avec ce plan on considère que les interactions d'ordre supérieur à deux sont négligeables. En effet ce plan ne permet pas d'avoir directement les effets des interactions mais plutôt la somme des effets des différentes interactions.

Tableau 1

Identifiant	Description
Zs	Nombre d'encoches au stator
Zr	Nombre d'encoches au rotor
Les	Ouverture d'encoche statorique
Lre	Ouverture d'encoche rotorique
Hcul	Épaisseur radiale de culasse derrière encoches
E	Entrefer
L1	Longueur du stator
L2	Longueur axiale du rotor
Da	Diamètre d'arbre
Mst1	Masse volumique de la tôle statorique

Tableau 2

Facteurs	Niveau bas (-1)	Valeur centrale	Niveau haut (+1)	Unité
Zs	36	/	54	
Zr	40	/	44	
lse	0.0131	0.0138	0.0145	m
lre	0.0055	0.0060	0.0065	m
hcul	0.057	0.060	0.063	m
e	0.0019	0.0020	0.0021	m
L1	0.35	0.37	0.39	m
L2	0.35	0.37	0.39	m
Da	0.20	0.21	0.22	m
Mst1	7.25	7.65	5.05	Kg /dm <sup>3</sup>

### B.2. Analyse des résultats

L'histogramme des effets permet de juger rapidement des effets relatifs des facteurs sur la réponse. C'est ainsi que l'on constate l'extrême importance des facteurs : nombre d'encoche au stator Zs, nombre d'encoches au rotor Zr (Figure 2) ainsi que de leur interaction (Figure3). Contrairement à l'effet de l'interaction ZsZr, la fréquence d'alimentation modifie considérablement la tendance des effets principaux Zs et Zr. Ainsi l'effet de Zr sur le bruit est de -10.85dB pour la fréquence de 30Hz, alors qu'il est de +4.95dB pour 90Hz.

En se basant toujours sur les graphes des figures 2 et 3, on remarque que les effets des facteurs hcul, lre, L1, e, les, et Mst1 sont notables de même que l'interaction Zrhcul, alors que les effets des facteurs L2 et Da sont quasiment nuls.

Pour pouvoir juger du caractère significatif d'un facteur on utilise l'analyse de la variance. Le tableau 3 montre la liste des facteurs significatifs, si l'on prend comme règle de décision qu'un facteur est jugé influent lorsque le test de Fisher lui donne une probabilité supérieure à 95%.

Nous constatons d'après l'analyse du Screening, effectuée sur la machine asynchrone à vitesse variable, la forte corrélation entre les facteurs influents sur le bruit acoustique et la vitesse de la machine, d'où la difficulté du choix d'une configuration de machine pour toute une plage de fréquence.

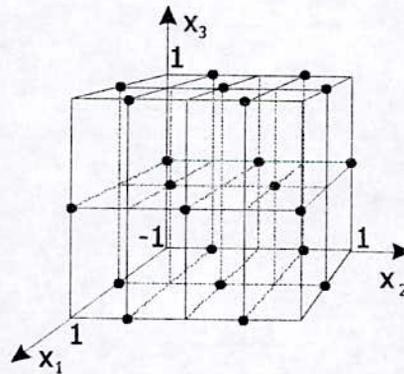
### C. Technique de Surface de réponses

On s'intéresse ici à la variation quantitative du bruit acoustique de la machine en fonction du nombre d'encoches au stator Zs, du nombre d'encoches au rotor Zr et de la hauteur de culasse hcul.

Les autres facteurs sont fixés à leurs valeurs centrales respectives. En effet, pour les surfaces de réponse, le nombre de facteurs traités doit rester faible car le nombre de simulations devient très important. Une surface de réponse est obtenue en utilisant des plans treillis qui scindent le domaine d'étude en sous domaine par l'utilisation des plans factoriels fractionnaires [7](figure 4).

#### C.1. Choix du plan

Les tableaux 4 et 5 donnent les caractéristiques des facteurs et paramètre choisis. Le plan factoriel de base utilisé est un plan factoriel fractionnaire  $2^{3-1}$ , le nombre de simulations nécessaires est de 175 pour chacune des combinaisons du paramètre Zs.

Figure 4. Plan treillis ( $k=3$ ) avec  $Nn_1=3$ ,  $Nn_2=5$ ,  $Nn_3=3$

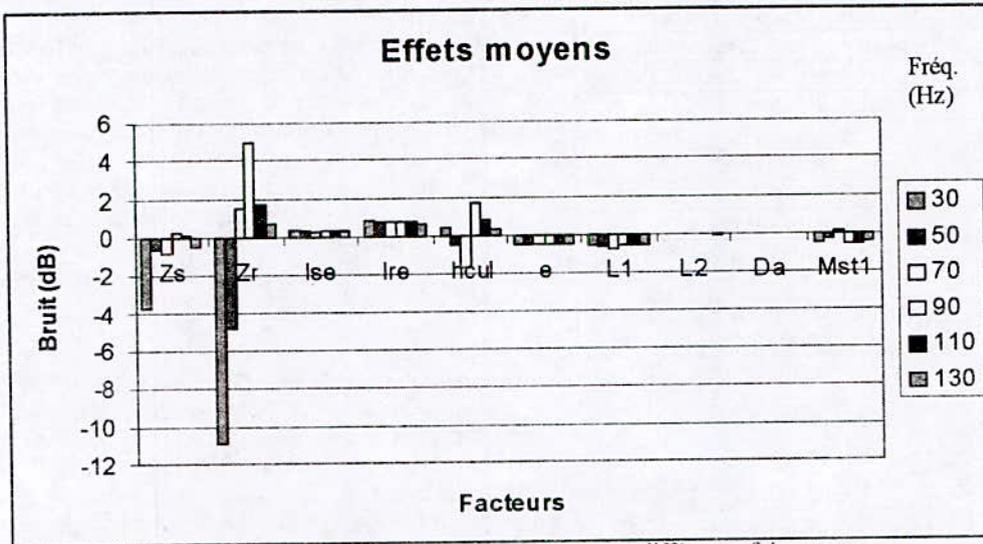


Figure 2. : Effets moyens des facteurs principaux pour différentes fréquences.

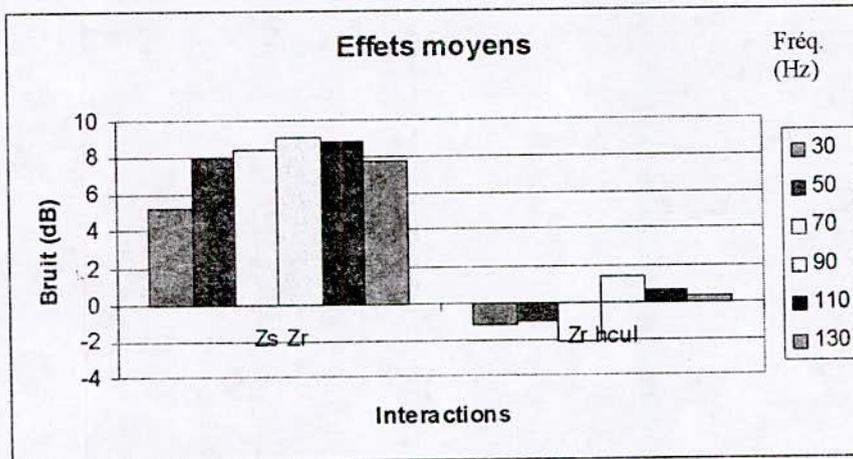


Figure 3. : Effets moyens de deux interactions importantes pour différentes fréquences.

Tableau 3 : Facteurs significatifs donnés par l'analyse de la variance

Fréquence (Hz)	30	50	70	90	110	130
Facteurs significatifs	Zr	Zr	hcul	Zr	Zr	Zr
	Zs	lre	Zr	hcul	hcul	Lre
	lre	Zs	Lre	lre	lre	L1
	L1	L1	Zs	L1	Mst1	e
	Mst1	e	L1	Mst1	L1	Zs
	hcul	hcul	e	e	e	Mst1
	e	lse	Lse	lse	lse	hcul
	lse	Mst1	Mst1	Zs	Zs	lse

### C.2. Analyse des résultats

#### ▪ Choix du nombre d'encoches au rotor

Pour une machine possédant 54 encoches au stator, la figure 5 montre que le minimum du bruit acoustique est obtenu pour une machine à 40 encoches au rotor pour une gamme de fréquences allant de 80Hz à 200Hz ; alors que pour une machine à 36 encoches au stator, le minimum de bruit est donné par la machine à 44 encoches au rotor pour une gamme de fréquence allant de 20Hz à 200Hz (figure 6).

#### ▪ Choix de la hauteur culasse

On fixe les facteurs nombre d'encoches au stator et nombre d'encoches au rotor à la combinaison (54/44), un minimum local est obtenu pour une valeur de hauteur culasse autour de 55mm (figure 7).

#### ▪ Choix de l'ouverture d'encoche au rotor

Pour rechercher les conditions optimales en bruit en fonction de l'ouverture de l'encoche rotorique, nous avons choisi un autre plan treillis (tableau 6).

Toujours pour la configuration de machine (54/44), un minimum local en bruit est obtenu pour une valeur de 6mm de l'ouverture d'encoche rotorique (figure 8).

Tableau 4. – Caractéristiques du paramètre

Identifiant	Valeurs prises		Description
Zs	36	54	Nombre d'encoches au stator

Tableau 5 – Caractéristiques des facteurs

Identifiant	Unité	Borne inf.	Borne sup.	Nombre de niveaux	Description
Freq	Hz	20	200	10	Fréquence d'alimentation
Zr		38	50	7	Nombre d'encoches au rotor
Hcul	m	0.04	0.08	5	Hauteur de culasse

Tableau 6 – Caractéristiques des facteurs

Identifiant	Unité	B <sub>inf</sub>	b <sub>sup</sub>	Nvi	Description
freq	Hz	30	150	5	Fréquence d'alimentation
lre	m	0.004	0.008	5	Ouverture d'encoche au rotor
hcul	m	0.04	0.08	5	Hauteur de culasse

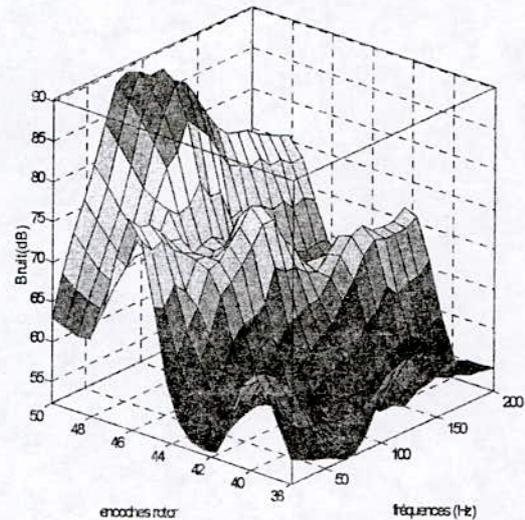


Figure 5. Surface de réponse en bruit pour Zs = 54  
- Influence du nombre d'encoches au rotor-

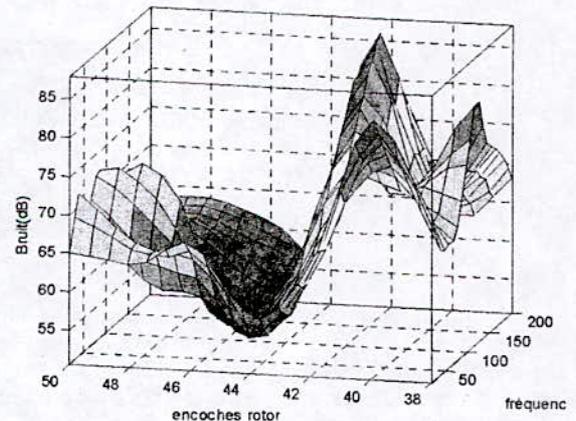


Figure 6. Surface de réponse en bruit pour Zs = 36  
- Influence du nombre d'encoches au rotor-

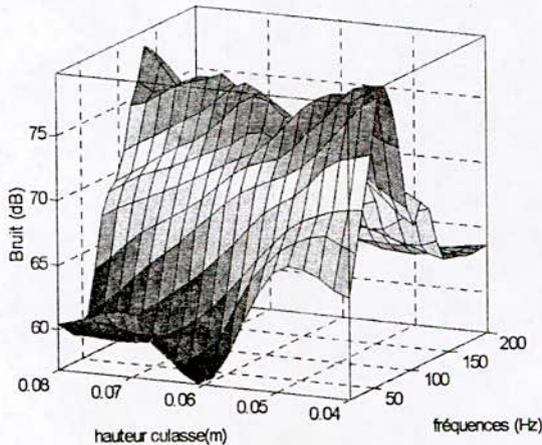


Figure 7. Surface de réponse en bruit pour (54/44)  
- Influence de la hauteur culasse -

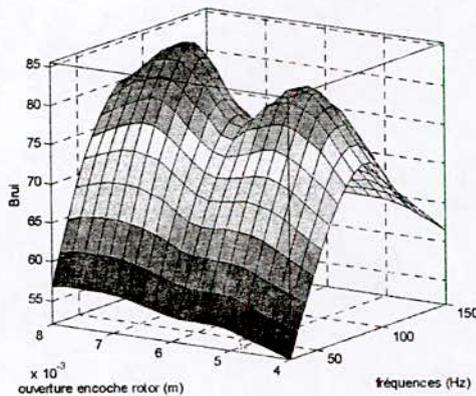


Figure 8. Surface de réponse en bruit pour (54/44)  
-Influence de l'ouverture d'encoche rotor -

## V. CONCLUSION

Dans cet article, une étude de sensibilité au niveau acoustique d'une machine asynchrone à vitesse variable a été présentée. L'utilisation d'un modèle analytique permettant de prédire le bruit acoustique d'origine électromagnétique nous a permis de disposer d'un outil souple, rapide et bien adapté en vue d'une optimisation. L'étude de sensibilité a été faite en utilisant la méthode des plans d'expériences.

La technique du Screening a montré l'extrême importance de l'effet de l'interaction entre le nombre d'encoches au stator et le nombre d'encoches au rotor sur le bruit acoustique. On constate aussi l'effet important du facteur hauteur culasse et sa forte corrélation vis-à-vis de la fréquence d'alimentation, ainsi que le caractère significatif des facteurs ouverture d'encoche au rotor,

ouverture d'encoche au stator, longueur de la machine et longueur de l'entrefer.

Une étude qualitative est menée en utilisant la technique des surfaces de réponses. On a choisi les deux facteurs les plus influents :  $Z_r$  et  $h_{cul}$ , pour deux valeurs fixées de  $Z_s$  et on a montré que les meilleurs choix du point de vue acoustique étaient les configurations de  $Z_s/Z_r$  à 54/40 et à 36/44 avec un niveau du bruit acoustique inférieur à 60 dB pour une large plage de la vitesse de la machine. Le second point étudié est consacré à la machine 54/44, et à viser à déterminer les valeurs optimales pour les deux facteurs  $h_{cul}$  et  $l_r$ , deux minima locaux au maximum du bruit ont été obtenus pour des valeurs de 55mm et 6mm respectivement.

## REFERENCES

- [1] S.P. Verma, A. Balan, "Determination of radial-forces in relation to noise and vibration problems of squirrel-cage induction motors", IEEE Transactions on energy conversion, Vol. 9, No.2, June 1994.
- [2] P.L.Timar, A. Fazekas, J. Kiss, A.Miklos and S. J. Yang 'Noise and Vibration of Electrical Machines' New York: elsevier, 1989.
- [3] V. Ostovic, "Dynamics of saturated electric machines", Ed. Springer-Verlag-1989.
- [4] M.Hecquet et P. Brochet "Modélisation d'un alternateur automobile par un réseau de perméances couplés à des circuits électriques" Journal de physique - Aout 1996, pp.1099-1116.
- [5] B. Cassoret, R. Corton, D. Roger, and J.F. Brudny, "Magnetic Noise Reduction of Induction Machines", IEEE Transactions on power electronics, Vol. 18, No. 2, March 2003.
- [6] A. Ait Hammouda, "Pré-dimensionnement et étude de sensibilité vibro-acoustique de machines à courants alternatifs et à vitesse variable", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Février 2005.
- [7] S. Vivier, "Stratégies d'optimisation par plans d'expériences et application aux dispositifs électrotechniques modélisés par élément finis", thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Juillet 2002.
- [8] H. Jordan, "Electric motor silencer-formation and elimination of the noise in the electric motors". W. Giradet - Essen editor 1950.
- [9] Ph. L. Alger, "The nature of induction machines", 2<sup>nd</sup>. Ed. London, U.K. : Gordan and Breach, 1970.
- [10] F. Gillon, P. Brochet, "Optimisation of a Brushless permanent magnet motor with the experimental design method", Vol. 34, n° 5, pp. 3648-3651, Sep. 1998.
- [11] J. Goupy, La méthode des plans d'expériences, Dunod, Paris, 1988.

- [12] F. Zaoui, C. Marchand et A. Razek, " Une méthode des plans d'expériences pour la conception d'un système électromagnétique ", Revue Internationale de Génie Electrique. Vol. 3. n° 4/2000, pp.529-539.
- [13] J. Goupy, Plans d'expériences pour surfaces de réponses, Dunod, Paris, 1988.

## GLOSSAIRE

- $\mu_0$  : est la perméabilité du vide ( $4\pi \cdot 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ ).
- $Y_{0s}$  : amplitude de déformation statique relative au mode 0.
- $R_a$  : rayon d'alésage
- $R_C$  : rayon moyen de la culasse
- $E$  : module de Young :  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$  pour le fer
- $h$  : épaisseur radiale de la culasse
- $\hat{F}$  : Amplitude de la force en ( $\text{N/m}^2$ )
- $l$  : distance entre appuis de l'arbre rotorique
- $L$  : longueur du fer
- $d$  : diamètre de l'arbre.
- $\Delta$  : (poids de la culasse + poids des dents statoriques) / poids de la culasse
- $\rho$  : densité volumique.
- $f_i$  : fréquence de vibration
- $F_m$  : fréquence de résonance mécanique.
- $Y_{md}$  : Amplitude de déformation dynamique.
- $\lambda = c/f_i$
- $c$  : célérité du son (344 m/s)
- $f_i$  : fréquence vibratoire
- $Nn1$  : nombre de niveaux pris par le facteur 1
- $Nn2$  : nombre de niveaux pris par le facteur 2
- $Nn3$  : nombre de niveaux pris par le facteur 3.

## Modèle d'un générateur asynchrone auto-amorcé lors d'un retour réseau

D. Kairous S. Mekhtoub R. Ibtiouen O. Touhami  
 Laboratoire de Recherche en Electrotechnique ENP BP 182 16200 El-Harrach Alger Algérie  
 E-mail: [kdjilali@hotmail.com](mailto:kdjilali@hotmail.com)

**Résumé** — Dans le cas d'un fonctionnement autonome, les générateurs asynchrones peuvent fournir de l'énergie et être le siège de forts courants et de couples transitoires lors des connexions au réseau. Afin de prévoir, d'une façon simple, les contraintes subies par la machine, on a exploité un modèle dynamique en régime saturé que l'on a validé expérimentalement comme on a développé un modèle analytique.

### I. INTRODUCTION GENERALE

Les dispositifs d'enclenchement et de réenclenchement, dans le cas des génératrices asynchrones autonomes, provoquent des coupures momentanées qui se traduisent par des régimes transitoires sévères au niveau de ces machines [1]. En effet, lors d'un fonctionnement en générateur autonome, en présence de capacités, le stator est le siège d'un courant transitoire très important lors des phases de connexion et de déconnexion du réseau électrique. Ce phénomène, connu sous la dénomination du retour réseau, est accompagné par des surintensités et des couples négatifs très importants [2, 3, 4].

L'objectif de ce travail consiste à analyser les phénomènes qui accompagnent le retour réseau. On a commencé par la modélisation de la machine en régime non linéaire sachant que l'effet de saturation est indispensable au fonctionnement en générateur. Ce modèle dynamique, amélioré, est exploité pour étudier le phénomène transitoire lié au couple et au courant. Afin de simplifier la détermination des expressions du courant et du couple, en régime transitoire, dans le but de prévoir leurs valeurs extrêmes, on a développé un modèle analytique moyennant certaines hypothèses simplificatrices compatibles avec l'objectif visé.

### II. MODELE DYNAMIQUE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

#### A Modèle linéaire de la machine asynchrone

Les équations régissant le fonctionnement de la machine, pour un référentiel de vitesse  $\omega_a$ , sont représentées dans le système (1) [5]. Les équations (1) et (2) représentent le mode de fonctionnement en moteur tandis que les équations (1) et (3) représentent le mode de fonctionnement en générateur autonome. La Figure 1 représente le courant statorique lors du démarrage de la machine en moteur. Au démarrage et à vide, le modèle linéaire de la machine donne des résultats acceptables en régime permanent ce qui n'est pas le cas en régime transitoire.

$$\begin{cases} v_{ds} = r_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \psi_{ds} - \omega_a \psi_{qs} \\ v_{qs} = r_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \psi_{qs} + \omega_a \psi_{ds} \\ v_{dr} = r_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \psi_{dr} - (\omega_a - \omega_r) \psi_{qr} \\ v_{qr} = r_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \psi_{qr} + (\omega_a - \omega_r) \psi_{dr} \end{cases} \quad (1)$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r - C_f \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_{dc}}{dt} = \frac{i_{dc}}{c} \\ \frac{dv_{qc}}{dt} = \frac{i_{qc}}{c} \end{cases} \quad (3)$$

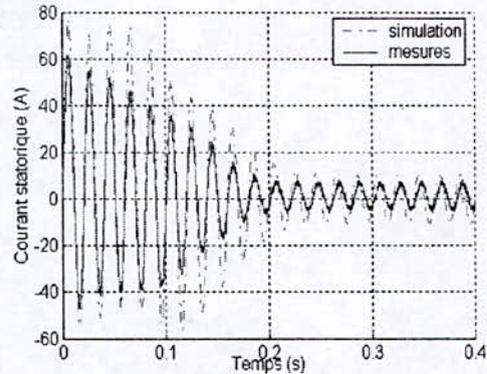


Fig. 1. Courants de démarrage à vide dans une phase statorique

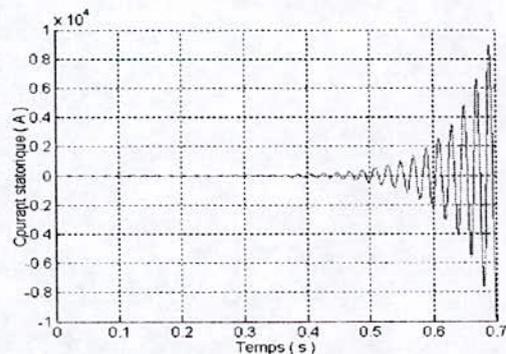


Fig. 2. Courant statorique calculé dans le cas d'un fonctionnement en générateur autonome

La Figure 2 représente le courant statorique simulé, pour le fonctionnement en générateur. Les résultats obtenus, avec le modèle linéaire, sont divergents ce qui n'est pas le cas de ceux obtenus théoriquement dans le cas du démarrage à vide en fonctionnement moteur (Fig. 1). Ceci montre l'importance de la saturation qui, en pratique limite la tension et le courant à des valeurs admissibles. Les paramètres, des machines asynchrones utilisées, sont présentés en annexe.

### B Modèle non linéaire de la machine asynchrone

Le modèle linéaire précédant est étendu pour tenir compte de la saturation [4, 6, 7]. La procédure utilisée consiste à associer le phénomène de la saturation à la variation d'une inductance de magnétisation  $M_{st}$  dite statique et une autre  $M_{dy}$  dite dynamique. En effet, suivant les deux axes d et q, on définit les deux composantes des vecteurs spatiaux (flux et courant) en considérant, par hypothèse, que le phénomène d'hystérésis est négligeable et que le flux et le courant sont en phase (Fig. 3). Le système d'équations (1) peut écrire sous la forme suivante (avec  $\omega_a = 0$ )

$$\begin{cases} v_{ds} = r_s i_{ds} + l_s \frac{di_{ds}}{dt} + \frac{d\phi_{md}}{dt} \\ v_{qs} = r_s i_{qs} + l_s \frac{di_{qs}}{dt} + \frac{d\phi_{mq}}{dt} \\ 0 = r_r i_{dr} + l_r \frac{di_{dr}}{dt} + \frac{d\phi_{md}}{dt} + \omega_r \phi_{qr} \\ 0 = r_r i_{qr} + l_r \frac{di_{qr}}{dt} + \frac{d\phi_{mq}}{dt} - \omega_r \phi_{dr} \end{cases} \quad (4)$$

Les expressions de  $\frac{d\phi_{md}}{dt}$  et de  $\frac{d\phi_{mq}}{dt}$  peuvent s'écrire, respectivement, sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{md}}{dt} &= \left[ \frac{d\phi_m}{di_m} + \sin(\beta)^2 \cdot \left( \frac{\phi_m}{i_m} - \frac{d\phi_m}{di_m} \right) \right] \frac{di_{md}}{dt} \\ &+ \left[ \left( \frac{d\phi_m}{di_m} - \frac{\phi_m}{i_m} \right) \sin(\beta) \cos(\beta) \right] \frac{di_{mq}}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

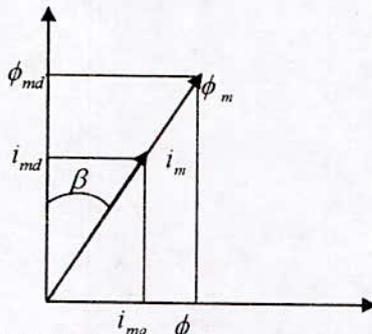


Fig. 3. Représentation des vecteurs courants et flux magnétisant

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{mq}}{dt} &= \left[ \frac{d\phi_m}{di_m} + \cos(\beta)^2 \cdot \left( \frac{\phi_m}{i_m} - \frac{d\phi_m}{di_m} \right) \right] \frac{di_{mq}}{dt} \\ &+ \left[ \left( \frac{d\phi_m}{di_m} - \frac{\phi_m}{i_m} \right) \sin(\beta) \cos(\beta) \right] \frac{di_{md}}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

où :

$$\begin{aligned} L_d &= \frac{d\phi_m}{di_m} + \sin(\beta)^2 \cdot \left( \frac{\phi_m}{i_m} - \frac{d\phi_m}{di_m} \right) \\ L_q &= \frac{d\phi_m}{di_m} + \cos(\beta)^2 \cdot \left( \frac{\phi_m}{i_m} - \frac{d\phi_m}{di_m} \right) \\ L_{dq} &= \left( \frac{d\phi_m}{di_m} - \frac{\phi_m}{i_m} \right) \sin(\beta) \cos(\beta) \end{aligned}$$

En utilisant ces nouvelles expressions pour les inductances, le système d'équations (4) devient :

$$\begin{cases} v_{ds} = r_s i_{ds} + l_s \frac{di_{ds}}{dt} + L_d \frac{di_{md}}{dt} \\ v_{qs} = r_s i_{qs} + l_s \frac{di_{qs}}{dt} + L_q \frac{di_{mq}}{dt} \\ 0 = r_r i_{dr} + l_r \frac{di_{dr}}{dt} + L_d \frac{di_{md}}{dt} + \omega_r (M_{st} + l_s) i_{qr} \\ 0 = r_r i_{qr} + l_r \frac{di_{qr}}{dt} + L_q \frac{di_{mq}}{dt} - \omega_r (M_{st} + l_r) i_{dr} \end{cases} \quad (7)$$

Les deux mutuelles inductances sont déterminées à partir de la courbe de magnétisation (obtenue à l'aide d'un essai à vide au synchronisme) [4].

L'application du modèle saturé, au fonctionnement en générateur, est représentée sur la Fig. 4. On remarque, pour le cas de la machine considérée, que les tensions expérimentale et simulée, concordantes, sont obtenues pour une vitesse de 1500 tr/min pour  $C = 90 \mu F$ .

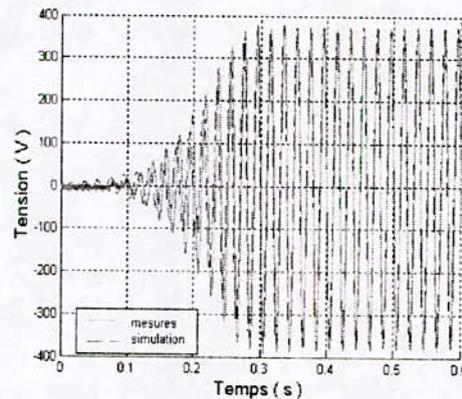
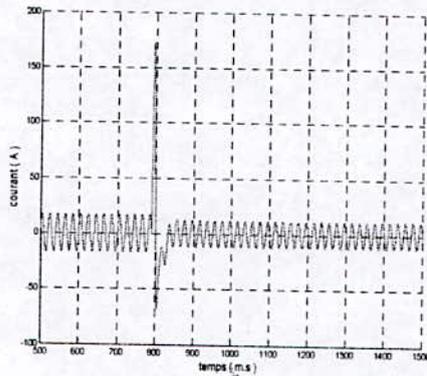


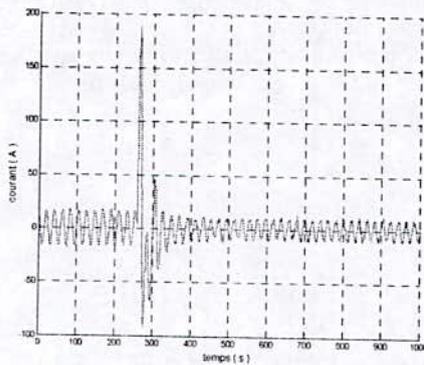
Fig. 4. Tensions simulée et mesurée pour  $C = 90 \mu F$  à  $N=1500\text{tr/min}$

### III. ETUDE DU COMPORTEMENT DU GENERATEUR RELIE AU RESEAU

Lors des coupures liées à l'exploitation du réseau, des régimes transitoires se produisent généralement suite à ce genre d'incidents. Le réseau revient à un instant quelconque où les enroulements sont parcourus par un courant de valeur  $I_a$  avec un déphasage  $\alpha$  par rapport à la tension de la machine. La tension du réseau est déphasée de  $\varphi$  par rapport à celle de la machine à l'instant de la connexion. Nous représentons, sur les figures 5, les courants obtenus lors du retour réseau sur un générateur asynchrone donné. Ces courants dépendent de  $\alpha$  et de  $\varphi$ . Pour généraliser le phénomène, nous représentons, sur les figures 6, les variations des pics des courants et des couples obtenues lors du retour réseau en fonction de l'instant de connexion et du déphasage  $\varphi$ .

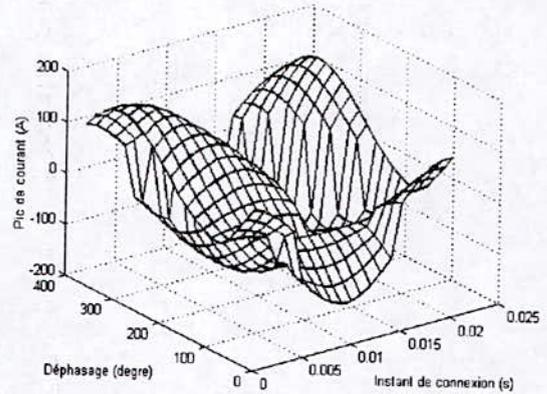


a.)

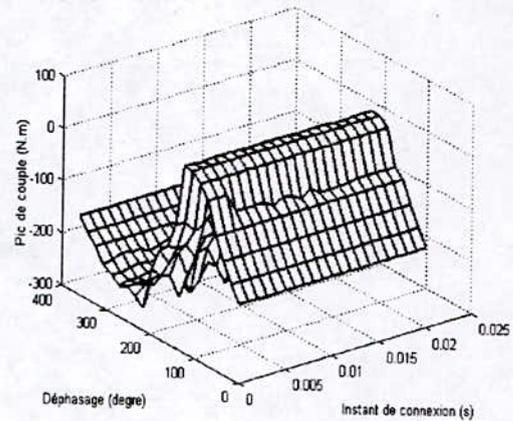


b.)

Fig. 5. a.) Courant statorique, lors de la séquence positive du retour réseau, obtenu par simulation.  
b.) Courant statorique, lors de la séquence positive du retour réseau, obtenu expérimentalement



- a -



- b -

Fig. 6. Variation des pics en fonction de l'instant de connexion et du déphasage  $\varphi$   
a. courant b. couple

Les valeurs extrêmes des pics de courant sont obtenues pour les tensions en opposition de phase tandis que les valeurs minimales de ces pics correspondent à des tensions en phase.

Pour la machine utilisée, la valeur extrême du pic de courant peut atteindre 180 A (8 fois l'amplitude du courant nominal). Celle du pic de couple peut atteindre 240 N.m (12 fois la valeur du couple nominal). Le couple est fonction du courant. La Fig. 6.b montre que les pics de couple dépendent seulement du déphasage.

### IV. EXPRESSION ANALYTIQUE DU COURANT

En se basant sur le système d'équations de la machine diphasée, et en remplaçant les flux par leurs expressions [5], le système (1) devient :

$$\begin{cases} v_{ds} = \tau_s i_{ds} + p(L_s i_{ds} + M i_{dr}) \\ v_{qs} = \tau_s i_{qs} + p(L_s i_{qs} + M i_{qr}) \\ v_{dr} = \tau_r i_{dr} + p(L_r i_{dr} + M i_{ds}) + \omega_r (L_r i_{qr} + M i_{qs}) \\ v_{qr} = \tau_r i_{qr} + p(L_r i_{qr} + M i_{qs}) - \omega_r (L_r i_{dr} + M i_{ds}) \end{cases} \quad (8)$$

Avec :

$$p = d/dt, \quad L_s = M + l_s, \quad L_r = M + l_r.$$

Puisque  $v_d = jv_q$  et  $i_d = ji_q$ , avec un référentiel lié au stator ( $\omega_a = 0$ ), les tensions selon l'axe  $q$  s'écrivent :

$$\begin{cases} v_{qs} = (\tau_s + pL_s)i_{qs} + pMi_{qr} \\ v_{qr} = 0 = \tau_r i_{qr} + p(L_r i_{qr} + M i_{qs}) - j\omega_r (L_r i_{qr} + M i_{qs}) \end{cases} \quad (9)$$

En appliquant la transformation de Laplace au système (9), on obtient un système de deux équations à deux inconnues :  $i_{qs}$  et  $i_{qr}$ .

$$\begin{cases} V_{qs} = (\tau_r + pL_s)I_{qs} + pMi_{qr} - L_s i_{qs0} - Mi_{qr0} \\ 0 = M(p - j\omega_r)I_{qs} + [\tau_r + L_r(p - j\omega_r)]I_{qr} - Mi_{qs0} - L_r i_{qr0} \end{cases} \quad (10)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_{qs} &= L \left\{ i_{qs} \right\}, \quad I_{qr} = L \left\{ i_{qr} \right\} \\ L \left\{ pi_{qs} \right\} &= pI_{qs} - i_{qs0}, \\ L \left\{ pi_{qr} \right\} &= pI_{qr} - i_{qr0} \\ V_{qs} &= L \left\{ v_{qs} \right\} = L \left\{ \sqrt{3}V_m \exp(j(\omega_s t + \varphi)) \right\} \end{aligned}$$

où  $V_m, \varphi$  représentent respectivement la valeur maximale de la tension et le déphasage entre la tension du réseau et celle de la machine.

$i_{qs0}, i_{qr0}$  représentent les valeurs initiales des courants selon l'axe  $q$ .

L'expression de  $I_{qr}$  est obtenue à partir de la première équation du système (10) qui est ensuite introduite dans la seconde équation de ce système afin d'obtenir l'expression, suivante, de  $I_{qs}$  :

$$I_{qs} = \frac{[\tau_r + (p - j\omega_r)L_r]V_{qs}}{Dn} + \frac{L_s L_r \sigma}{Dn} pi_{qs0} + \frac{K_s}{Dn} \quad (11)$$

On applique la transformation inverse de Laplace à l'équation (11) et, on obtient :

$$\begin{aligned} i_{qs} = & -(1/d) \left[ \left( \frac{K_s}{L_s L_r \sigma} - s_1 i_{qs0} \right) \exp(-s_1 t) - \left( \frac{K_s}{L_s L_r \sigma} - i_{qs0} s_2 \right) \right. \\ & \left. \exp(-s_2 t) - (1/d) \frac{V_m (\tau_r - j\omega_r L_r)}{L_s L_r \sigma} \exp(j\varphi) \left[ \left( \frac{1}{j\omega - s_1} \right) (\exp(-s_1 t) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \exp(-j\omega t)) - \left( \frac{1}{j\omega - s_2} \right) (\exp(-s_2 t) - \exp(-j\omega t)) \right] + \right. \\ & \left. (1/d) \frac{V_m}{L_s \sigma} \exp(j\varphi) \left[ \left( \frac{1}{j\omega - s_1} \right) (s_1 \exp(-s_1 t) - j\omega \exp(-j\omega t)) - \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{1}{j\omega - s_2} \right) (s_2 \exp(-s_2 t) - \omega \exp(-j\omega t)) \right] \right] \end{aligned} \quad (12)$$

avec :

$$Dn = L_s L_r \sigma (p + s_1)(p + s_2)$$

$$K_s = (\tau_r - j\omega_r L_r)(L_r i_{qs0} + M i_{qr0})$$

$$s_1 = (b+d)/2, \quad s_2 = (b-d)/2$$

$$b = \frac{\tau_s}{\sigma} + \frac{\tau_r}{\sigma} - j\omega_r, \quad c = \frac{\tau_s}{\sigma} (\tau_r - j\omega_r), \quad d = \sqrt{b^2 - 4c}$$

$$\tau_s = \tau_s / L_s, \quad \tau_r = \tau_r / L_r, \quad \sigma = 1 - \left( \frac{M^2}{L_s L_r} \right)$$

D'une manière analogue, on peut calculer l'expression de  $i_{qr}$ .

Finalement on obtient le courant d'une phase au stator en utilisant la transformation inverse de Park :

$$i_{as} = j\sqrt{\frac{2}{3}} i_{qs} \quad (13)$$

Les figures 7 et 8 représentent, pour le courant et pour le couple, un exemple de retour réseau pour la machine considérée avec une capacité de 90  $\mu$ F et une vitesse d'entraînement de 1500 tr/min dans le cas du régime linéaire. Ces résultats sont obtenus analytiquement puis comparés avec ceux issus de la simulation.

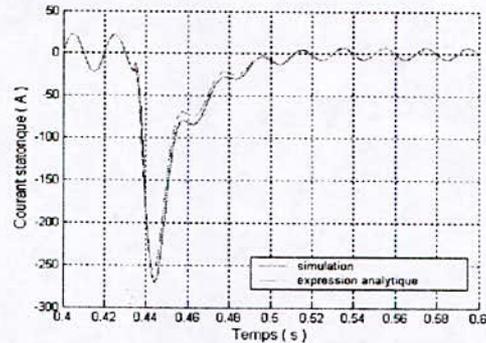


Fig. 7. Courant transitoire lors du retour réseau en régime linéaire.

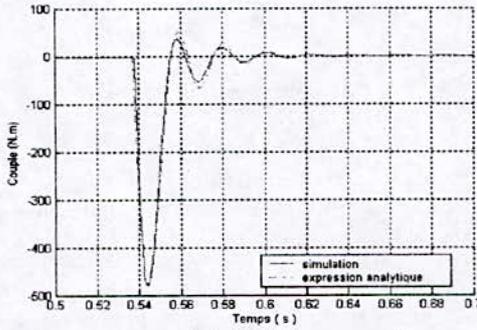


Fig. 8. Couple transitoire lors du retour réseau en régime linéaire.

## V. EXPRESSIONS ANALYTIQUES SIMPLIFIÉES

### A. Expressions analytiques du courant et du couple en négligeant les résistances

Afin de simplifier davantage le calcul analytique, nous supposons en premier lieu que les résistances ( $r_s$  et  $r_r$ ) sont nulles.

En régime permanent, avant l'instant du retour réseau, les courants de la machine et les tensions du réseau sont exprimés par :

$$\begin{cases} i_{as} = I_a \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) \\ i_{bs} = I_a \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_{cs} = I_a \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{as} = V_a \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \\ v_{bs} = V_a \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cs} = V_a \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Dans le repère dqo, ces expressions deviennent :

$$\begin{cases} i_{ds}(t) = \sqrt{3}I_a \sin(\omega t + \alpha - \theta_s) \\ i_{qs}(t) = -\sqrt{3}I_a \cos(\omega t + \alpha - \theta_s) \\ v_{qs}(t) = \sqrt{3}V \sin(\omega t + \varphi - \theta_s) \\ v_{ds}(t) = -\sqrt{3}V \cos(\omega t + \varphi - \theta_s) \end{cases}$$

On peut simplifier le calcul par un choix tel que :

$$\theta_s = \omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

En remplaçant les flux par leurs expressions [5] dans le système (1), puis en appliquant la transformation de Laplace et en posant  $\psi = \varphi - \alpha + \pi/2$ , on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{\sqrt{3}V \sin(\psi)}{p} = pL_s I_{ds} - L_s \omega I_{qs} + pM I_{dr} - M \omega I_{qr} - L_s i_0 \quad (14)$$

$$\frac{-V \cos(\psi)}{p} = pL_s I_{ds} + pL_s I_{qs} + M \omega I_{dr} + pM I_{qr} \quad (15)$$

$$0 = pM I_{ds} + pL_r I_{dr} - M i_0 \quad (16)$$

$$0 = pM I_{qs} + pL_r I_{qr} \quad (17)$$

où  $I_{ds}, I_{qs}, I_{dr}, I_{qr}, V_{ds}, V_{qs}$  sont les transformés respectives de  $i_{ds}(t), i_{qs}(t), i_{dr}(t), i_{qr}(t), v_{ds}(t)$  et  $v_{qs}(t)$ .

La résolution simultanée des deux équations (14) et (15) donne les deux composantes suivantes pour le courant statorique :

$$I_{ds} = \frac{\sqrt{3}V}{\sigma L_s} \left( \frac{\sin \psi}{p^2 + \omega^2} - \frac{\omega \cos \psi}{p(p^2 + \omega^2)} \right) + \sqrt{3}I_a \left( \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{1 - \sigma}{\sigma} \cdot \frac{\omega^2}{p^2(p^2 + \omega^2)} \right) \quad (18)$$

$$I_{qs} = -\frac{\sqrt{3}V}{\sigma L_s} \left( \frac{\cos \psi}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega \sin \psi}{p(p^2 + \omega^2)} \right) - \sqrt{3}I_a \left( \frac{\omega}{\sigma(p^2 + \omega^2)} \right) \quad (19)$$

L'expression de courant statorique  $i(t)$  devient :

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left\{ I_v \cos(\varphi) + I_a \sin(\alpha) - I_v \cos(\omega t + \varphi) - I_a (1 - \sigma) \sin(\omega t + \alpha) \right\} \quad (20)$$

où :

$$I_v = \frac{v}{L_r \omega}$$

$I_a$  et  $V_a$  représentent les valeurs efficaces du courant et de la tension tandis que  $\alpha$  et  $\varphi$  représentent leurs déphasages par rapport à la tension de la machine.

L'expression du couple est exprimée par :

$$\Gamma(t) = 3p \frac{M^2}{\sigma L_r} I_a \left[ -I_v \cos(\varphi - \alpha) + I_v \cos(\varphi - \alpha) \cos(\omega t) + (I_v \sin(\varphi - \alpha) - I_a) \sin(\omega t) \right] \quad (21)$$

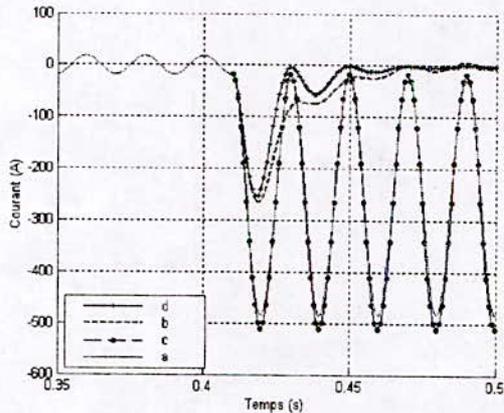
### B. Expressions analytiques du courant et du couple en considérant les résistances

Pour tenir compte de l'effet des résistances, on multiplie l'expression du courant (20) et celle du couple (21) par une fonction exponentielle  $f = \exp(-t/\tau_a)$ .

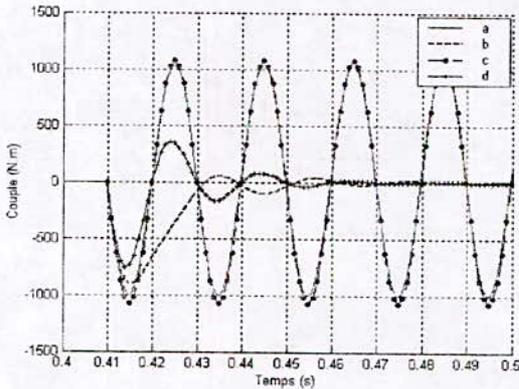
Cette dernière fonction peut être calculée à partir de la constante de temps moyenne suivante, définie par [8] :

$$\tau_a = \frac{2}{r_s/\sigma L_s + r_r/\sigma L_r} \quad (22)$$

Les figures 12.a et 12.b montrent un exemple de retour réseau, respectivement pour le courant et le couple, lorsque la machine considérée est entraînée à une vitesse de 1500 tr/min avec  $C = 90 \mu F$ :



-a-



-b-

Fig. 12. Courants (a) et couples transitoires (b)

- simulation avec  $r_s = 0$  et  $r_r = 0$ .
- simulation avec  $r_s \neq 0$  et  $r_r \neq 0$ .
- expression analytique avec  $r_s = 0$  et  $r_r = 0$
- expression analytique approchée avec  $r_s \neq 0$  et  $r_r \neq 0$ .

Les résultats de simulation et ceux issus des expressions analytiques concordent compte tenu des hypothèses adoptées. Pour les cas où les résistances sont négligeables, les grandeurs sont sinusoïdales non amorties. Dans le cas où les résistances ne sont pas négligeables, on obtient des résultats théoriques acceptables. Avec l'hypothèse de la linéarité du flux et en négligeant les résistances, le pic du courant atteint la valeur de 500 A ce qui représente le double de l'amplitude obtenue sans négliger ces résistances.

A partir des expressions (20) et (21), on obtient les maximums suivants pour les pics des courants et des couples à partir des expressions suivantes :

$$(i_{\max})_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} (I_v + I_a) \quad (23)$$

$$(C_{\max})_{\max} = 3p \frac{M^2}{L_r \sigma} I_a (I_v + I_a) \quad (24)$$

Ces maximums sont fonction des paramètres de la machine :  $M, \sigma, I_v, I_a, L_r$ . Il suffit donc d'une identification paramétrique pour connaître les extremums des transitoires du courant et du couple.

Nous avons également utilisé la même procédure de calcul pour analyser l'effet de la variation des pics de courant et de couple dans le cas de deux machines de puissances différentes M1 (3,5 kW), qui a été déjà utilisée pour la validation du modèle dynamique et M2 (11,5 kW) (Figs. 13).

Sur les figures 13, on constate une augmentation importante des amplitudes des pics, lorsqu'on réduit l'inductance de fuites de 50%, ce qui montre la sensibilité du courant et du couple transitoires au flux de fuites.

On remarque aussi que le fait de négliger les résistances, pour la machine la plus puissante (M2), entraîne un moindre amortissement par apport au cas où on néglige les résistances de la machine M1. En effet, la résistance de la machine M2 est très petite devant celle de la machine M1.

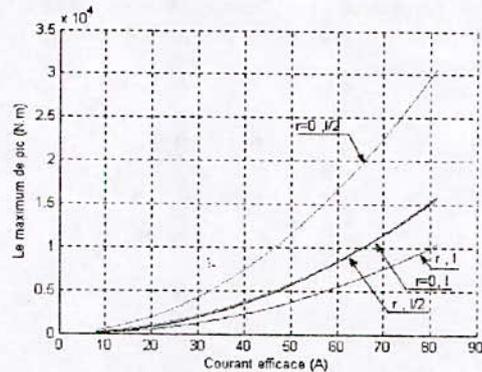


Fig. 13.a. Maximums des pics du couple pour la machine M1

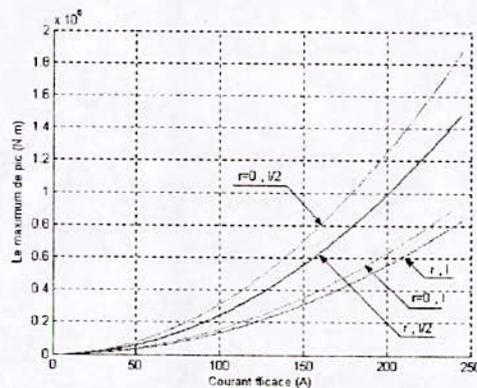


Fig. 13.b. Maximums des pics du couple pour la machine M2

## VI. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté une étude transitoire de courant et de couple dans la machine asynchrone lors de son fonctionnement en générateur autonome, suite à un retour du réseau. Ce dernier produit des pics de courant et de couple très importants qui dépendent essentiellement de l'instant de connexion et du déphasage entre la tension de la machine et de celle du réseau. Les expressions analytiques développées dans notre étude donnent des résultats très proches de ceux obtenus par simulation.

En négligeant les résistances des deux armatures de la machine, on aboutit à une simplification de ces expressions pour les pics du courant et du couple. Cependant les résultats obtenus ne sont réalistes que dans le cas des machines asynchrones à rotor bobiné de fortes puissances. Pour ce cas, il suffit d'une identification paramétrique de la machine pour déterminer les maximums des pics possibles lors du retour réseau.

## IX. REFERENCES

- [1] T. Senjye, N.Sueyoshi, K.Uezato, H.Fujita, "Transient Current Analysis of Induction Generator for Wind Power Generating System", IEEE PES, Vol. 3, 2002 pp. 1647-1652.
- [2] J.S.C.Htsui, "Magnitude, Amplitude and Frequencies of Induction-Motor Air-Gap Transient Torque Through Simultaneous Reclosing with or without Capacitors", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-104, n°6, June 1985, pp.1519 - 1524.
- [3] T.Khaldi, "Retour Réseau sur un Autoamorçage Accidentel de la Machine Asynchrone", Thèse de Magister, E.N.P, Alger, Juillet 1999.
- [4] D.Kairous, "Calcul Analytique de Couple et de Courant dans une Machine Asynchrone Auto Existée", Mémoire de Magister, E.N.P, Alger, Octobre 2004.
- [5] P.C.Krause, "Analysis of Electrical Machinery", Mc Graw Hill, New York, 1987.
- [6] E.Levi, "Impact of Cross-Saturation on Accuracy of Saturated Induction Machine Models", IEEE Transactions On Energy Conversion, pp. 211-216, Vol. 12, No.3, September 1997.

- [7] D.Seyoum, M.F.Rahman, "The Dynamic Characteristics of an Isolated Self-Excited Induction Generator Driven by Wind Turbine", IEEE Transactions on industry applications, vol.39, n°4, pp. 936-944, July/August 2003.
- [8] Z.Cerovsky, "Calculation of Reswitching Surge Current in an Induction Motor", Summary, Proceedings IEE, pp. 647-649, Vol.122, No. 6, June 1975.

## ANNEXE

La machine asynchrone triphasée à rotor bobiné utilisée (M1) présente les caractéristiques suivantes :

$P_n = 3,5 \text{ kW}$ ,  $U_n = 220/380 \text{ V}$ ,  $I_n = 14/8 \text{ A}$ ,  $N_n = 1410 \text{ tr/min}$ ,  $I_{rn} = 9\text{A}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .

Les essais d'identification classiques, effectués sur la machine, ont donné les résultats suivants :

$$r_r = 0,92 \Omega, r_s = 0,4 \Omega, l_s = l_r = 0,004 \text{ H}, M = 0,078 \text{ H}$$

## SYMBOLES UTILISES

s, r :	Indices respectifs du stator et du rotor.
d, q :	Indices relatifs à l'axe direct et à l'axe en quadrature.
m :	Indices correspondant au flux et au courant magnétisant.
$r_s, L_s$ :	Résistance et inductance propre d'une phase statorique.
$r_r, L_r$ :	Résistance et inductance propre par phase rotorique vues du stator.
$l_r, l_s$ :	Inductances de fuites statorique et rotorique.
M :	Mutuelle cyclique (stator / rotor).
C :	Capacité par phase étoilée.
$\sigma$ :	Coefficient de fuites totales.
$\Omega$ :	Vitesse angulaire du rotor.
S :	Glissement.
j :	Nombre complexe ( $j^2 = -1$ )
$\omega_r$ :	Vitesse angulaire du référentiel.
$\phi_m, \phi_r$ :	Flux magnétisant et flux de fuite.
J :	Moment d'inertie.
$\tau_r$ :	Constante de temps moyenne.
$\omega_s, \omega_r, \omega$ :	Pulsations statorique, rotorique et celle du réseau.
Re(x), Im(x) :	Partie réelle et partie imaginaire de x.
V, i, $\Psi$ :	Désignent respectivement les tensions, les courants et les flux.
$C_e, C_r, C_f$ :	Couple électromagnétique, couple résistant et couple de frottement

# MODELISATION DES COURANTS INDUITS DANS UNE TOLE MINCE CONDUCTRICE

Menana Hocine

Ecole Nationale Polytechnique  
10, Avenue Hassen Badi- B.P. 182 – 16200 El Harrach - Alger – Algérie.  
Email : menana\_hocine@yahoo.fr

## I. RESUME

Ce travail présente un modèle de calcul numérique des courants induits dans une tôle mince conductrice. Ce modèle est basé sur un couplage éléments finis-intégrale de frontière, dans une formulation en champ électrique. Nous l'avons appliqué pour l'évaluation de l'efficacité de blindage d'une sphère creuse conductrice.

**Mots clés-** Tôle mince conductrice, couplage éléments finis-intégrale de frontière, courants induits, blindage.

## II. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous avons repris, d'une manière assez simple et un peu plus détaillée, un modèle de calcul des courants induits dans une tôle mince conductrice, que nous avons, ensuite, appliqué pour l'évaluation de l'efficacité de blindage d'une sphère creuse conductrice. Ce modèle est basé sur un couplage éléments finis-intégrale de frontière, dans une formulation en champ électrique.

Ce travail ne constitue pas une originalité par rapport au modèle de calcul. Pour cette raison, nous n'avons pas procédé à sa validation. Les travaux effectués dans ce contexte [1,2] montrent que ce dernier donne de bons résultats pour des épaisseurs, pas nécessairement homogènes, mais qui restent inférieures à l'épaisseur de peau. Une condition que nous avons respecté tout au long de ce travail.

## III. FORMULATION DU PROBLEME

Le système de la FIG.1 comporte une sphère creuse d'épaisseur  $\delta$ , de rayon moyen  $R$ , qui occupe un volume  $\Omega$  dans  $\mathcal{R}^3$ , délimitée par ces deux frontières  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_e$ , avec leurs normales respectives  $\vec{n}_i$  et  $\vec{n}_e$ .  $\Gamma$  est une frontière moyenne fictive avec sa normale  $\vec{n}$  dirigée vers l'extérieur. Une spire de rayon ( $r$ ) est placée au milieu de la sphère, celle-ci est parcourue par un courant  $I_S$ .

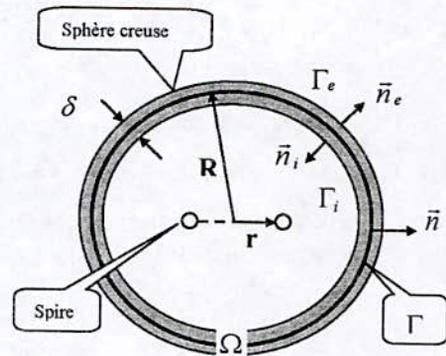


FIG.1- Présentation du système

En tout point de ce système, nous écrivons :

$$e = e^S + e^r \quad (1)$$

$e^S$  : champ électrique produit par la source (spire), qui est calculé comme suit :

$$e^S(x) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I_S(y)}{|x-y|} dl \quad (2)$$

$L$  : est la longueur de la spire

$e^r$  : champ électrique de réaction de la tôle mince.

Dans le volume occupé par la sphère creuse, le problème électromagnétique est formulé comme suit [1] :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \times e^r \cdot \nabla \times e' d\Omega + j\omega\mu_0\sigma \int_{\Omega} e^r \cdot e' d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_i} (n_i \times \nabla \times e^r) \cdot e' dS + \int_{\Gamma_e} (n_e \times \nabla \times e^r) \cdot e' dS = \\ & - \int_{\Omega} \nabla \times e^S \cdot \nabla \times e' d\Omega + j\omega\mu_0\sigma \int_{\Omega} e^S \cdot e' d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_i} (n_i \times \nabla \times e^S) \cdot e' dS - \int_{\Gamma_e} (n_e \times \nabla \times e^S) \cdot e' dS \quad (3) \end{aligned}$$

$e'$  est une fonction teste.

L'épaisseur de la tôle de la sphère est considérée inférieure à l'épaisseur de peau ( $p = \sqrt{2/\mu\sigma\omega}$ ), nous pouvons, donc, négliger la variation du champ électrique suivant celle ci [1,2]. L'épaisseur de la tôle devient donc un simple paramètre de calcul. En tenant compte de cette hypothèse, l'équation (3), en considérant que  $n = n_e = -n_i$ , s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \delta \int_{\Gamma} \nabla \times e^r \cdot \nabla \times e^r dS + j\omega \mu_0 \sigma \delta \int_{\Gamma} e^r \cdot e^r dS + \\ & + \int_{\Gamma} [(n \times \nabla \times e^r)] \cdot e^r dS = \\ & -\delta \int_{\Gamma} \nabla \times e^s \cdot \nabla \times e^r dS - j\omega \mu_0 \sigma \delta \int_{\Gamma} e^s \cdot e^r dS \end{aligned} \quad (4)$$

$[(n \times \nabla \times e^r)]$  est le saut de la composante tangentielle de  $\nabla \times e^r$  à travers la frontière fictive  $\Gamma$ , qui est proportionnel au saut de la composante tangentielle du champ magnétique de réaction de la sphère [3]. Le saut de la composante tangentielle de  $\nabla \times e^s$  à travers la frontière fictive  $\Gamma$  est supposé nul, cela est justifié par la faible épaisseur de la sphère ( $\delta \ll R$ ).

On cherche à trouver une relation linéaire entre  $[(n \times \nabla \times e^r)]$  et  $n \times e^r$  qui est continue, de la forme :

$[(n \times \nabla \times e^r)] = \mathfrak{R}(n \times e^r)$ . Pour cela, on exprime le champ électrique de réaction de la sphère en fonction d'une densité fictive de courant  $K$  sur la frontière fictive  $\Gamma$ , comme suit [3,4] :

$$e^r(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(y)}{|x-y|} d\Gamma \quad (5)$$

$$n \times e^r(x) = \frac{1}{4\pi} n \times \int_{\Gamma} \frac{K(y)}{|x-y|} d\Gamma \quad (6)$$

en effectuant une formulation variationnelle à la formule (6), nous obtenons la relation suivante:

$$[B][E^r] = [Q][K] \quad (6-1)$$

nous exprimons donc les courants fictifs en fonction de  $n \times e^r$ , comme suit :

$$[K] = [Q]^{-1}[B][E^r] \quad (6-2)$$

Il ne reste qu'à exprimer les courants fictifs en fonction de  $[(n \times \nabla \times e^r)]$ , pour pouvoir lier ce dernier à

$n \times e^r$ . Selon la théorie des potentiels, on a sur les deux côtés de la surface fictive, et à sa proximité immédiate [5] :

$$n \times (\nabla \times e^r(x))_{\Gamma^+} = \frac{K(x)}{2} + \int_{\Gamma} n \times K(y) \times \nabla G(x, y) dy \quad (6-3)$$

$$n \times (\nabla \times e^r(x))_{\Gamma^-} = -\frac{K(x)}{2} + \int_{\Gamma} n \times K(y) \times \nabla G(x, y) dy \quad (6-4)$$

$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$  est la fonction de green en 3D.

des équations (6-3) et (6-4), nous déduisons que :

$$[(n \times \nabla \times e^r)] = K \quad (6-5)$$

qui, en tenant compte de (6-2), s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[(n \times \nabla \times e^r)] = [Q]^{-1}[B][E^r] \quad (6-4)$$

En chaque point de la spire un courant est induit par la réaction de la sphère, et s'exprime comme suit :

$$I_r(x) = \int_S \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(y)}{|x-y|} d\Gamma dS \quad (7)$$

$\sigma_s$  est la conductivité de la spire ;  
 $S$  est la section de la spire.

Ce courant s'ajoute au courant source, et contribue à la création du champ électrique source comme suit :

$$e^s(x) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I_s(y) + I_r(y)}{|x-y|} dl \quad (8)$$

La formulation (4) aboutit au système matriciel suivant :

$$\begin{aligned} & (\delta[R] + j\omega\mu_0\sigma\delta[L] + [M])[E^r] = \\ & -\delta([R] + j\omega\mu_0\sigma[L])[E^s] \end{aligned} \quad (9)$$

où :

$[R]$  est une matrice creuse à valeurs réelles qui joue le rôle d'une résistance ;

$[L]$  est une matrice creuse à valeurs réelles qui joue le rôle d'une inductance ;

$[M]=[L][Q]^{-1}[B]$  est une matrice pleine à valeurs réelles qui joue le rôle d'une mutuelle inductance calculée à partir d'un couplage avec la méthode d'intégrales de frontière;

$[E^r]$  est le vecteur comportant les valeurs inconnues du champ électrique de réaction ;

$[E^S]$  est le vecteur comportant les valeurs du champ électrique source, calculées numériquement à partir de la formule (2), ou analytiquement comme suit:

$$e_S(\varphi) = -j\omega A_S(\varphi) \quad (10)$$

avec [5] :

$$A_S(\varphi) = \frac{\mu_0 I_S}{K\pi} \sqrt{\frac{r}{\rho}} \left[ \left( 1 - \frac{K^2}{2} \right) J_1 - J_2 \right] \quad (11)$$

en supposant que la spire est contenue dans le plan ( $z=0$ ), on a:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad K = \sqrt{\frac{4r\rho}{(r+\rho^2)+z^2}}$$

$J_1$  et  $J_2$  sont les intégrales de Legendre, formulées comme suit :

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\theta}} \quad , \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-K^2\sin^2\theta} \, d\theta$$

#### IV. MISE EN ŒUVRE ET RESULTATS NUMERIQUES

Le maillage triangulaire de la sphère creuse (FIG.2) de rayon ( $R=1m$ ) comporte 120 triangles, 62 nœuds, et 180 arêtes.

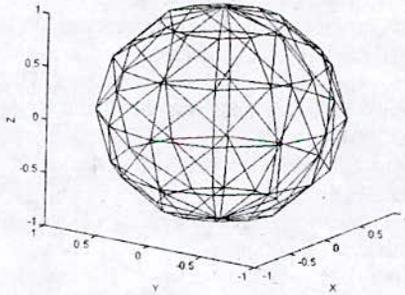


FIG.2- Maillage de la sphère creuse

Nous utilisons les éléments d'arêtes pour approcher les variables dans l'espace discret. Dans chaque triangle du maillage, nous écrivons :

$$e^S = \sum_i^3 E_i^S w_i \quad , \quad e^r = \sum_i^3 E_i^r w_i$$

$$w_i = \lambda_i \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_i$$

$i=\{l,k\}$  est le numéro de l'arête dirigée du nœud numéro ( $l$ ) vers le nœud numéro ( $k$ ) du triangle.

$E_i^S$  et  $E_i^r$  sont, respectivement, les circulations du champ électrique source et champ électrique de réaction sur l'arête numéro ( $i$ ).

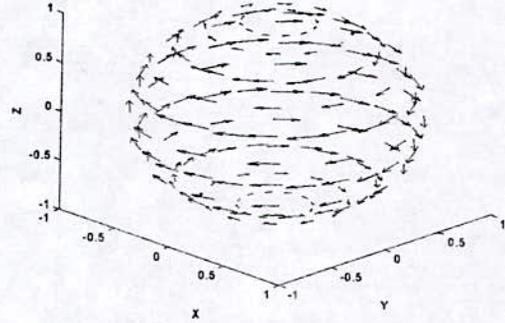


FIG.2- Courants induits dans la sphère

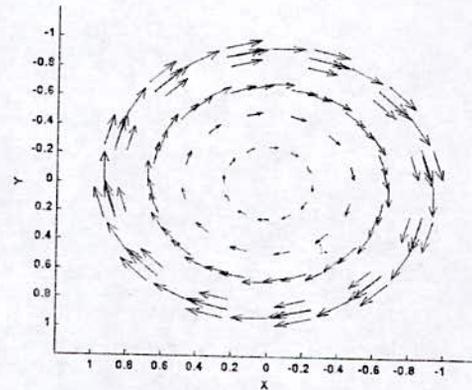


FIG.3- Courants induits dans la sphère (vue de dessus)

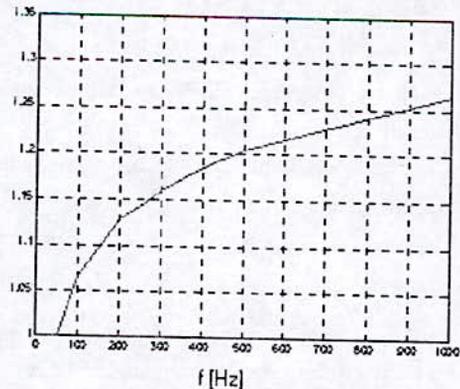


FIG.4- Variation de l'efficacité de blindage relative ( $E/E_{\min}$ ) de la sphère en fonction de la fréquence.

## V. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons repris, d'une manière assez simple et un peu plus détaillée, une méthode de calcul des courants induits dans une tôle mince conductrice, que nous avons appliqué pour déterminer la variation de l'efficacité de blindage d'une sphère creuse par rapport à sa conductivité, sa distance par rapport à la source et la fréquence du champ source. Ce travail ne constitue pas une originalité par rapport à la méthode qui a déjà été élaborée par Hichem Chemkha et Françoise Rioux-Damidau en 1997. Nous n'avons donc pas procédé à sa validation. Les auteurs ont montré que la méthode donne de bons résultats pour des épaisseurs, pas nécessairement homogènes, mais qui restent inférieures à l'épaisseur de peau. Une condition que nous avons respecté tout au long de ce travail. Les résultats obtenus confirment l'efficacité de la méthode, qui peut trouver son application dans le domaine de la CEM, le chauffage par induction et le contrôle non destructif, par courants de Foucault, des tôles minces conductrices.

## VI. BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hichem Chemkha, Françoise Rioux-Damidau, « A Fast And Accurate Model For Eddy Current Computation in Thin Conducting Shells », IEEE Transactions on Magnetics, vol.33, N°2, March 1997, pp.1342-1345.
- [2] Z. Ren and A. Razek, « A coupled electromagnetic-mechanical model for thin conductive plate deflexion analysis », IEEE transactions on magnetics vol. 26, N°5, September 1990, pp. 1650-1652.
- [3] Menana Hocine, Djennah Mohamed, « Modélisation tridimensionnelle du champ magnétostatique pour une tôle mince perméable », CMGE'04, Université Mentouri de Constantine, du 12 au 13 avril 2004.
- [4] Menana Hocine, Djennah Mohamed, « Mise en œuvre d'une rigidité pour le couplage entre la MEF et la MIF dans le calcul du champ magnétostatique pour une tôle mince perméable », CIGE'04, Université Ferhat Abbas de Sétif, du 10 au 12 Octobre 2004.
- [5] E. Durand, « Magnétostatique », Masson & Cie Editeurs, 1968.
- [6] M. Abramowitz, I. A. Stegun, « Handbook of mathematical functions », Dover Publications, New York, 1965.

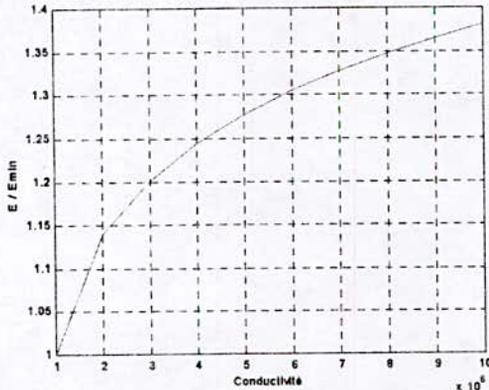


FIG.4- Variation de l'efficacité de blindage relative ( $E/E_{\min}$ ) de la sphère en fonction de la conductivité de la sphère.

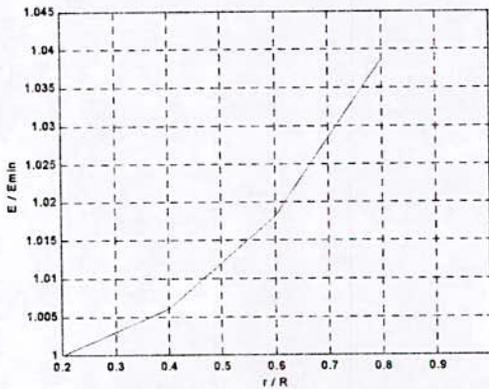


FIG.5- Variation de l'efficacité de blindage relative ( $E/E_{\min}$ ) de la sphère en fonction du rapport entre le rayon de la spire (r) et celui de la sphère (R).

L'efficacité de blindage est donnée comme suit :

$$E = 20 \log_{10} \left| \frac{E_{\text{incident}}}{E_{\text{transmis}}} \right| [dB]$$

$E_{\text{incident}}$  : le champ électrique calculé sans tenir compte de la présence de la sphère.

$E_{\text{transmis}}$  : le champ électrique calculé, au même point que le précédent, en tenant compte de la présence de la sphère.

Comme le montrent les figures précédentes, l'efficacité de blindage de la sphère augmente avec la fréquence et la conductivité. Cela est dû à l'augmentation des courants induits dans la sphère qui engendre une augmentation de l'absorption. Le même phénomène est observé lorsqu'on rapproche la spire de la sphère. En effet, le fait de rapprocher la spire de la sphère engendre une augmentation des courants induits dans cette dernière.

# Modélisation Vectorielle des Pertes Magnétiques dans les Tôles FeSi 3% en Régime d'Induction Sinusoïdale

H. HOUASSINE, A. BENDJERAD, D. MOUSSAOUI

Laboratoire des Systèmes Electromagnétiques

Ecole Militaire Polytechnique (ex- ENITA) BP 17, Bordj El Bahri Algiers.

hamza\_houassine@yahoo.fr

bendjerad@yahoo.fr

dmoussaoui@eudoramail.com

## RESUME :

Dans cette présente étude, nous présentons un modèle très pertinent dans le domaine de la modélisation des cycles d'hystérésis, un phénomène qui régit le comportement des matériaux magnétiques. La modélisation de ce phénomène est faite par un modèle à la fois facile à mettre en œuvre numériquement et tient compte du caractère non linéaire de ce type de matériaux (Modèle de Preisach).

Les résultats obtenus en utilisant ce modèle sont comparés à ceux de la caractérisation expérimentale en utilisant le cadre d'Epstein.

Les essais expérimentaux sont réalisés sur des tôles magnétiques FeSi 3% (à grains orientés et à grains non orientés) en régime d'induction sinusoïdale de fréquence industrielle.

**Mot Clé:** Modèle de Preisach, Cycle d'hystérésis, Cadre d'Epstein, Pertes magnétiques.

## I. INTRODUCTION

Depuis longtemps, la modélisation du phénomène d'hystérésis, qui est à l'origine des pertes fer dans les matériaux magnétiques, a fait le souci des électrotechniciens.

Dans ce travail, nous présentons une étude de modélisation mathématique de la courbe  $B(H)$ , qui est la base dans le calcul des pertes magnétiques : Les pertes magnétiques sont proportionnelles à l'aire du cycle  $B(H)$ .

Le modèle utilisé est le modèle Preisach, ce dernier tient compte de tous les phénomènes complexes du processus d'aimantation des matériaux magnétiques tels la saturation, les cycles mineurs et la non linéarité.

## II. MODELE DE PREISACH

### II.1 DEFINITION DU MODELE

Preisach a représenté l'état magnétique du matériau à un instant donné par des entités magnétiques ayant deux états possibles d'aimantation  $M=1$  et  $M=-1$ , définies par un cycle élémentaire rectangulaire (Fig1), ce dernier est caractérisé par des champs d'inversion  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha \geq \beta$  pour lesquels il y a une transition irréversible

de l'état haut  $M=1$  vers l'état bas  $M=-1$  et inversement.[4], [1]

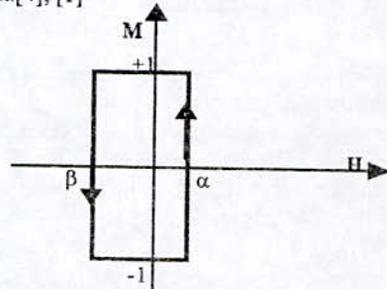


Fig.1 : cycle élémentaire de Preisach

Le calcul de l'aimantation totale nécessite une connaissance de la distribution statistique des cycles élémentaires, cette fonction est appelée fonction de Preisach. [1], [3], [5]

L'aimantation résultant de l'application d'un champ  $H(t)$  s'écrit alors :

$$M(t) = \iint \rho(\alpha, \beta) \Phi_{\alpha, \beta}[H(t)] d\alpha d\beta \quad (1)$$

Avec :

$\rho(\alpha, \beta)$  : Fonction de distribution de Preisach

$\Phi_{\alpha, \beta}[H(t)]$  : L'opérateur associé aux entités magnétiques, il vaut (+1) pour  $H=\alpha$  et (-1) pour  $H=\beta$ .

### II.2 INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU MODELE

$\rho(\alpha, \beta)$  dépend de la nature du matériau [1]. Elle est définie pour  $\alpha > \beta$ , et elle a les propriétés suivantes :

➤ Elle est définie dans le domaine

$S = \{\alpha \geq \beta, \beta \geq -H_s, \alpha \leq H_s\}$  ( $H_s$  est le champ de saturation) ;

➤ Symétrique par rapport à la droite  $\alpha = -\beta$  ;

➤ Etant donné que le cycle est fermé,  $\rho(\alpha, \beta)$  est bornée.

Le domaine de définition de cette fonction est un triangle de surface  $S$  (Fig.2), limitée par les droites  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha = H_s$  et  $\beta = -H_s$ , dans le plan formé par les deux axes  $(O\alpha)$  et  $(O\beta)$ .

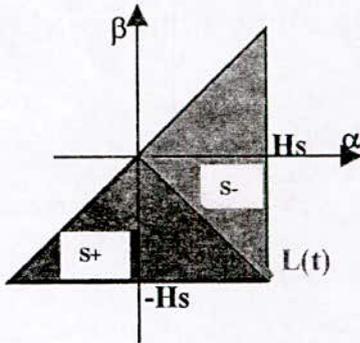


Fig. 2 : Plan de Preisach

On remarque que S est divisée en deux parties par une frontière L(t), cette dépend du temps.

La surface S+(t) représente des opérateurs  $\phi_{\alpha\beta}$  sont à l'état d'aimantation (+1), la surface S-(t) représente tous les opérateurs ayant un état d'aimantation (-1); d'où on peut déduire que le modèle peut se mettre sous la forme suivante: [1], [3]

$$M(t) = \iint_{S^+} \rho(\alpha, \beta) \, d\alpha d\beta - \iint_{S^-} \rho(\alpha, \beta) \, d\alpha d\beta \quad (2)$$

### II.3 LA FONCTION DE DISTRIBUTION $\rho(\alpha, \beta)$

La détermination complète du modèle de Preisach nécessite la connaissance de la fonction de distribution  $\rho(\alpha, \beta)$  qui est la base de calcul de l'aimantation totale du matériau à un instant donné, pour cela deux approches sont suivies: [2]

- ❖ La première, à partir d'un seul ou d'un ensemble de cycles expérimentaux.
- ❖ La seconde est d'essayer de retrouver une fonction analytique qui approche le mieux le cycle réel.

Dans cette étude, nous utilisons la deuxième approche.

### II.4 L'APPROCHE ANALYTIQUE

Plusieurs expressions analytiques ont été utilisées l'une de ces approximations est la fonction de Lorentz, elle est donnée par : [1], [5]

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{K}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{H_c} - 0.5\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\beta}{H_c} + 0.5\right)^2\right]} \quad (3)$$

Tels que :

K : Constante de normalisation ajustable de telle façon à avoir  $M(H_s(t)) = M_s$

$H_c$  : Le champ coercitif.

Pour mieux reproduire le cycle expérimental une modification est apportée sur la Lorentzienne, pour

donner naissance à une méthode dite de Lorentz modifiée; en ajoutant de paramètres à la fonction de Lorentz classique et elle devient : [2]

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{K * a^2}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right] \left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} \quad (4)$$

L'expérience a montré que les deux paramètres a et b ont une relation avec la nature de matériau c'est à dire l'induction rémanente, le champ coercitif et la perméabilité du matériau.

Avec  $a \in \mathfrak{R}_+^*$  et  $b \in \left[1, \frac{H_s}{H_c}\right]$

### II.5 FORMULATION MATHÉMATIQUE DU MODÈLE EN UTILISANT LA FONCTION DE LORRENTZ MODIFIÉE

En se basant sur la formulation du modèle de Preisach (1), et en introduisant la fonction de Lorentz modifiée on aura :

$$M(t) = M_{t-1} \pm 2 \iint_D \frac{K a^2}{\left[a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right] \left[a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right]} \, d\alpha d\beta \quad (5)$$

Où :

$M_{t-1}$  : est l'aimantation à l'instant précédent.

D : la variation de la surface  $S^+$  suite à l'application du champ d'excitation.

Cette formulation rend le calcul moins coûteux du fait que l'une de ces deux intégrales se calcule d'une manière analytique.

### II.5. A MODELISATION DE LA BRANCHE DESCENDANTE DU CYCLE MAJEUR

Cette branche est obtenue à partir de l'état saturé positif, c'est à dire le plan de Preisach ne présente que des entités magnétiques dont l'état d'aimantation est (+1), donc le plan de Preisach est entièrement égale à S+ et l'histoire du matériau est réduite au champ de saturation +Hs au niveau des maxima et -Hs au niveau des minima. Un champ décroissant appliqué à partir de cet état et allant jusqu'à -Hs induit une diminution progressive de la surface S+ jusqu'à son annulation. Et l'aimantation s'écrit :

$$M(t) = M_{t-1} - 2 \int_{\frac{H_s}{H_c}}^{\frac{H_s}{H_c} - b} \frac{K a \sqrt{a H_c} \left\{ \arctan \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{H_s}{H_c} - b \right) - \arctan \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\beta}{H_c} - b \right) \right\}}{\left( a + \left( \frac{\beta}{H_c} + b \right)^2 \right)} \, d\beta \quad (6)$$

### II.5.B MODELISATION DE LA BRANCHE ASCENDANTE DU CYCLE MAJEUR

Elle est obtenue à partir de l'état de saturation négative. Initialement, la totalité de l'aire du plan de Preisach correspond à la surface S-. Un champ croissant et monotone est appliqué pour augmenter progressivement la surface S+ et par conséquent l'aimantation jusqu'à la saturation positive. Sous ces conditions, l'aimantation ne peut suivre que la branche ascendante du cycle majeur qui s'écrit : [1], [2]

$$M(t) = M_{s-}(t) + 2 \int_{M_{s-}(t)}^{M_{s+}(t)} \frac{K \alpha \sqrt{a} H c}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{Hc} - b\right)^2\right)} \left\{ \arctg \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{\alpha}{Hc} + b \right) - \arctg \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{-Hs}{Hc} + b \right) \right\} dx \quad (7)$$

### II.5.C EXEMPLES DE CYCLES MAJEURS GENERES PAR LE MODELE

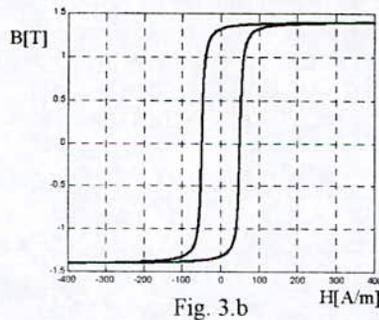
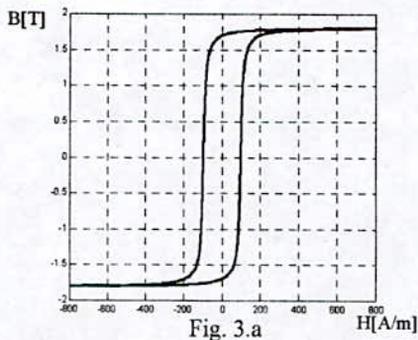


Fig.3: Courbe des cycles majeurs générés par le modèle  
 3.a :  $H_{max}=800$  A/m ,  $B_{max}=1.8$  T,  $H_c=98$  A/m  
 3.b :  $H_{max}=400$  A/m ,  $B_{max}=1.40$  T,  $H_c=50$  A/m

### III. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Nous disposons au laboratoire d'un banc automatique de caractérisation de tôles magnétiques constitué d' :

- un cadre d'Epstein normalisé.
- un générateur numérique WAVETEK 39.
- un amplificateur de puissance KEPCO.
- un oscilloscope numérique (MXOX2000) pour la visualisation et l'acquisition des signaux.
- un PC pour l'acquisition et le traitement.
- un capteur à effet Hall pour capter le courant magnétisant.
- une carte d'asservissement pour assurer les conditions d'essai sous une induction sinusoïdale.

Les programmes d'acquisition et de traitement numérique sont sous C.V.I (C++ for virtual instrument), la modélisation des cycles est faite sous Matab.

Le schéma du banc expérimental est donné par la Fig.4.

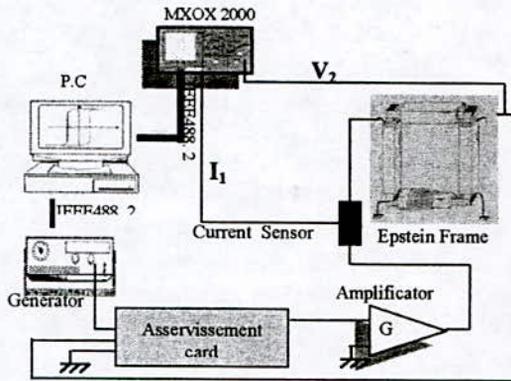


Fig.4 : Schéma global du banc de mesure

### IV. VALIDATION EXPERIMENTALE DU MODELE DE PREISACH

Dans le but de valider le Modèle de Preisach, nous avons effectué des essais sur deux types de tôles (FeSi 3% à grains orientés et à grains non orientés) sur le cadre Epstein.

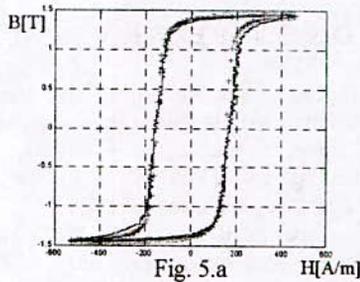


Fig. 5.a

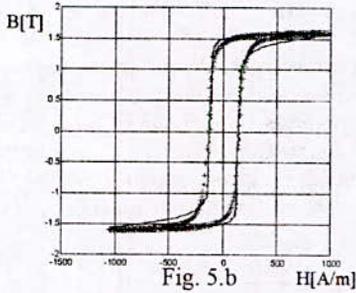


Fig. 5.b

Fig. 5 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux fournis par le modèle, tôle FeSi à grains non orientés  $f=50\text{Hz}$  (+ cycles théoriques ; — cycles pratiques)  
 5.a :  $B_{\text{max}}=1.49\text{T}$  ,  $H_c=154\text{A/m}$   
 5.b :  $B_{\text{max}}=1.6\text{T}$  ,  $H_c=180\text{A/m}$

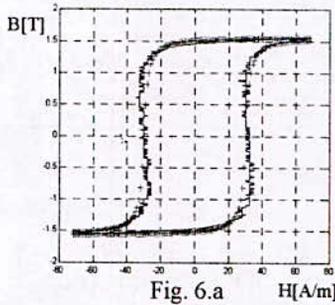


Fig. 6.a

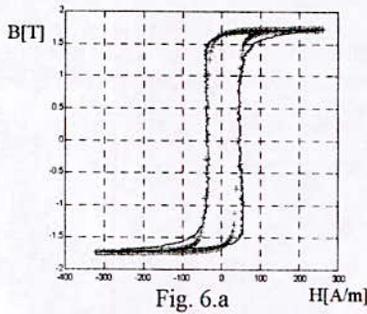


Fig. 6.a

Fig. 6 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux fournis par le modèle, tôle FeSi à grains orientés  $f=50\text{Hz}$  (+ cycles théoriques ; — cycles pratiques)  
 6.a :  $B_{\text{max}}=1.55\text{T}$  ,  $H_c=30\text{A/m}$   
 6.b :  $B_{\text{max}}=1.73\text{T}$  ,  $H_c=40\text{A/m}$

### V. COMPARAISON ENTRE LES PERTES OBTENUES PAR LE MODELE ET CELLES OBTENUES EXPERIMENTALEMENT

Dans le but de Valider le modèle de Preisach en régime sinusoïdal 50Hz, des essais sont réalisés sur deux échantillons de tôles FeSi 3% dont les caractéristiques sont les suivantes :

- \* a) Tôle FeSi 3% à grains orientés, 0,3 mm d'épaisseur
- \* Référence VH 97.50.
- \* Masse de l'échantillon utilisé 516.3 g
- \* Origine Electro-Industrie
- \* b) Tôle FeSi 3% à grains non orientés, 0,5 mm d'épaisseur
- \* Référence VH 280.50 THYSSEN
- \* Masse de l'échantillon utilisé 689.6g
- \* Origine Electro-Industrie

#### V.1. RESULTATS OBTENUS POUR L'ECHANTILLON DE TOLES FeSi 3% A GRAINS NON ORIENTES:

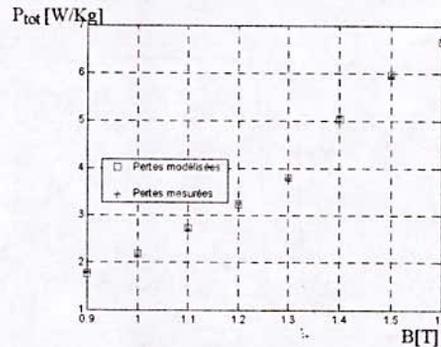


Fig. 7: Pertes estimées par le modèle de Preisach et celles mesurées (tôle FeSi 3% grains non orientés,  $f=50\text{Hz}$ )

□ Pertes modélisées \* Pertes mesurées

#### V.2. RESULTATS OBTENUS POUR L'ECHANTILLON DE TOLES FeSi 3% A GRAIN ORIENTES:

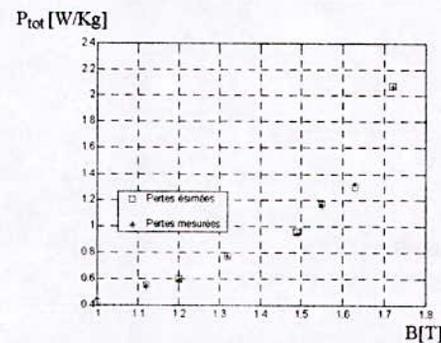


Fig. 8: Pertes estimées par le modèle de Preisach et celles mesurées (tôle FeSi 3% grains orientés,  $f=50\text{Hz}$ )

□ Pertes modélisées \* Pertes mesurées

## VI. CONCLUSION

Nous avons détaillé de cette étude une méthode très récente de calcul de la fonction de distribution de Preisach: Approximation par la Loretzienne modifiée.

Cette méthode se base sur des paramètres qui ont une relation étroite avec les paramètres physiques du matériau quoique cette relation n'est pas encore bien établie, dans ces conditions, le modèle trouve ses limites car la détermination de ces paramètres rend le calcul fastidieux. Cependant un axe de recherche peut faire l'objet d'une étude approfondie pour établir une relation mathématique liant les deux paramètres  $a$  et  $b$  de la fonction de Lorentz avec les propriétés physiques du matériau.

## VII. BIBLIOGRAPHY

- [1] Y.Ouled Amor, M.Filiachi « Prise en compte de l'hystérésis magnétique dans la modélisation du chauffage par induction ». Université de Nantes 2000.
- [2] « Caractérisation et modélisation du phénomène d'hystérésis pour une implantation dans un code de calcul en éléments finis ». Journée (S.D.S.E) 20-21 janvier 2000CNRS.
- [3] A.Bossavit,C.Emsom,I.D.Mayergoz  
« Méthodes numériques en électromagnétisme  
Edition Eyrols 1991.
- [4] L.L.Rouve « prise en compte du comportement magnétique fréquentiel des tôles FeSi en modélisation électrotechnique »  
Thèse de doctorat INP Grenoble Janvier 1996.
- [5] P.Brissonneau « magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique »  
Edition Hermes 1997.

## Optimisation des Puissances actives par les Algorithmes Génétiques

H. Bouzeboudja\*, B. Naama, A. Chaker

Département d'électrotechnique, USTO, B.P 1505 El M'naouar, Oran, Algérie

Département d'électrotechnique, Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbés

Laboratoire des réseaux électriques, E.N.S.E.T. B.P 1742 El M'naouar, Oran

Fax : 213 41 42 55 09

Email : hbouzeboudja@yahoo.fr

### RESUME

**Dans cet article, nous présentons une solution du problème de la répartition optimale des puissances actives basée sur un algorithme génétique simple.**

**Notre objectif est de minimiser Le coût du combustible nécessaire pour la production de l'énergie électrique qui se présente sous forme non linéaire, en tenant compte de certaines contraintes de type égalité et inégalité.**

**Nous présentons un algorithme génétique simple avec deux types de codage : un codage binaire classique et un codage réel.**

**Une étude comparative des résultats obtenus de l'algorithme génétique simple (codage réel, codage binaire) par rapport aux techniques conventionnelles de Quasi-Newton (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) et des coûts marginaux.**

**Une application a été faite sur un réseau standard IEEE 25 nœuds.**

**Mots Clés : Optimisation, algorithme génétique, codage, répartition optimale des puissances actives.**

### INTRODUCTION

Ces dernières décennies ont vu le développement de réseaux électriques de taille et de complexité croissante. Actuellement, ces réseaux sont exploités de plus en plus près de leurs limites alors qu'on en exige une électricité de grande qualité (fourniture sans interruption, à tension et fréquence constantes).

Pour une bonne exploitation du réseau, nous devons résoudre les problèmes d'ordre techniques et économiques, ce qui nécessite l'amélioration de la gestion de l'énergie électrique en réduisant d'une part le

coût de production et d'autre part en gardant l'équilibre entre la production et la consommation.

La méthode d'optimisation utilisée est basée sur la théorie des algorithmes génétiques (AG) inspirée de l'évolution naturelle formulée par Darwin, qui propose de faire évoluer des populations d'individus dans un environnement en favorisant la survie et la reproduction des individus les mieux adaptés à cet environnement.

La première étape lors de l'application d'un AG est le choix du codage des paramètres sous la forme de chaînes maniables. La représentation choisie est primordiale car l'efficacité d'un AG dépend principalement de la manière dont elle capte les régularités de l'espace de recherche.

L'objectif principal de ce travail est d'évaluer la pertinence de l'utilisation du codage réel dans les AG, pour l'optimisation des puissances actives.

En fin nous présentons une comparaison des résultats obtenus de l'algorithme génétique simple (AGs) par rapport aux méthodes classiques (déterministes) conventionnelles de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) et des coûts marginaux[1].

Une application a été faite sur un réseau standard IEEE 25 nœuds [2].

### MODELE MATHEMATIQUE

Considérons un réseau électrique alimenté par un ensemble de centrales possédant chacune plusieurs machines. Il est évident qu'à tout moment la somme des puissances actives produite par les machines est égale à la somme des puissances actives consommées par les charges. Les frais de combustible nécessaire pour la production de puissance électrique est une fonction monotone de la puissance.

Donc, le problème d'optimisation de la puissance active pour chaque unité de production est lié à la minimisation du coût de production total.

Mathématiquement, le problème peut être posé sous la forme suivante[3] :

$$\text{Minimiser } F = \sum_{i=1}^{NG} C_i(P_{Gi}) \quad (1)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{NG} P_{Gi} - \sum_{j=1}^{NC} P_{CHj} - P_L = 0 \quad (2)$$

$$P_{Gi}^{\min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\max} \quad (3)$$

Où :

- F : Fonction du coût de production total.
- $N_G$  : Nombre total de nœud producteur.
- $N_C$  : Nombre total de nœud consommateur.
- $P_{Gi}$  : Puissance active générée au nœud i.
- $P_{CHj}$  : Puissance active consommée au nœud j.
- $P_L$  : Pertes actives totales dans le réseau.
- $P_{Gi}^{\min}$  : Puissance minimale générée au nœud i.
- $P_{Gi}^{\max}$  : Puissance maximale générée au nœud i.

$C_i$  : représente la fonction coût de production de l'unité i. C'est une fonction typiquement quadratique donner par l'expression suivante :

$$C_i(P_{Gi}) = A_i P_{Gi}^2 + B_i P_{Gi} + D_i \quad (4)$$

Où :

$A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  sont des coefficients spécifiques aux générateurs.

Nous allons utiliser la méthode de pénalité, pour transformer le problème original contraint en un problème auxiliaire non contraint où le minimum est le même dans les deux cas.

Le principe de base consiste à modifier le critère en lui ajoutant une fonction de pénalisation P[4][5].

La nouvelle tâche consiste à minimiser la fonction sans contraintes suivante :

$$F_m(P_G, r_k) = \sum_{i=1}^{NG} C_i(P_{Gi}) + \frac{1}{r_k} \cdot B \cdot h^2(P_G) \quad (5)$$

Avec  $r_k$  : coefficient de pénalité

B : une constante, définie comme suite :

$$\begin{cases} B > 0 & \text{si } h(P_G) \neq 0 \\ B = 0 & \text{si } h(P_G) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$h(P_G)$  est la contrainte égalité définie par :

$$h(P_G) = \sum_{i=1}^{NG} P_{Gi} - \sum_{j=1}^{NC} P_{CHj} - P_L \quad (7)$$

## PRINCIPE DES ALGORITHMES GENETIQUES

Les algorithmes génétiques tentent de simuler le processus d'évolution naturelle suivant le modèle darwinien dans un environnement donné. Ils utilisent un vocabulaire similaire à celui de la génétique naturelle. Cependant, les processus naturels auxquels ils font référence sont beaucoup plus complexes. On parlera ainsi d'individu dans une population. L'individu est composé d'un chromosome lui-même constitué de gènes qui contiennent les caractères héréditaires de l'individu.

Pour un problème d'optimisation donné, un individu représente un point de l'espace d'état. On lui associe la valeur du critère à optimiser, son adaptation. On génère ensuite de façon itérative des populations d'individus sur lesquelles on applique des processus de sélection, de croisement et de mutation. La sélection a pour but de favoriser les meilleurs éléments de la population, le croisement et la mutation assurent une exploration efficace de l'espace d'état [6].

On commence par générer aléatoirement une population initiale d'individus. Pour passer d'une génération k à la génération k+1, les trois opérations suivantes sont répétées pour tous les éléments de la population k.

La sélection permet d'identifier statistiquement les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais.

Le croisement est appliqué avec une probabilité  $p_c$  à deux éléments de la population (parents) qui sont alors transformés en deux nouveaux éléments (enfants) destinés à les remplacer dans la nouvelle génération.

La mutation est une modification qui intervient de manière aléatoire sur les gènes d'un individu, elle a pour rôle de maintenir une certaine diversité dans la population. Pour utiliser un AG sur un problème d'optimisation on doit donc disposer d'un principe de codage des individus, d'un mécanisme de génération de la population initiale et d'opérateurs permettant de diversifier la population au cours des générations et d'explorer l'espace de recherche [7].

## CODAGE DES VARIABLES

La première étape lors de l'application d'un AG à un problème est le choix du codage des paramètres sous la forme de chaînes maniabiles. La représentation choisie est primordiale car l'efficacité d'un AG dépend principalement de la manière dont elle capte les régularités de l'espace de recherche.

Historiquement le codage utilisé par les AG était représenté sous forme de chaînes binaires contenant toute

l'information nécessaire à la description d'un point dans l'espace d'état. Cependant, dans la majorité des problèmes, les paramètres sont à valeurs réelles et cette représentation implique la discrétisation des valeurs et donc une limitation au niveau de la précision. De plus pour des problèmes d'optimisation dans des espaces de grande dimension, le codage binaire peut rapidement devenir mauvais. En effet, l'ordre des variables a une importance dans la structure du chromosome binaire, alors qu'il n'en a pas forcément dans la structure du problème.

#### CODAGE BINAIRE

Nous codons les variables  $P_{Gi}$  par des chaînes binaires de 12 bits :

La chaîne 000000000000 code  $P_{Gi} = P_{Gi}^{\min}$

La chaîne 111111111111 code  $P_{Gi} = P_{Gi}^{\max}$

La transformation d'une chaîne binaire  $A = \{a_1, \dots, a_l\}$  en un nombre réel  $P_G$  peut alors s'exécuter en deux étapes :

- Conversion ( base 2  $\rightarrow$  base 10 )

$$P'_G = \sum_{i=1}^l a_i 2^{l-i} \quad (8)$$

- Recherche du nombre réel correspondant :

$$P_G = P_G^{\min} + P'_G \frac{P_G^{\max} - P_G^{\min}}{2^{l-1}} \quad (9)$$

$$\text{Où : } P_G^{\min} \leq P_G \leq P_G^{\max} \quad (10)$$

L'organigramme de l'AGs avec un codage binaire est représenté par la fig. 1.

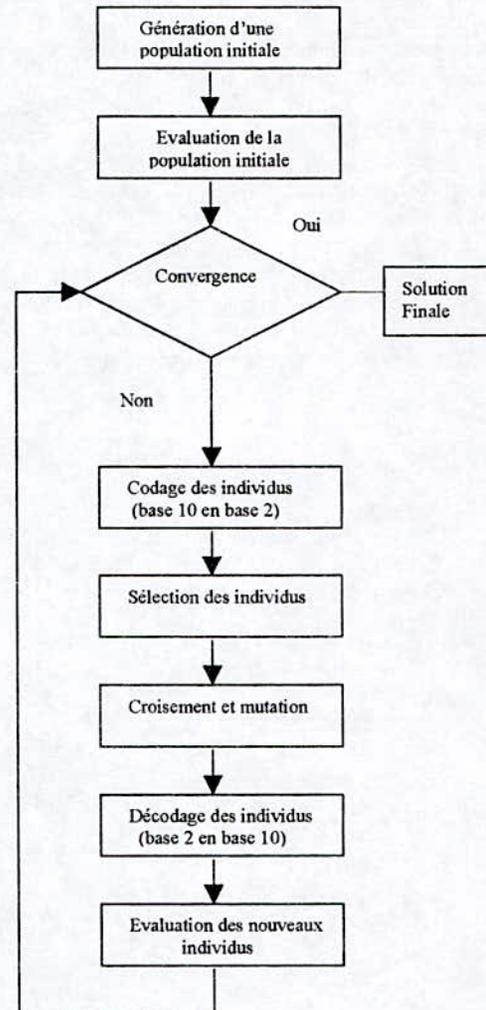


Fig. 1. Organigramme de l'AGs (codage binaire)

#### CODAGE REEL

De nombreuses versions modifiées des AG originaux ne se basent plus sur un codage binaire des paramètres à optimiser, mais travaillent directement sur les paramètres eux-même. Ces versions des AG, que nous appellerons AG codés-réels, offrent généralement l'avantage d'être mieux adaptées aux problèmes d'optimisation numérique continu, d'accélérer la vitesse de convergence et de rendre plus aisé le développement de méthodes hybrides avec des méthodes plus classiques.

Cependant, les AG codés-réels nécessitent le développement d'opérateurs spéciaux ( mutations, croisements etc.), fait sur mesure en fonction de l'application. L'utilisation du codage réel implique quelques modifications de l'algorithme [8].

Le croisement réel ne se différencie du croisement binaire que par la nature des éléments qu'il altère ce ne sont plus

des bits qui sont échangés à droite du point de croisement, mais des variables réelles [9].

Les opérateurs de croisement conventionnels peuvent bien sur être utilisés car ils n'ont rien de spécifique au codage binaire. Le croisement uniforme appliqué aux deux chaînes parents  $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6)$  et  $(b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6)$  en prenant aléatoirement le gène de l'un ou de l'autre peut donner par exemple les deux chaînes enfants  $(a_1; a_2; b_3; a_4; b_5; b_6)$  et  $(b_1; b_2; a_3; b_4; a_5; a_6)$ . Le type de croisement utiliser dans notre AG est le croisement arithmétique non uniforme [10]. Il effectue une simple combinaison linéaire entre deux parents Soit, après la sélection des deux parents  $P_1$  et  $P_2$ , deux nouveaux enfants (descendants) sont créés  $C_1$  et  $C_2$ .

$$C_1 = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2 \quad (11)$$

$$C_2 = (1 - \alpha) P_1 + \alpha P_2 \quad (12)$$

Où :  $\alpha$  est un chiffre généré aléatoirement. L'organigramme de l'AGs avec un codage réel est représenté par la fig. 2.

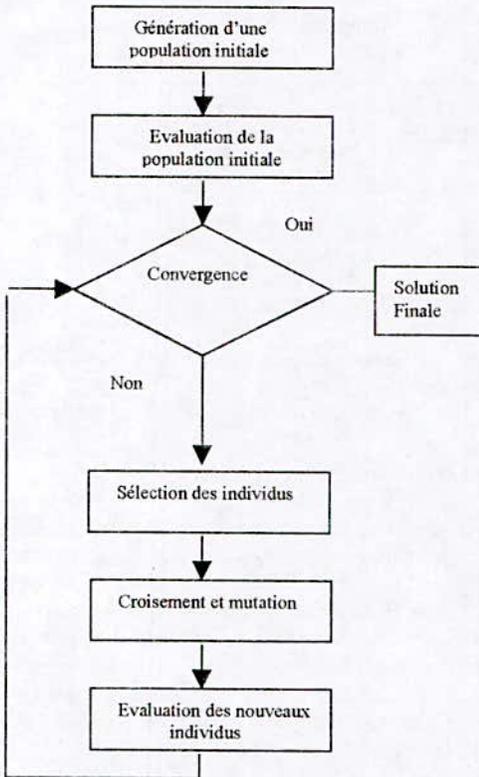


Fig. 2. Organigramme de l'AGs (codage réel)

ILLUSTRATION

L'AGs a été testé sur un réseau standard IEEE 25 nœuds [2].

Le réseau comporte 5 nœuds producteurs, dont les fonctions coûts exprimées en dollars par heures sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_1(P_{G1}) &= 0.0015 P_{G1}^2 + 1.8 P_{G1} + 40 \\
 F_2(P_{G2}) &= 0.0030 P_{G2}^2 + 1.7 P_{G2} + 60 \\
 F_3(P_{G3}) &= 0.0012 P_{G3}^2 + 2.1 P_{G3} + 100 \\
 F_4(P_{G4}) &= 0.0080 P_{G4}^2 + 2.0 P_{G4} + 25 \\
 F_5(P_{G5}) &= 0.0010 P_{G5}^2 + 1.9 P_{G5} + 120
 \end{aligned} \quad (13)$$

Les contraintes sur les puissances générées :

$$\begin{aligned}
 100 &\leq P_{G1} \leq 300 \\
 80 &\leq P_{G2} \leq 150 \\
 80 &\leq P_{G3} \leq 200 \\
 20 &\leq P_{G4} \leq 100 \\
 100 &\leq P_{G5} \leq 300
 \end{aligned} \quad (14)$$

Où : les puissances générées sont exprimées en MW.

La puissance apparente de base  $S_b = 100MVA$  et la tension de base est de 220kv.

La consommation totale est de 730 MW.

Les pertes totales actives obtenues par la méthode de Gauss-Seidel sont égales à 41.443 MW.

CHOIX DES PARAMETRES DE L'AGs CODAGE BINAIRE

Taille de la population initiale  $N_{pop}=30$ .  
 Probabilité de croisement :  $P_c = 0.75$   
 Probabilité de mutation :  $P_m = 0.06$   
 Nombre de générations :  $maxgen = 300$

CHOIX DES PARAMETRES DE L'AGs CODAGE REEL

Taille de la population initiale  $N_{pop}=30$ .  
 Probabilité de croisement :  $P_c = 0.8$   
 Probabilité de mutation :  $P_m = 0.08$   
 Nombre de générations :  $maxgen = 300$

Les résultats de calcul des puissances actives générées optimales, du coût minimal du combustible et du temps de calcul pour un AGs (codage binaire) sont donnés par le tableau 1.

Tableau 1  
Résultats de l'AGs (codage binaire)

$P_{G1}^{opt}$ (MW)	$P_{G2}^{opt}$ (MW)	$P_{G3}^{opt}$ (MW)	$P_{G4}^{opt}$ (MW)	$P_{G5}^{opt}$ (MW)	F (\$/h)	temps (s)
206.72	121.64	151.82	33.21	258.05	2011	4.78

La représentation de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations est donnée par la fig. 3.

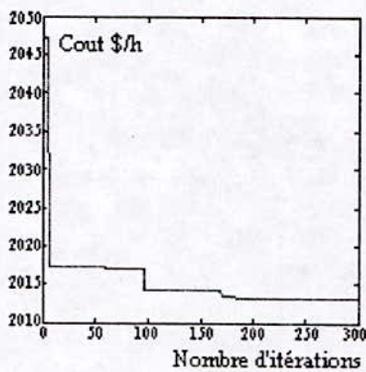


Fig. 3 Variation du coût en fonction du nombre d'itérations (codage binaire)

Les résultats de calcul des puissances actives générées optimales, du coût minimal du combustible et du temps de calcul pour un AGs (codage réel) sont donnés par le tableau 2.

Tableau 2  
Résultats de l'AGs (codage réel)

$P_{G1}^{opt}$ (MW)	$P_{G2}^{opt}$ (MW)	$P_{G3}^{opt}$ (MW)	$P_{G4}^{opt}$ (MW)	$P_{G5}^{opt}$ (MW)	F (\$/h)	temps (s)
213.68	127.46	141.93	29.53	258.86	2010.8	1.60

La représentation de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations est donnée par la fig. 4.

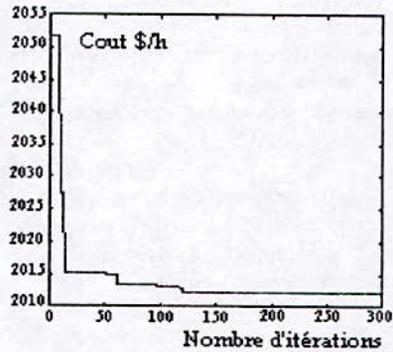


Fig. 4 Variation du coût en fonction du nombre d'itérations (codage réel)

#### TABLEAU RECAPITULATIF

Nous avons comparé les résultats obtenus par l'AGs (codage binaire, codage réel) avec deux techniques conventionnelles basées sur la programmation non linéaire. La méthode Quasi-Newtonienne de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) et la méthode des coûts marginaux [1] (Tableau 3).

Tableau 3  
Tableau récapitulatif

	AG codage réel	AG codage binaire	BFGS	coûts marginaux
$P_{G1}^{opt}$ (MW)	213.68	206.72	211.30	130.81
$P_{G2}^{opt}$ (MW)	127.46	121.64	126.30	129.99
$P_{G3}^{opt}$ (MW)	141.93	151.82	151.29	200.00
$P_{G4}^{opt}$ (MW)	29.53	33.21	71.24	100.00
$P_{G5}^{opt}$ (MW)	258.86	258.05	211.31	210.65
F (\$/h)	2010.8	2011.0	2029.3	2070.4
temps (s)	1.60	4.78	0.0	0.04

D'après les résultats obtenus on remarque que :

- Les deux types de codage ont donnés pratiquement le même coût optimal. Une légère différence au niveau des puissances générées optimales.
- Le codage réel a permis d'accélérer le temps de convergence de l'AG.
- Le temps de convergence des deux méthodes BFGS et la méthode des coûts marginaux est très petit par rapport à l'AGs, mais le coût optimal est nettement supérieur.

### CONCLUSION

Les résultats trouvés confirment bien la validité et l'efficacité du codage réel par rapport au codage binaire. L'application de AGs dans la répartition optimale des puissances actives a donné des résultats très satisfaisants par rapport aux techniques conventionnelles (BFGS et coûts marginaux) du point de vue coût minimisé, de plus l'avantage de l'AGs est que la population initiale est aléatoire, par contre les autres méthodes déterministes basées sur la programmation non linéaire nécessitent un choix des conditions initiales.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Chaker, H. Bouzeboudja  
" Optimisation des puissances actives »  
Colloque maghrébin sur l'analyse  
Numérique, Casablanca, Novembre 1996
- [2] R. B. Gungor, N. F. Tsang, B. Webb  
" A technique for optimizing real and  
reactive power schedules " IEEE  
Trans on Pas 90, p. 1781-1790, 1971.
- [3] Gerald B. Sheble, Kristin Brittig  
" Refined Genetic Algorithm – Economic  
Dispatch Exemple " IEEE  
Transactions on Power Systems, Vol. 10,  
N°.1, February 1995
- [4] Michel Minoux: " Programmation  
Mathématique théorie et Algorithmes ".  
Tome I. Dunod, 1983.
- [5] Benjamin W. Wah, Yi-Xin Chen  
" Constrained Genetic Algorithms and  
their Applications in Non-linear  
Constrained Optimization" Proc. 12<sup>th</sup>  
International Conference on Tools  
Artificial intelligence, November 2000.
- [6] Francisco Herrera, Manuel Lozano  
" Gradual Distributed Real-Coded Genetic  
Algorithms" IEEE Transactions on  
Evolutionary computation, Vol. 4,  
N°. 1, April 2000
- [7] Principe mathématique et utilisation des algorithmes  
génétiques.  
w3.toulouse.inra.fr/Centre/esr/CV/bontemps/WP-  
AlgoGene.html
- [8] D. E. GOLD BERG « AG exploration.  
Optimisation et apprentissage automatique »  
Edition Addison Wesley France 1991
- [9] A. Khiat & B. Sefiane « algorithmes  
génétiques »  
<http://www-chez.com/psodu>
- [10] Michalewicz Z. (1992).  
"Genetic Algorithms + Data Structures =  
Evolution Programs".  
New York: Springer Verlag, 1992.

## Step by step FEA analysis of Brushless Permanent Magnet Motor

K. Bouhrara\*, R. Ibtouen\*, O. Touhami\*

\* Ecole Nationale Polytechnique (ENP)

Laboratoire de Recherche en Electrotechnique

BP 182 El-Harrach 16200

Algiers Algeria

E-mail: bouhrarakamel@yahoo.fr

**Abstract**—The aim of this paper is to present a step by step numerical method based on FEA allowing the effective computation of the steady state electromagnetic field in brushless permanent magnet machine. The approach consists in writing the Maxwell model equations, using the magnetic vector potential (MVP) field as state variable in the stator region in its reference frame, and in the rotor region in its reference frame. Next the two MVP fields, the rotor and the stator fields, are connected in such a way that the rotational motion is taken into account by an iterative under-relaxation method. The coupling is carried out by all harmonics in the two air gaps of rotor and stator contrarily of the first harmonic method which is used only for induction motors.

**Index Terms**—FEA, double air gap, Movement, Numerical method, permanent magnet motor.

### I. INTRODUCTION

Permanent magnet motors are challenging the monopoly of induction machines in many applications such as pumps and compressor.

To compute a synchronous motor this is a very powerful method because the field only depends on the angular position between the rotor and the stator and the diffusive aspect vanishes. On the contrary the computation of the induction motor needs a very heavy time discretisation to take into account simultaneously the "low speed" of the diffusion and the "high speed" of the motion control [1]. The difficulty of the numerical computation of the electrical machines fields is to take account of the movement between the rotor and the stator. To deal with this difficulty the time stepping method is often used. During a time step several possibilities can be used for connecting the rotor and stator mesh in the air gap. These methods are very powerful because they allow electrical and mechanical transients as well as magnetic non linearities. However their approaches for coupling introduces zero elements in the diagonal of the stiffness

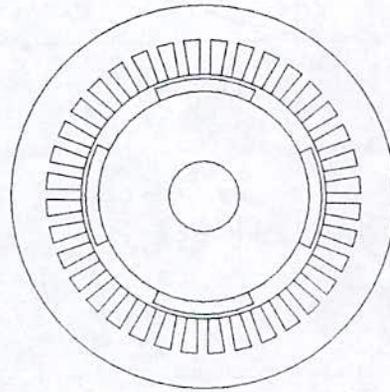


Fig. 1 Machine studied [4]

matrix [2], or causes a dense one [3] and different solvers – iterative and direct- are used.

In this work we present an alternative method that can describe the steady state of the synchronous machine.

The basic idea of this approach is to compute the MVP field with non linearities simultaneously with the coupling of the stator and rotor by an under relaxation method. We will begin the paper with the equations of the permanent magnet motor and develop the finite element analysis whose approximation basis is the classic Lagrange P1 triangles.

### II. NUMERICAL STUDY MODEL

To get the principal geometrical parameters (Fig. 1), we use the following assumptions:

- Two-dimensional study model.
- The permanent magnets present a radial and rigid magnetization  $M$  and their permeability is quite  $\mu_0 (4\pi 10^{-7} \text{H/m})$  [4].

Ferromagnetic materials in the stator and rotor have the real permeability defined by their curve approximated by the formula of MARROCCO (Fig. 2)

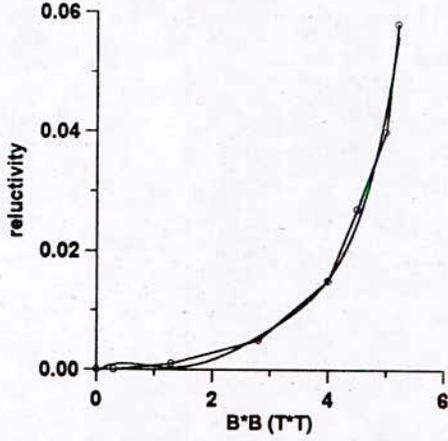


Fig. 2 Reluctivity in calculated and experimental curve

$$\nu(B^2) = \nu_0 \left[ \xi + (C - \xi) \frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + \tau} \right] \quad (1)$$

With  $\nu = \frac{H}{B}$

In these conditions, the magnet is replaced by a continuous and isotropic region having the same permeability ( $\mu_0$ ). The magnet magneto-motive force, which is distributed over the magnet height, is replaced by a series of infinitesimal current sheets  $j_s$  located in the air, along both sides of magnet height with:

$$j_s = \pm \frac{M}{\mu_0} \quad (2)$$

The work is done in a transverse section using the one component magnetic vector potential (MVP) field as a state variable. As we only describe the steady state, the rotational speed,  $\Omega$ , of the rotor does not depends on time. We can define the rotor region  $\Omega_r$  and the stator region  $\Omega_s$ , each being associated with a frame of reference in which they are fixed. To separate these two reference frames, we adopt the following notation:  $x$  ( $x'$ ) indicates the position in the frame of reference of the stator (the rotor) anywhere in the  $R^2$  plane. The relation between  $x$  and  $x'$  is symbolically noted by:

$$x = x' + \Omega t \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x' + \Omega t \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega t \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

The MVP equations of the Maxwell model analysis are written as follow:

$$\nabla \left( \frac{1}{\mu_s} \nabla a_s \right) + j = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla a_r \right) + j_s = 0 \quad (5)$$

Where the nabla operator  $\nabla$  is referenced to its variables ( $x$  or  $x'$ ),  $j$  is the current density in the stator,  $\mu_s$  ( $\mu_r$ ) the magnetic permeability, is a function of the position  $x$  in  $\Omega_s$  and  $x'$  in  $\Omega_r$ . In the finite element context, equations (4) and (5) can be written in the matrix form:

$$\{S_r\} \{A_r\} = [F_r] \quad \text{For the rotor}$$

$$\{S_s\} \{A_s\} = [F_s] \quad \text{For the stator}$$

Where  $S_r$  and  $S_s$  are the stiffness matrix.

A non linear magnetostatic resolution problem is transformed to a successive linear magnetostatic one through an iterative algorithm.

To use Esq. (4) and (5) effectively the connection between  $a_r$  and  $a_s$  must be stated. If  $\Omega_r$  and  $\Omega_s$  had a common boundary  $\Gamma$  then the connection would be

$$a_s(\theta, t) = a_r(\theta', t) \quad \text{On } \Gamma \quad (6)$$

$$\frac{1}{\mu_s} \frac{\partial a_s(\theta, t)}{\partial n} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial a_r(\theta', t)}{\partial n} \quad \text{On } \Gamma \quad (7)$$

Where  $n$  is a normal field on  $\Gamma$ , oriented outward from  $\Omega_r$ .

Equations (6) and (7) ensure the continuity of the MVP and its weighted normal derivative.

- Firstly, if  $\Omega_r$  and  $\Omega_s$  are bounded to the rotor and stator the Esq. (6) and (7) can be derived from an explicit statement of the air gap by using the macro-element, the boundary elements or a remeshment method.

- Secondly, if  $\Omega_r$  and  $\Omega_s$  are effectively connected by the boundary  $\Gamma$  any where in the air gap then Esq. (6) and (7) can be derived from the slip surface method. In this method the air gap is included both in the rotor and in the stator. In this way the connections (6) and (7) come from (Fig. 3).

$$a_s(\theta, t) = a_r(\theta', t) \quad \text{on } \Gamma_r \quad (8)$$

$$a_s(\theta, t) = a_r(\theta', t) \quad \text{on } \Gamma_s \quad (9)$$

Where  $\Gamma_r$  and  $\Gamma_s$  are the boundaries of the air gap.

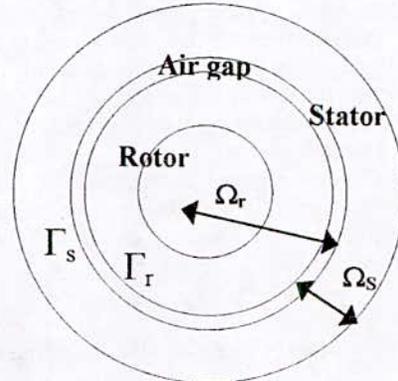


Fig. 3 Geometry (the air gap is zoomed and the slots are not represented).

In the above, Esq. (8) and (9) represents the continuity of magnetic potential at each adjacent nodes of boundaries  $\Gamma_r$  and  $\Gamma_s$ .

In the case of non-regular angle of rotation, each node of stator or rotor in  $\Gamma_r$  and  $\Gamma_s$  is coupled to the nodes in an adjacent element by applying in the system of equations the given constraints on the interfaces.

In the stator problem the constraint is:

$$A_s^i = \frac{z_i - z_k}{z_j - z_k} A_r^j + \frac{z_i - z_j}{z_k - z_j} A_r^k \quad (10)$$

In the rotor problem the constraint is:

$$A_r^i = \frac{z_i - z_k}{z_j - z_k} A_s^j + \frac{z_i - z_j}{z_k - z_j} A_s^k \quad (11)$$

Where  $z_i$ ,  $z_j$  and  $z_k$  are the angles of nodes  $i$ ,  $j$  and  $k$ .

Esq. (10) and (11) are compatible with the usual shape function of the finite element method evaluated at each node of the interfaces  $\Gamma_r$  and  $\Gamma_s$ .

### III. THE FIRST HARMONIC METHOD

Now we consider a permanent magnet motor for which the first spatial harmonic is higher than the other in the air gap. Formally, the first harmonic method is a classical computation of a virtual MVP field with the constraint that the MVP in the rotor vanishes on the stator boundary and the MVP in the stator vanishes on the rotor boundary, except the fundamental  $p$ -order harmonic. Practically, by considering that both the regions  $\Omega_r$  and  $\Omega_s$  involve the air gap and then the exterior boundary of  $\Omega_r$  is  $\Gamma_s$ , the interior boundary of  $\Omega_s$  is  $\Gamma_r$ , the problem can be divided into:

#### A. The problem of the rotor.

Avoiding harmonics through the air gap, the MVP  $a_r$  becomes

$$a_r(R_s, \theta', t) = \text{Real}[A_s(R_s, \theta) \exp(-jp\theta p)] \quad (12)$$

On  $\Gamma_s$ ;

$$\text{Where: } A_s(R_s, \theta) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_s(R_s, \theta) \exp(jp\theta) d\theta$$

#### B. The problem of the stator.

In the same way, the MVP  $a_s$  is approximated as

$$a_s(R_r, \theta, t) = \text{Real}[A_r(R_r, \theta') \exp(-jp\theta p)] \quad (13)$$

On  $\Gamma_r$ ;

$$\text{Where: } A_r(R_r, \theta') = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_r(R_r, \theta') \exp(jp\theta') d\theta'$$

In the same way, the coupling of rotor and stator problems when the angle of rotation is not multiple of the angular mesh is done by applying the constraints (10) and (11).

### C. Steps of the resolution

The system of equations in rotor (5) and in stator (4) with double air gap coupling is solved with a relaxation method as:

1. First, set initial value of  $a_r(p, t)$  at  $t=0$ .
2. Calculation of  $a_r(p, t)$  in  $\Omega_r$  space.
3. Calculation of the boundary condition  $a_s(p, t)$ .
4. Calculation of  $a_s(p, t)$  in  $\Omega_s$  space.
5. Calculation of boundary condition  $a_r(p, t)$ .
6. If  $|a_r^1(p, t) - a_r^0(p, t)| < \xi$  then set  $t+\Delta t$  Else set  $a_r^0(p, t) = a_r^1(p, t)$  and return to step 2).
7. After the convergence of  $a_r$  and  $a_s$ , Flux density, torque and emf are determined.
8. The calculation process from 2) to 6) continues until the steady state is obtained.

### IV. RESULTS AND DISCUSSION

The four pole machine dimensions which are kept constant for the computed example are [4]:

Rotor outer radius: 58.5 mm

Stator outer radius: 95 mm

Stator or rotor axial length: 76 mm

Stator inner radius: 60.4 mm

Magnet depth: 6.3 mm

Angular width of magnet: 50 mechanical degrees

Number of turns in the slot: 20

Rated current: 15 A

Stator had three phases single winding layer and 36 slots with four mechanical degrees width. The average remanence of Nd Fe Br permanent magnet is 1 T and unity relative recoil permeability.

Fig. 4 represents the magnetic potential distribution due to magnets at no load in the motor. The flux density for this position of the rotor is shown in the Fig. 5. The air gap magnetic field density obtained numerically (Fig. 5) and analytically [5] is in good agreement.

Fig. 6. shows a comparison between the coupling with all harmonics and with the first harmonic method.

Fig. 7 shows the cogging torque for one slot pitch.

The developed method provides valuable information in evaluating of motor performances. Knowledge of the field density will not only allow rated performance calculation but also calculation of effects such as cogging torque (Fig. 7 and 8), ripple torque (Fig. 9), Flux (Fig. 10) and back-emf shape (Fig. 11 and 12), etc.

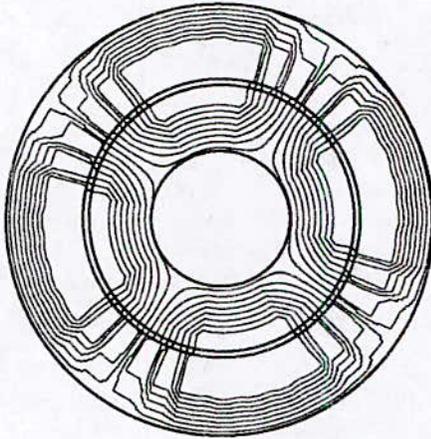


Fig. 4 Lines of potentials in the geometry at the initial position.

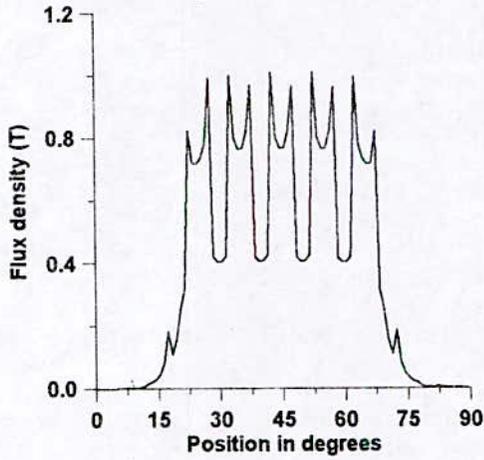


Fig. 5 Flux density at no load at stator surface for one pole pitch.

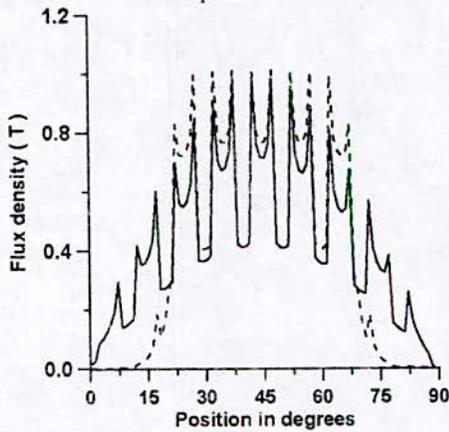


Fig. 6 Flux density at no load at stator surface with the first harmonic method for one pole pitch.

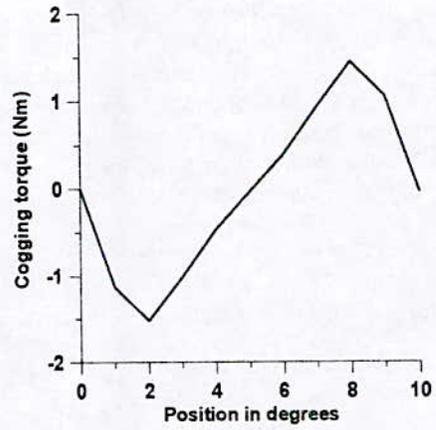


Fig. 7 Cogging torque.

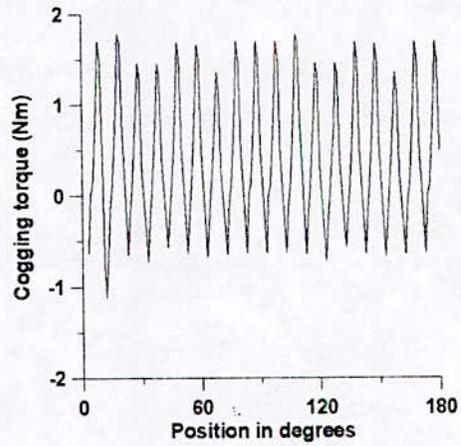


Fig. 8 Cogging torque.

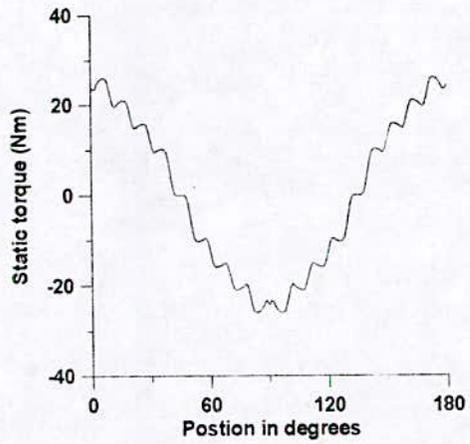


Fig. 9 Static torque with two phases on load.

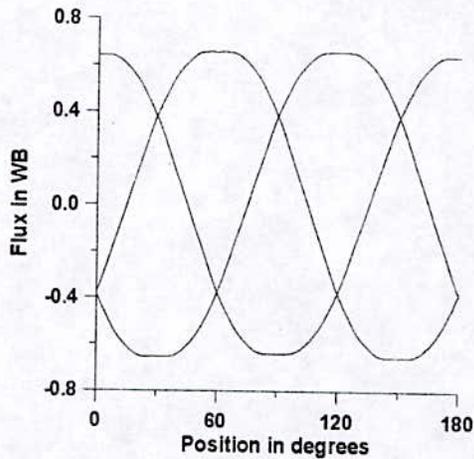


Fig. 10 Flux at no load

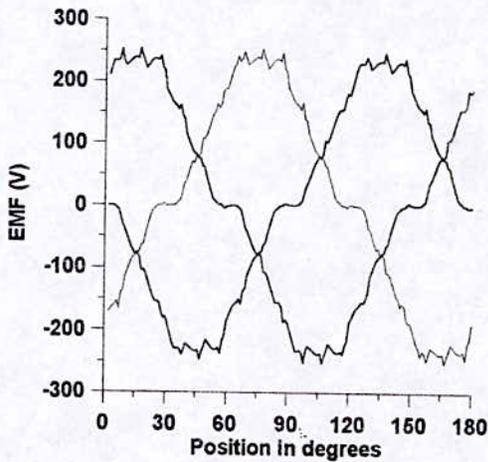


Fig. 11 Emf at no load

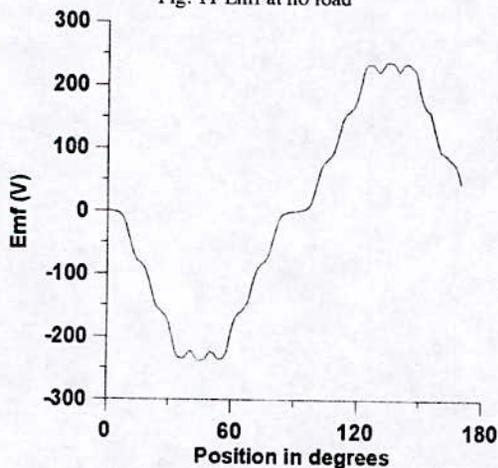


Fig. 12 Emf with tow phases on load

## V CONCLUSION

This paper has described an improved numerical method to analyse brushless permanent magnet synchronous motors with taking into account of the saturation of iron materials and the movement. This method for coupling rotor and stator has been used in the complex finite element modelling with the harmonics one by one with difficulty to take the saturation effect into account by Laporte and all but not in the step by step non linear finite element analysis and all harmonics simultaneously.

## REFERENCES

- [1] G. Vinsard and B. Laporte, "A New Formulation for Induction Machine Computation," *IEEE Trans. Mag.*, vol. 30, no. 5, September, 1994, 3693-3696.
- [2] D. Rodger, H. C. Lai, P. J. Leonard, "Coupled Elements For Problems Involving Movement", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 26, no. 2, March, 1990, 548-550.
- [3] A. A. Abdel-Razek, J. L. Coulomb, F. Feliachi, J. C. Sbonnadière, "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. Mag-18, no. 2, March, 1982, 665-659.
- [4] C. Mi, G. R. Slemon, R. Bonert "Modelling of Iron Losses of Permanent-Magnet Synchronous Motors", *IEEE Trans. On Industry Applications*, vol. 39, no. 3, May/June 2003, 734-742.
- [5] K. Bouhrara, R. Ibtouen, "Calcul d'une machine synchrone à aimants permanents par la méthode des éléments finis en tenant compte du mouvement", *Journées Internationales d'Etudes sur les Sciences Marines, J' NESMA-99, Tamentfoust-Alger 29-31 Mai 1999.*

## Modélisation Magnéto-Thermique d'un Moteur à Induction

S. Laïssaoui, D. Sedira, A. Ladjimi et M.R. Mékidèche  
 Laboratoire d'études et de modélisation en électrotechnique, Université de Jijel (L.A.M.E.L).  
 BP 98 - Ouled Aïssa-Jijel 18000 - Algérie  
 e-Mail: [sihemlaïssaoui@yahoo.fr](mailto:sihemlaïssaoui@yahoo.fr)

**Résumé** – Ce travail présente un modèle bidimensionnel basé sur la méthode des éléments finis qui évalue les solutions électromagnétique et thermique pour un moteur à induction en utilisant un algorithme de couplage entre ces deux phénomènes. Afin d'améliorer la précision de la formulation numérique adoptée on a pris en considération la dépendance de la conductivité électrique de la température. La distribution des sources de chaleur est calculée par la résolution du problème magnétodynamique avec source de tension qui prend en compte la saturation.

**Mots clés:** Equations du champ, équations de circuit, analyse thermique, pertes, échauffement

### I. INTRODUCTION

Dans l'étude des dispositifs électromagnétiques, en particulier les machines électriques, il est important d'étudier les comportements électromagnétique et thermique conjointement [1][2]. Deux interactions justifient ce point de vue.

- La majorité des sources de chaleur responsables des dispositifs en électrotechnique sont d'origine électromagnétique.
- La température affecte les propriétés physiques des matériaux. Par conséquent, cette dépendance influence le champ électromagnétique d'une façon directe ou indirecte. Prenons à titre d'exemple, la conductivité électrique qui varie de 30 % sur un intervalle de 100°C qui représente la plage usuelle de température propre aux machines électriques.

Ce travail présente l'implémentation d'un problème électromagnétique thermique couplé. Afin d'estimer l'impact du champ de température sur le fonctionnement des moteurs à induction, une étude comparative est effectuée entre deux modèles élaborés : le premier modèle prend en considération ce champ alors que le deuxième le néglige.

### II. PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE

La distribution des sources de chaleur est évaluée en résolvant le problème magnétodynamique avec source de tension en prenant en considération la rotation du rotor ainsi que le comportement non linéaire des parties ferromagnétiques.

#### a. Equations du champ

Une formulation magnétodynamique complexe est adoptée :

$$\begin{cases} \nabla \times (\nu \nabla \times A) = J_{ex} & \text{dans le stator} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A) = 0 & \text{dans l'entrefer} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A) + j\omega_s g \sigma_g + \sigma_g \nabla V = 0 & \text{dans le rotor} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A) = 0 & \text{dans les parties ferromagnétiques} \\ A = 0 & \text{aux limites de la machine} \end{cases} \quad (1)$$

avec

$A$ : Le potentiel vecteur,  $J$ : La densité de courant de l'inducteur,  $\nu$ : La reluctivité,  $\sigma$ : La conductivité électrique,  $V$ : Le potentiel scalaire,  $\omega_s$ : La pulsation de la source,  $g$ : Le glissement.

La formulation en éléments finis des équations du champ est donnée par les systèmes d'équations suivantes :

$$\begin{cases} [S][A] - [P][i_{enc}] = 0 & \text{dans le stator} \\ [S][A] = 0 & \text{dans l'entrefer} \\ [S][A] + j\omega_s g [G][A] = 0 & \text{dans le rotor} \\ [S][A] = 0 & \text{dans le fer} \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$S_{ij} = l \iint_{\Omega} \nu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$$

$$P_i = \frac{l N_{cond}}{S_{cu}} \iint_{\Omega} N_i d\Omega$$

$$G_{ij}^* = l \sigma \iint_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$[i_{enc}]$ : Vecteur du courant d'encoche,  $l$ : Longueur active de la machine,  $N_{cond}$ : Nombre de brins,  $S_{cu}$ : Surface utile en cuivre de l'encoche.

#### b. Equations des circuits

Le terme source est imposé dans la formulation éléments finis à travers les équations de circuit de l'enroulement statorique (Fig.1). De ce fait, les équations électriques régissant le circuit de l'enroulement statorique écrites sous forme matricielle sont données :

$$[U_i] = [R_{ste}] [i_{ph}] + j\omega_s [L_{ste}] [i_{ph}] + [\Delta V_i], \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

avec

$[R_{ste}]$ : La matrice des résistances des têtes de bobines,

$[L_{ste}]$ : La matrice des inductances des têtes de bobines,

$[\Delta V_i]$ : Le vecteur de la différence de potentiel entre les bornes des conducteurs constituant une phase ' $i$ ',  $[i_{ph}]$ : le vecteur des courants de phase,  $[U]$ : Le vecteur des tensions de phase.

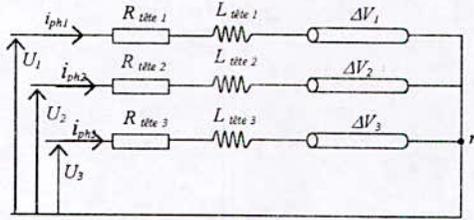


Figure.1 Stator equivalent circuit

Les différences de potentiels  $[\Delta V]$  peuvent s'écrire en fonction du potentiel vecteur  $A$  en écrivant la loi d'Ohm pour chaque phase.

$$[\Delta V] = [R_{\text{active}}][i_{ph}] + j\omega_s [C][P]^T [A] \quad (4)$$

$[R_{\text{active}}]$ : Matrice des résistances de la partie active des enroulements (sans la résistance des têtes de bobines).

En substituant l'équation (4) dans l'équation (3) qui représente l'équation du circuit du stator, on obtient:

$$\frac{[U]}{j\omega_s} = [R_{ph}][i_{ph}] + [L_{\text{tête}}][i_{ph}] + [C][P]^T [A] \quad (5)$$

avec

$[R_{ph}]$ : La matrice de la résistance totale des phases.

$$[R_{ph}] = ([R_{\text{tête}}] + [R_{\text{active}}]) / j\omega_s$$

Les équations électriques du rotor ne sont pas construites car nous allons supposer que les extrémités du rotor sont des surfaces équipotentielles du potentiel scalaire  $V$ .

### c. Couplage des équations du champ et celles des circuits

Les équations du champ et les équations des circuits sont résolus simultanément [3][4].

Matrice magnétique  $\downarrow$  Matrice de couplage

$$\begin{bmatrix} [S(A)] & -[P][C]^T \\ -[C][P]^T & [R_{ph}][L_{\text{tête}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [i_{ph}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [U] \end{bmatrix} / j\omega_s \quad (6)$$

Matrice de couplage  $\uparrow$  Matrice électrique

La non linéarité de la reluctivité  $\nu$  par rapport à l'induction rend la matrice  $[S]$  non linéaire. Alors la résolution du système matriciel non linéaire (6) s'effectue par la méthode du point fixe.

Les pertes de puissance qui constituent en fait, des sources de chaleur sont essentiellement les pertes par effet joule déduites des courants dans le stator et le rotor ainsi que les pertes magnétique dans le fer.

$$\begin{cases} q_{\text{stator}} = \frac{J_{\text{stator}}^2}{\sigma_{\text{cu}}} \\ q_{\text{rotor}} = \frac{\sigma_{\text{fer}} (J_{\text{rotor}} \cdot J_{\text{rotor}}^*)}{2 \sigma_{\text{fer}}} = \frac{\sigma_{\text{fer}} \omega^2 A A^*}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Les pertes dans le fer sont calculées en utilisant la formule de Steinmetz [5].

$$q_{\text{hys}} = C_{\text{hys}} f B^{\eta_{\text{hys}}} \quad (8)$$

avec

$B$ : L'amplitude du champ magnétique,  $C_{\text{hys}}$ ,  $\eta_{\text{hys}}$ : Les coefficients de l'hystérésis.

### III. PROBLEME THERMIQUE TRANSITOIRE

Les dissipations  $q$  d'origine électromagnétique constituent le deuxième membre de l'équation thermique. Le transfert de chaleur au sein de la machine est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q & \text{dans tout le domaine} \\ -\frac{\lambda \partial T}{\partial n} = (h_c + h_r)(T_p - T_{\text{ref}}) & \text{aux frontières} \end{cases} \quad (9)$$

avec

$T$ : La température,  $\rho$ : La masse volumique,  $C_p$ : La capacité thermique massique,  $\lambda$ : La conductivité thermique,  $h_c$ : Le coefficient de convection,  $h_r$ : Le coefficient de rayonnement,  $T_a$ : La température ambiante,  $n$ : Le vecteur normal à la frontière.

La formulation en éléments finis du problème thermique en tenant compte des échanges radio-convectif aux limites est donnée par le système matriciel suivant [6] :

$$[K] \frac{\partial [T]}{\partial t} + [M][T] = [F] \quad (10)$$

avec

$[K]$ : La matrice de la capacité thermique,  $[M]$ : La matrice de la conductivité thermique,  $[F]$ : Le vecteur des sources de chaleur.

$$K_{ij} = \rho C_p \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega, \quad M_{ij} = \lambda \iint_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$$

$$M_{ij} = (h_c + h_r) \int_{\Gamma} N_i N_j d\Gamma, \quad F_i = q \iint_{\Omega} N_i d\Omega$$

$$F_i = (h_c + h_r) \int_{\Gamma} N_i T_{\text{ref}} d\Gamma$$

Les résistances de contact ainsi que les minces couches isolantes sont considérées dans le modèle thermique transitoire dans le but d'obtenir une distribution de température réaliste [7]. Dans les machines électriques, elles peuvent être localisées dans différents endroits :

- **Contact entre la carcasse et les tôles du stator.** Le fer du stator et la carcasse sont assemblés sous pression mécanique. A cause de la rugosité de ces surfaces assemblées, des interstices remplis de fluide (*air*) existent et induisent une résistance thermique non négligeable à la traversée de la chaleur. Dans notre modèle cette résistance a été intégrée dans le coefficient d'échange avec l'extérieur.
- **Couche isolante:** La couche de l'isolant des encoches du stator ne doit pas être négligée dans n'importe quelle étude thermique afin de choisir la classe d'isolation adéquate d'une machine pendant sa conception. La conductivité équivalente propre aux bobinages est calculée en utilisant une formule d'homogénéisation dite de Götter :

$$\lambda_{\text{eq},c} = \lambda_{\text{iso}} \left( \frac{d_{\text{tot},c}}{d_{\text{iso}}} + \frac{d_{\text{iso}}}{d_c} \right) \quad (11)$$

avec

$d_{tot.c}$  : Le diamètre total du conducteur,  $d_c$  : Le diamètre du conducteur (sans isolant),  $d_{iso}$  : L'épaisseur de l'isolant.

- *Contact entre les barres et les tôles du rotor*: Les barres de la cage d'écuriel ont une résistance thermique de contact très dépendante de leur mode de construction (barres moulées ou insérées).
- *Contact entre l'arbre et le rotor*: Ce contact est modélisé en utilisant la méthode des matériaux équivalents. La conductivité équivalente se déduit en égalisant la combinaison de la résistance thermique de contact et de la résistance thermique de l'arbre caractérisé par un rayon  $r$  à une autre équivalente de même dimension caractérisée par une conductivité  $\lambda_{eq}$ .

$$\lambda_{eq} = \frac{1}{(1/\lambda) + (2/h_{co} r)} \quad (12)$$

L'entrefer est le siège d'un écoulement de rotation. Pour notre machine le nombre de Taylor est inférieur à 1700, l'écoulement étant laminaire le transfert de chaleur s'effectue donc par conduction. De ce fait au niveau de la modélisation, l'entrefer peut être caractérisé par les propriétés thermiques de l'air.

La table 1 collecte la conductivité thermique des différents organes constituant la machine.

Région	$\lambda [W m^{-1} K^{-1}]$
Bobinage du stator	1,8168
Cage du rotor	204
Parties ferromagnétiques	34
Entrefer	0,024
Arbre	20

Table. 1 : Données du problème thermique.

#### IV. PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE THERMIQUE COUPLE

Un couplage faible entre les problèmes électromagnétique et thermique est adopté. Afin d'obtenir la solution du problème couplé deux approches sont optées :

- Le premier est basé sur la résolution successive des deux problèmes avec une mise à jour de la relucivité, la chaîne de calcul est à refaire jusqu'à l'obtention du régime permanent thermique (Figure.2).
- Le deuxième est aussi basé sur la résolution séquentielle des deux problèmes électromagnétique et thermique, mais cette fois-ci, en effectuant une mise à jour sur la relucivité et la température jusqu'à atteindre le régime permanent thermique (Figure.3).

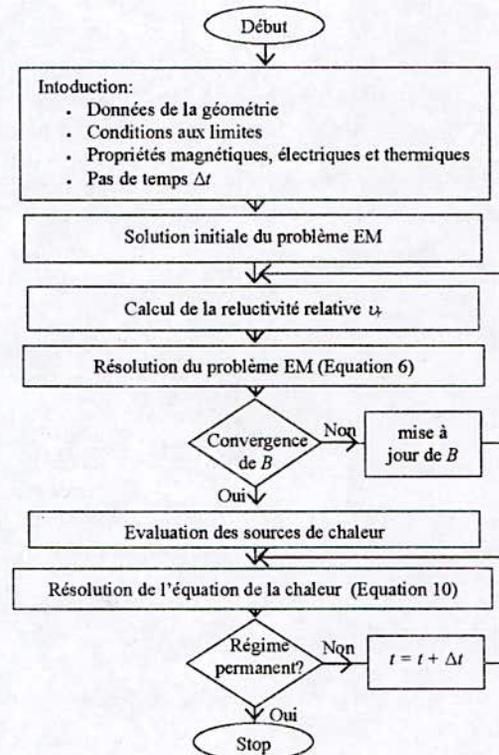


Figure.2 Algorithme de calcul du premier modèle

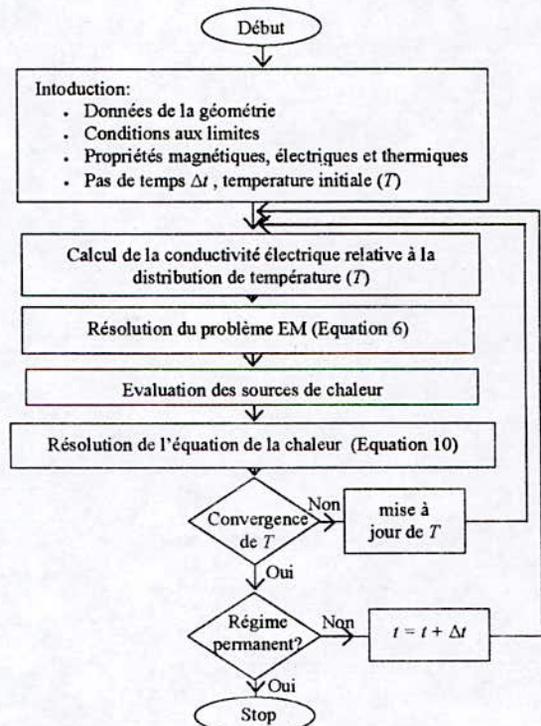


Figure.3 Algorithme de calcul du deuxième modèle

## V. RESULTATS

Le dispositif choisi pour appliquer les modèles élaborés précédemment est un moteur asynchrone bipolaire. La figure(4) représente le maillage éléments finis du domaine d'étude utilisé pour les deux problèmes électromagnétique et thermique. Le maillage contient 30286 éléments.

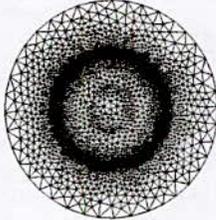


Figure.4 Maillage elements finis

Une fois les deux problèmes couplés convergent, les solutions des deux modèles sont obtenues.

La variance entre les deux modèles est significative, elle représente une différence de 4°C (figure.5)

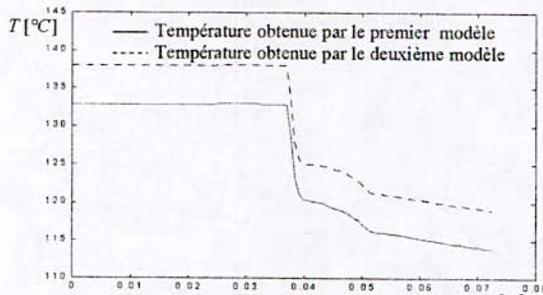


Figure.5 Variation de la température suivant le rayon de la machine

Afin d'analyser l'effet de la dépendance de la conductivité de la température ainsi que la contribution des pertes fer aux échauffements de la machine, un tableau comparatif a été dressé.

	$T_{Max}$ [°C]
Sans pertes fer, conductivité électrique constante	128,86
Sans pertes fer, conductivité électrique dépendante de $T$	132,5
Avec pertes fer, conductivité électrique constante	134
Avec pertes fer, conductivité électrique dépendante de $T$	138

Table.2 Points chauds de la machine

La tension et le courant circulant la première phase obtenus en considérant la dépendance de la conductivité de la température sont indiqués sur la figure 6.

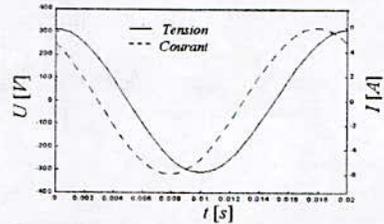


Figure.6 Courant et tension de la première phase

Les lignes équipotentielles de la partie réelle du potentiel vecteur  $A$  sont représentées sur la figure 7.

Figure.7 Lignes équipotentielles de la partie réelle du potentiel vecteur à  $g= 5\%$ 

La figure 8 décrit la carte de température du moteur après 5heures de marche.

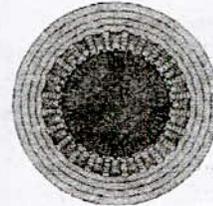


Figure.8 Carte de température du moteur à induction

On observe que le point chaud de la machine se situe au niveau de l'arbre. En effet, la température de la machine décline au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'arbre et que l'on se dirige vers l'extérieur (Figure9).

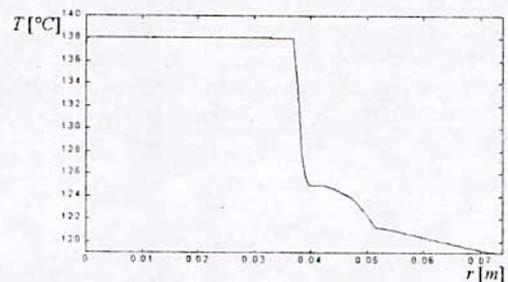


Figure.9 Variation de la température suivant le rayon de la machine

L'évolution des températures pour différents organes du moteur pendant le régime transitoire thermique est décrite sur la figure 10.

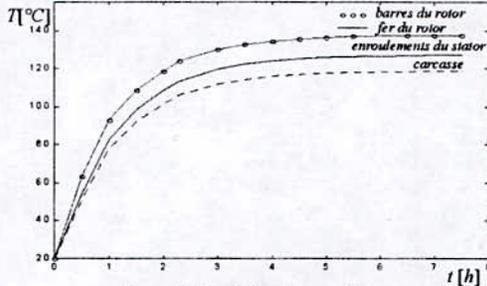


Figure.10 Evolution des températures pour différents organes du moteur

## VI. CONCLUSION

Dans une étude du comportement des machines électriques, l'effet de la température ne doit pas être négligé afin de diminuer sensiblement tout risque extrême de détérioration de leurs parties sensibles en particulier l'isolation des enroulements statoriques, au cours de leur fonctionnement.

## VII. REFERENCES

- [1] J.P. Bastos, M.F.R.R. Cabreira, N. Sadowski, S.R. Arruda, 'A thermal analysis of induction motors using a weak coupled modeling', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33, n°2, pp. 1714-1717, March 1997.
- [2] Y. Lee, H.B. Lee, S.Y. Hahn, 'Temperature analysis of induction motor with distributed heat sources by finite element method', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33, n° 2, pp. 1718-1721, March 1997.
- [3] E. Vassent, G. Meunier, A. Foggia, 'Simulation of induction machines using complex magnetodynamic finite element method coupled with the circuit equations', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 27, n° 5, pp. 4246-4249, September 1991.
- [4] P. Lombard, G. Meunier, 'A general method for electric and magnetic coupled problem in 2D and magnetodynamic domain', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 28, n°2, pp. 1291-1294, March 1992.
- [5] J.A.D. Pinto, C.F.B. Coumbra, 'transient heating and cooling analysis in an electromagnetic device', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, n° 5, pp. 3339-3342, September 1994.
- [6] G. Dhatt et G. Touzot, 'Une représentation de la méthode des éléments finis', Ed. Maloine, Paris, 1984.
- [7] J. Driesen, R.J.M. Belmans, K. Haney, 'Finite element modeling of thermal contact resistances and insulation layers in electrical machines', IEEE Transactions on Magnetics, vol. 37, n° 1, pp. 15-19, January/February 2001.

# MODELE DE COUPLAGE ELECTRO-MAGNETO-MECANIQUE POUR L'ETUDE D'UN LANCEUR ELECTROMAGNETIQUE MULTIPHASES A DEUX ETAGES

M. ZAOUIA<sup>(\*)</sup>, H. MOHELLEBI

<sup>(\*)</sup>Département d'Electrotechnique, Faculté de Génie Electrique et d'Informatique  
UMMTizi-Ouzou, BP 17 RP, Tizi-Ouzou, 15000, Algérie [zbmust@yahoo.fr](mailto:zbmust@yahoo.fr)

M. ABDELLAH

Laboratoire des systèmes électromagnétiques. EMP (Ex-Enita)  
B.P 17 Bordj El Bahri, Alger, Algérie [Mehdi.Abdellah@caramail.com](mailto:Mehdi.Abdellah@caramail.com)

## I. RESUME

Dans cet article une représentation du couplage des phénomènes électrique, magnétique et mécanique est proposée. Ce modèle est basé sur une résolution par éléments finis de l'équation électromagnétique et une résolution analytique de l'équation électrique du système d'alimentation, le terme de couplage est la tension d'alimentation. Le déplacement et la vitesse sont calculés à partir de l'équation mécanique, la force de propulsion agissant sur le projectile est déduite en utilisant la méthode de la force de Lorentz. Le mouvement de la partie mobile est pris en compte par la technique du remaillage. Les résultats obtenus sont confrontés à des résultats existants.

**Mots clés-** Régime transitoire, Eléments finis, vitesse, Lanceurs Electromagnétiques, force magnétique

## II. INTRODUCTION

Les phénomènes physiques sont souvent très complexes par l'interdépendance et l'interaction entre les domaines de leur évolution. Il n'est pas toujours possible d'ignorer toutes les interactions physiques dans un procédé, tel est le cas dans la plupart des dispositifs électromagnétiques. La prise en compte donc de phénomènes de diverse nature tels que les phénomènes électrique, magnétique et mécanique est nécessaire en vue d'une étude correcte des différents procédés industriels. Dans cet article un modèle de couplage électro-magnéto-mécanique est décrit et discuté. Ce dernier est basé sur une résolution analytique de l'équation électrique du système d'alimentation de type RLC [1]. L'équation électromagnétique est résolue en utilisant la méthode des éléments finis dans le plan  $[r,z]$ , où le terme source étant le terme de couplage avec l'équation électrique. Le couplage avec l'équation mécanique est effectué par le terme représentant la force magnétique obtenue en utilisant la méthode de Lorentz, cette équation est résolue en utilisant la méthode de Runge- Kutta d'ordre 4 pour l'obtention des termes vitesse et déplacement. Le déplacement de la partie mobile est

pris en compte par la technique de remaillage du domaine de résolution à chaque pas de déplacement. Le modèle ainsi développé est appliqué à l'étude du comportement dynamique d'un lanceur électromagnétique à deux étages (deux sections) multiphases ayant une géométrie axisymétrique où les caractéristiques géométriques et électriques proviennent de [2],[3],[4]. Ce type de procédés sont utilisés dans divers domaines tels que le domaine industriel, militaire, aéronautique [2],[3],[4],[5]. Leur principe de fonctionnement est basé sur la force magnétique engendrée qui provient de l'interaction entre le champ magnétique créé par le courant circulant dans l'inducteur et les courants induits dans la partie mobile ou l'induit (projectile). Une méthode de résolution adéquate s'impose afin de résoudre les équations couplées électrique, magnétique et mécanique; dans la littérature, on trouve plusieurs types de méthodes, la méthode directe et la méthode indirecte [7], dans notre cas nous sommes intéressés à la méthode indirecte pour sa simplicité de mise en œuvre et l'économie qu'elle engendre en terme de temps de résolution et d'espace mémoire. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux fournis en [2] et [4] où une bonne concordance est constatée.

## III. PRESENTATION DU DISPOSITIF

Le dispositif électromagnétique axisymétrique représente un Lanceur électromagnétique à deux étages multiphases alimenté par décharges capacitatives composé d'un inducteur et d'un induit (projectile). L'inducteur en cuivre, de diamètre extérieur de 7.8 cm, est composé de deux étages, le premier étage (première section) contient six bobines inductrices de 20 cm de longueur, le deuxième étage (deuxième section) contient douze bobines inductrices de longueur de 40 cm; le projectile en aluminium de forme tubulaire a une longueur de 20 cm, un diamètre extérieur de 5 cm et un poids de 137 gramme [2],[3],[4]. La figure 1 montre la géométrie du lanceur électromagnétique ainsi que le sens du déplacement du projectile. Les bobines inductrices (A,-A), (B,-B), (C,-C) sont connectées en série, deux à deux pour la première section et quatre à quatre pour la deuxième section.

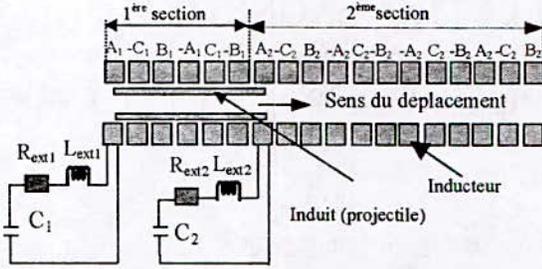


Fig. 1. Géométrie représentant le lanceur électromagnétique à deux étages

La figure 2 montre le schéma équivalent du circuit d'alimentation, [1] associé au dispositif électromagnétique alimenté par décharge capacitive correspondant à chaque bobine inductrice.

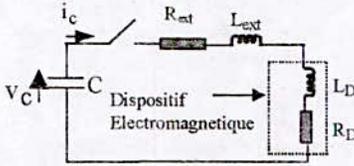


Fig. 2. schéma du circuit électrique équivalent

#### IV. COUPLAGE DES EQUATIONS ELECTRIQUE-MAGNETIQUE - MECANIQUE

##### A. Equations électriques

Les équations régissant le schéma électrique équivalent données en figure 2 sont comme suit :

$$v_c(t) + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$i_c(t) = -C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (2)$$

$$R = R_{ext} + R_D \quad \text{et} \quad L = L_{ext} + L_D$$

$R_{ext}$  et  $L_{ext}$  sont respectivement la résistance et l'inductance du circuit d'alimentation.

$R_D$  et  $L_D$  sont respectivement la résistance et l'inductance du dispositif électromagnétique.

$$v_c(t) = K_1 e^{(\alpha_1 t)} + K_2 e^{(\alpha_2 t)} \quad (3)$$

$$K_1 = -\frac{\alpha_2 v_{c0}}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (4)$$

$$K_2 = -\frac{\alpha_1 v_{c0}}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad (5)$$

$v_{c0}$  est la tension initiale.

$\alpha_1, \alpha_2$  sont déterminés en fonction des paramètres électriques  $R, L$  et  $C$ .

##### B. Equation électromagnétique

L'équation électromagnétique en terme du potentiel vecteur magnétique régissant le phénomène électromagnétique transitoire est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A}{\partial t} = -J_{sp} \quad (6)$$

$A = r A_\phi$ ,  $A_\phi$  est la composante suivant la direction angulaire ( $\phi$ ),  $r$  est la composante radiale.

$\sigma$ : conductivité électrique de l'induit,  $\nu$ : réductivité magnétique.

La fonction d'approximation du potentiel vecteur magnétique est donné comme suit :

$$A(r, z) = \sum_{j=1}^{nn} \alpha_j(r, z) A_j \quad (7)$$

$nn$ : nombre de nœuds du domaine.

$$J_{sp} = -\sigma_1 \text{grad } v_c(t) = -\sigma_1 \frac{v_c(t)}{2\pi r} \quad (8)$$

$J_{sp}$  est la densité de courant source suivant la direction angulaire ( $\phi$ ).  $\sigma_1$  est la conductivité électrique de l'inducteur.

$v_c(t)$  est le potentiel électrique d'excitation représentant le terme de couplage entre l'équation électrique et l'équation électromagnétique, il est donné par la relation (3).

L'expression (6) est discrétisée dans l'espace en utilisant la méthode de Galerkin et dans le temps par la méthode d'Euler. On obtient alors le système algébrique suivant:

$$\Delta t ([M] \{A_{t,\Delta t}\} - \{K_s\}) + [L] (\{A_{t,\Delta t}\} - \{A_t\}) = 0 \quad (9)$$

avec :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} [\nu \text{grad}(\alpha_i) \text{grad}(\alpha_j)] \frac{dr dz}{r} \quad (10)$$

$$K_{si} = \int_{\Omega} \left[ \sigma_1 \frac{v_c(t)}{2\pi r} \right] \alpha_i dr dz \quad (11)$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega} [\sigma \alpha_i \alpha_j] \frac{dr dz}{r} \quad (12)$$

$\alpha_i$ : fonction de projection.

$\alpha_j$ : fonction d'interpolation.

$\Omega$ : domaine d'étude.

$\Delta t$ : pas de temps.

### C. Equation mécanique

L'équation mécanique relative à l'induit mobile est donnée par l'équation classique de Newton [6] :

$$m \frac{dV_{it}(t)}{dt} = F_m(t) \pm F_g \quad (13)$$

Vit : vitesse, m: masse,  $F_m$  : force magnétique, t : temps et  $F_g$  : force de gravitation.

#### C.1. Expression de la force magnétique

La force magnétique est donnée par la méthode de Lorentz.

Les composantes des forces axiales et radiales sont données respectivement par :

$$F_{mz} = - \iint J_\varphi B_r d\Omega \quad (14)$$

$$F_{mr} = \iint J_\varphi B_z d\Omega \quad (15)$$

$B_z$  : induction axiale.

$B_r$  : induction radiale.

$J_\varphi$  est la composante de la densité de courant induit suivant la direction ( $\varphi$ ) due à la variation du champ par rapport au temps.

La densité de courant induit due au mouvement est pris en compte implicitement en faisant déplacer les valeurs du potentiel vecteur magnétique calculées à l'instant précédent et à chaque pas du déplacement.

#### C.2. Vitesse et déplacement

La solution de l'équation mécanique (13) nous permet d'avoir dans un premier temps le terme de la vitesse par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 qui est donné par le schéma suivant:

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

où n est le nombre d'itérations,  $y_n$  représente le terme vitesse ou déplacement lors de la résolution à la n<sup>ième</sup> itération.

Ainsi nous pouvons déduire le terme déplacement sachant que :

$$V_{it}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (16)$$

x: déplacement.

#### D. Algorithme de couplage

L'expression (6) est résolue en utilisant la méthode des éléments finis sous environnement MATLA B.

L'algorithme de couplage est donné par la figure3.

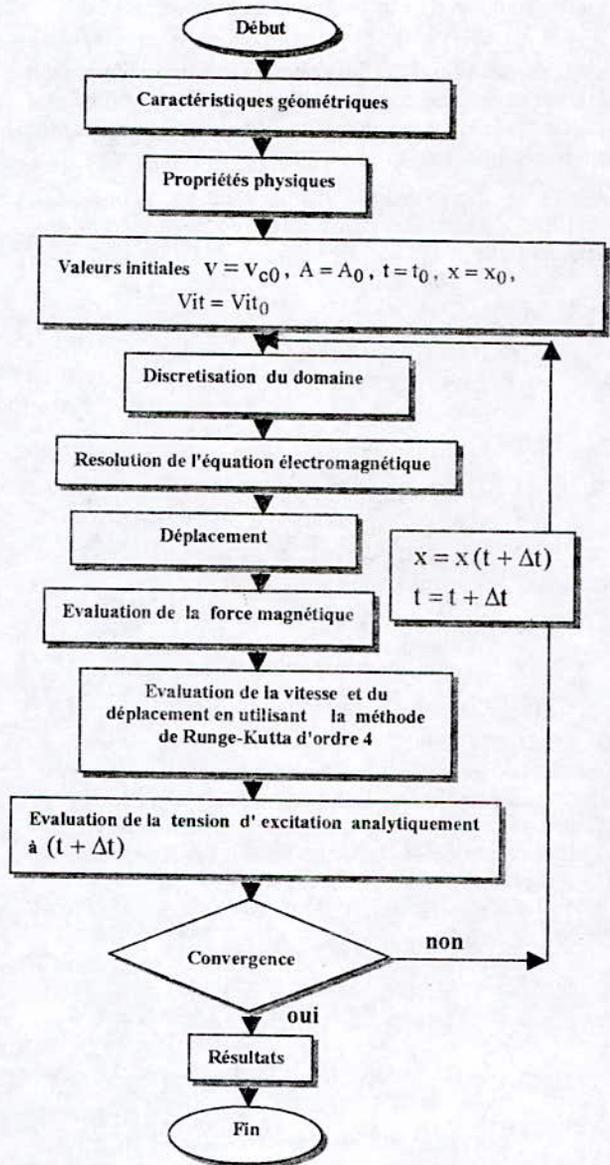


Fig.3 Algorithme de couplage

## V. RESULTATS ET COMMENTAIRES

Le dispositif étudié est un lanceur électromagnétique axisymétrique multiphasés à deux étages où les principales caractéristiques électriques sont les capacités des condensateurs et les tensions initiales respectivement:  $C_1 = 1200 \mu\text{F}$ ,  $V_{c01} = 3900 \text{ v}$  alimentant la première section et  $C_2 = 130 \mu\text{F}$ ,  $V_{c02} = 17000 \text{ v}$  alimentant la seconde section; l'inductance de chaque bobine inductrice de la première section est de  $14.1 \cdot 10^{-6} \text{ H}$  et l'inductance de chaque bobine inductrice de la seconde section est de  $27.5 \cdot 10^{-6} \text{ H}$  [2],[4]. Le modèle de couplage est appliqué à l'analyse des performances dynamiques du lanceur électromagnétique multiphasés à deux étages, en l'occurrence la vitesse de propulsion, le déplacement du projectile ainsi que la force magnétique de propulsion.

La figure 4 présente le maillage éléments finis du domaine d'étude où nous avons utilisé des éléments du premier ordre.

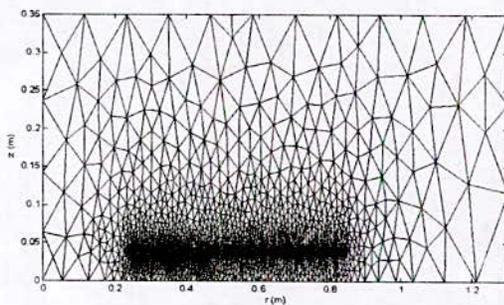


Fig.4. Représentation du maillage éléments finis utilisé

Les figure 5 et 6 montrent respectivement les allures des courants de décharge et les tensions issues des décharges de capacités pour un déphasage de  $60^\circ$  alimentant les deux sections du lanceur électromagnétique étudié. L'alimentation de la deuxième section (deuxième étage) est amorcée à environ 1,15 seconde.

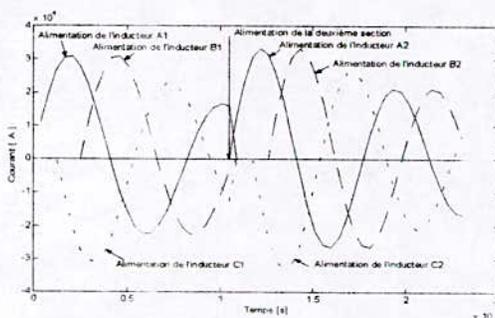


Fig.5. Courants de décharge alimentant les deux sections

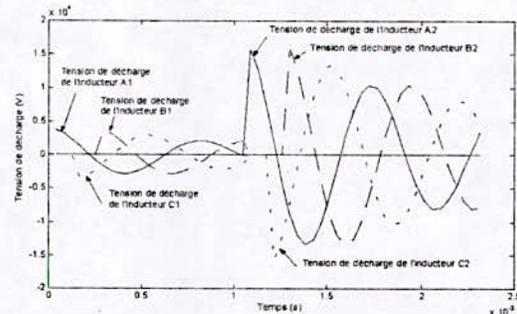


Fig.6. Tensions alimentant les deux sections

Afin de valider le modèle développé, nous avons comparé la vitesse calculée avec celle fournie par [2]. La figure 7 montre la comparaison de la vitesse en fonction du déplacement calculée et celle donnée par [2], en examinant cette figure nous remarquons que les résultats obtenus sont en bonne concordance. Le déplacement en fonction du temps est représenté par la figure 8. Lors de l'alimentation de la deuxième section à 1,15 seconde correspondant à un déplacement de 0,2 m, on remarque un léger palier au niveau de la vitesse puis cette dernière augmente lorsque la capacité  $C_2$  commence à se décharger, ce palier est dû à l'inertie du projectile lors de sa sortie de la première section. La figure 9 montre la force de propulsion engendrée par le projectile, elle présente des pics qui sont dus au type de l'alimentation qui est de nature transitoire, sa forme est similaire à celle fournie par [4].

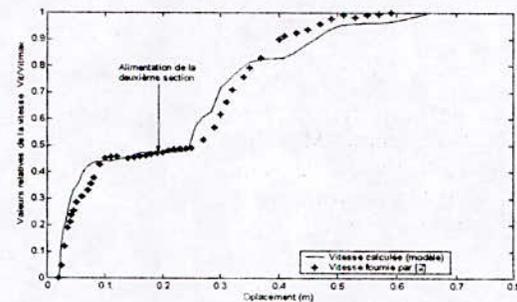


Fig.7. Vitesse (valeurs relatives) en fonction du déplacement

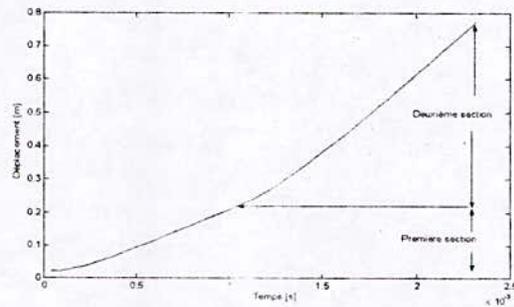


Fig.8. Déplacement en fonction du temps

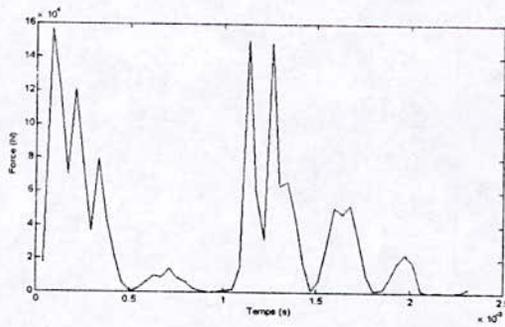


Fig.9. Force en fonction du temps

## VI. CONCLUSION

Dans ce travail un modèle de couplage électromagnéto - mécanique est présenté. Ce modèle est appliqué à l'étude des performances dynamiques d'un dispositif axisymétrique en l'occurrence un lanceur électromagnétique multiphases à deux étages alimenté par des capacités générant des décharges. Ces performances sont principalement la vitesse de propulsion du projectile, le déplacement ainsi que la force de propulsion. Les résultats obtenus ont été confrontés où une bonne concordance est constatée.

Les résultats sont obtenus avec une économie d'espace mémoire ainsi qu'une souplesse de résolution. Le modèle développé peut permettre de prédire les performances dynamiques du dispositif pour différents régime d'alimentation à savoir par générateurs de tensions sinusoïdales ou bancs de condensateurs.

## VII. REFERENCES

- [1] M . de Magistris, A. Formisano and R.Martole, "Electromechanical Modelling of Z Pinch Plasma Lenses with Thermal year Circuitual Coupling" , IEEE Transaction on Magnetics, vol 34 No.5 pp.3082-3085 September 1998.
- [2] Z. Zabar, X. N. Lu, E. Levi, L Birenbaum, and J. creedon "Experimental Result and Performance Analysis of 500 m/s Linear Induction Launcher (LIL)", IEEE transaction on Magnetics vol.31, No .1, pp. 522-527 January 1995.
- [3] X.N. Lu, E Levi, Z. Zabar and L Birenbaum, "Behavior of Azimuthal Currents induced in the Projectile of the Linear Induction Launcher [ LIL ]", IEEE Transaction on Magnetics vol.29, No.1, pp. 696-700, March 1993.
- [4] X.N. Lu, E Levi, Z. Zabar and L Birenbaum, "Transition Between Two Sections in a Linear Induction Launcher (LIL)", IEEE Transaction on Magnetics vol.31, No.1, pp. 493-498, January 1995.

- [5] M. Zaouia, H. Mohellebi, M. Abdellah " Electric-Magnetic-Mechanical Coupled Model for Analysing Dynamic Characteristics with Feeding Effects of Linear Induction Launcher ",1<sup>st</sup> Int. WSEAS Conference on Electrosience and Technologie for Naval Engineering and All-Electric Ships CD-ROM Proceedings, ISBN 960-8052-00-9, 487-246, 12-13 July 2004, Vouliagmni, Athens, Greece.

- [6] F Henrotte, A.Nicolet, H. Hédia, A. Genon, W.Legros, " Modelling of Electromechanical Relays Taking into account Movement and electric Circuits" , IEEE Transaction on Magnetics, vol.30 No5, pp.3236-3239, September 1994.

- [7] K.Srairi, M.Féliachi, " Numerical Coupling Models for Analysing Dynamic Behaviors of Electromagnetic Actuators" , IEEE Transaction on Magnetics, vol.34 No5, pp.3608-3610, September 1998.



# ETUDE DE LA SENSIBILITE D'UN MODELE THERMIQUE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE A CAGE

M.Bouheraoua\*, N.Benamrouche\* ,S.Haddad

[Bouheraoua@hotmail.com](mailto:Bouheraoua@hotmail.com)

[Benamrouchen@yahoo.com](mailto:Benamrouchen@yahoo.com)

[hddsalah@yahoo.fr](mailto:hddsalah@yahoo.fr)

\*Université Mouloud Mammeri, faculté de génie électrique et d'informatique, département  
d'électrotechnique.

**Résumé :** Cet article traite de la sensibilité du modèle thermique d'un moteur asynchrone à cage basé sur la méthode d'analyse nodale (réseau thermique). Nous y présentons une analyse de la fiabilité de ce modèle vis-à-vis particulièrement de la localisation des pertes et de la spécification des propriétés thermiques, et leurs effets sur la distribution de la température. L'application a été faite sur un moteur à induction de 2.2kW , 4-Pôles, 380V, fabriqué en Algérie par L'ENEL.

Mots clés : moteur asynchrone, modèle thermique, pertes, température.

## I.INTRODUCTION

Afin de prédéterminer l'élévation de la température d'une machine électrique avant sa construction, le modèle thermique est utilisé pour améliorer sa construction ou déterminer sa capacité de charge durant différentes conditions de fonctionnement.

Les modèles thermiques basés sur les techniques numériques, telles que les méthodes de différences et éléments finis, sont d'un intérêt certain [1]. Mais ces méthodes donnent des résultats exacts seulement pour le mode de conduction de chaleur. La modélisation des modes de convection et de rayonnement est difficile. Les modèles thermiques de petites machines les plus fréquemment utilisés, sont les modèles à paramètres localisés (réseau thermique) [1-3]. Ces derniers sont simples et peuvent donner une représentation exacte des conditions thermiques de la machine. Ils sont basés sur la similitude entre la loi d'Ohm de conduction électrique et la loi de Fourier de conduction de chaleur. Beaucoup de travaux [2],[6] proposent un nombre relativement réduit d'éléments dans le réseau thermique. Dans cet article, la machine est discrétisée par un nombre important d'éléments, qui donne plus d'informations sur la distribution de la température dans la machine. Pour prédéterminer la distribution de la température dans une machine électrique, il est nécessaire de savoir, avec

précision, la localisation, la valeur des pertes de chaleur et les propriétés thermiques des matériaux utilisés. Cependant, ils existent des incertitudes considérables au sujet des conductivités thermiques des matériaux à partir desquelles la machine est constituée et des coefficients d'échanges convectif [4],[5]. La conception d'un modèle thermique à paramètres localisés est simple, mais il y a des difficultés dans l'évaluation des coefficients d'échanges thermiques associés au réseau thermique, particulièrement pour des géométries compliquées présentant un certain nombre d'interfaces. Dans cet article, un modèle thermique à paramètres localisés d'un moteur asynchrone à cage a été développé [9],[10] afin de déterminer l'échauffement dans les différents éléments constituant le moteur. Une étude de la sensibilité du modèle a été faite, pour montrer l'effet de la variation de ces paramètres sur la distribution de la température.

## II.CIRCUIT THERMIQUE EQUIVALENT

La chaleur générée dans une machine électrique, est transférée aux régions avoisinantes par une combinaison de processus de conduction, convection et rayonnement. Les processus dominant, dans le transfert de chaleur dans le moteur au milieu ambiant, sont la conduction et la convection, tandis que le rayonnement est important seulement sur les surfaces extérieures. Le circuit thermique équivalent doit contenir au moins ces modes de transfert. Pour analyser le processus de chaleur dans une machine électrique, une géométrie idéale de la machine est choisie puis divisée en éléments de base. Chacun de ces éléments, est représenté, en général, par un nœud dans le circuit thermique équivalent avec sa capacité thermique et la source de chaleur correspondante. Le circuit thermique équivalent inclut aussi les nœuds de liaison et les nœuds d'éléments convectifs. Pour définir les éléments de base, il est nécessaire de connaître la géométrie de la machine et les propriétés thermique des matériaux utilisés, afin de déterminer la principale trajectoire de l'écoulement de

chaleur. Le choix de la subdivision d'une machine en éléments simple est un compromis entre la simplicité du modèle et l'exactitude des résultats exigés. En développant un modèle thermique d'une machine électrique, il est supposé que les écoulements de chaleur dans les directions axiale et radiale soient indépendants et l'écoulement dans la direction circonférentielle est négligé [4],[5]. De plus, les températures moyennes dans les deux directions sont supposées identiques et confondues [1],[5]. Le circuit thermique équivalent d'une machine peut être supposé symétrique autour de son plan radial à travers le centre de la machine [1]. Ainsi, seule la moitié de la machine à besoin d'être considérée et sa subdivision est montrée dans la figure.1. En se basant sur ces hypothèses, le circuit thermique équivalent développé est montré dans la figure.2

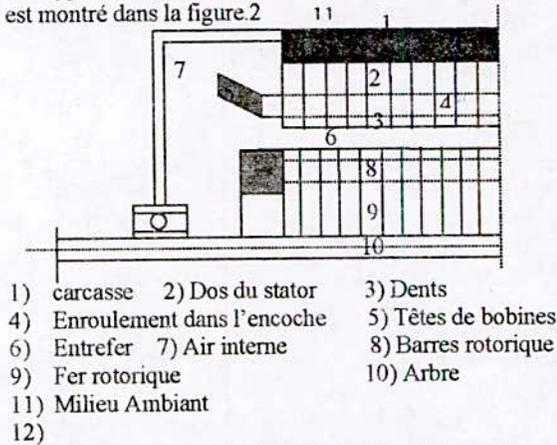


Fig.1. Subdivision de la machine en éléments.

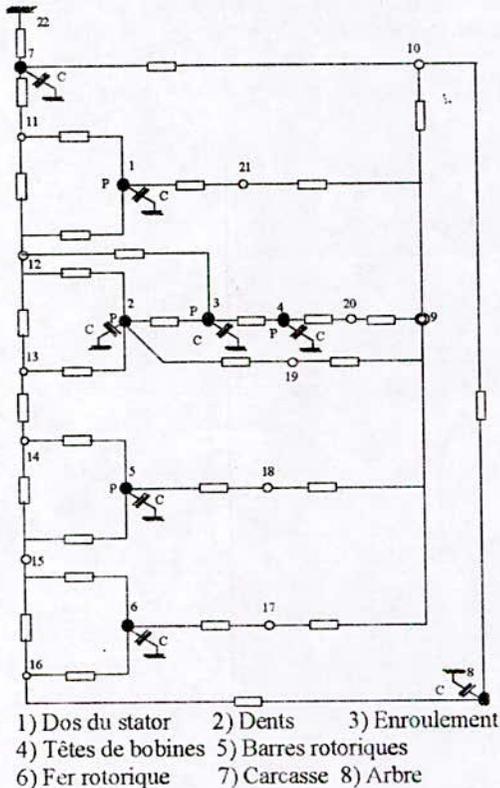


Fig 2. Circuit thermique équivalent de la machine.

### III. MISE EN EQUATION DU MODELE THERMIQUE

Ces équations sont celles du bilan de puissance aux différents nœuds définis par le découpage. Les variables d'états sont les écarts de températures par rapport à la température ambiante, supposé fixe, prise comme référence [6].

Deux types de nœuds ont été définis :

- les nœuds de liaisons dont les équations de bilan correspondent aux conditions aux limites des nœuds adjacents ;
- Les nœuds d'éléments conductif et convectif dont les équations de bilan correspondent aux équations de transfert dans les milieux considérés.

L'équation d'un nœud de liaison L peut prendre la forme symbolique suivante :

$$\sum_{L=1}^{ML} G_{LL}(\theta_L - \theta_L) + \sum_{i=1}^{MIC} G_{Li}(\theta_L - \theta_i) + \sum_{j=1}^{MId} G_{Lj}(\theta_L - \theta_j) + G_{La}\theta_L = 0 \quad (1)$$

Où :

MIL, MIC et MId sont respectivement les nombres de nœuds de liaisons, d'éléments conductifs et d'éléments convectifs liés à L.

$G_{LL}$  et  $G_{Li}$  sont des conductances conductives.

$G_{Lj}$  sont des conductances convectives.

$G_{La}$  est la conductance convective de l'élément de référence.

L'équation d'un nœud convectif j prend la forme suivante :

$$\sum_{L=1}^{M2L} G_{jL}(\theta_j - \theta_L) = 0 \quad (2)$$

Où :

M2L est le nombre de nœuds de liaisons périphériques de l'élément j.

$G_{jL}$  sont des conductances convectives.

L'équation d'un nœud conductif i prend la forme suivante :

$$\sum_{L=1}^{M3L} G_{iL}(\theta_i - \theta_L) + C_i \frac{d\theta_i}{dt} = P_i \quad (3)$$

M3L est le nombre de nœuds de liaisons périphériques de l'élément i.

$G_{iL}$  des conductances conductives de l'élément.

$C_i$  capacité calorifique.

$P_i$  la puissance produite éventuellement dans l'élément.

Les équations du modèle sont ensuite regroupés dans deux systèmes algébriques et différentiels [6]. Un programme écrit en Fortran a été développé dans lequel ces deux systèmes ont été résolus séparément.

## IV. DISTRIBUTION DES PERTES DANS LE MOTEUR

Les pertes dans le moteur, représentant les sources de chaleur dans le circuit thermique équivalent, peuvent être partagées en pertes fer, pertes dans le cuivre, pertes mécaniques et pertes supplémentaires en charge. Le tableau 1 rassemble les valeurs des pertes dans la machine pour un fonctionnement à pleine charge. Cependant, il est nécessaire d'indiquer comment ces pertes ont été utilisées dans le moteur. La localisation précise des pertes dans quelques parties particulières de la machine, est très importante pour le calcul de l'élévation de la température et la détermination exacte des coefficients d'échange thermique. Les pertes cuivre peuvent être facilement calculées et allouées à l'encoche et aux régions de têtes de bobines. Cette évaluation se fait sur la base de la longueur du fil de cuivre de l'enroulement dans l'encoche et les têtes de bobines. Pour le réseau thermique présenté dans la figure.1, ces pertes sont imposées aux nœuds 3 et 4. Cependant, il n'y a pas d'information fiable pour indiquer précisément la répartition des pertes fer dans le moteur. Mellor et al [1] partage ces pertes en proportion fixée comme suit : 50% aux dents statoriques et 50% aux dents rotoriques. Toutefois, cette répartition n'est pas établie avec exactitude, elle varie selon l'expérience du concepteur. Des tests effectués sur le moteur en utilisant la méthode temps- température, ont permis de départager les pertes fer statoriques exactement entre le dos et les dents du stator. Il est estimé que 70% des pertes fer totales peuvent être attribuées au dos du stator et 30% aux dents à pleine charge. Et sont respectivement de 22% et 78% à vide [4]. Les pertes fer induites par les dents et le dos du stator sont attribuées respectivement aux nœuds 2 et 1. Les pertes supplémentaires en charge sont relativement petites et sont souvent prises comme étant égales 0.5% de la puissance absorbée [11]. Selon [7], 25% de ces pertes sont allouées aux dents statoriques et 75% aux dents rotoriques et sont injectées aux nœuds 2 et 5. Enfin, les pertes mécaniques générées par la ventilation et les frottements peuvent être considérées comme une source de chaleur dans l'arbre.

Tableau 1. Distribution des pertes dans le moteur.

Eléments	Grandeurs
Pertes joule statorique (W)	300
Pertes joule rotorique (W)	111
Pertes fer (W)	122
Pertes mécaniques (W)	50
Pertes supplémentaires (W)	14
Pertes totales (W)	597

## V. DESCRIPTION DE LA MACHINE ETUDIÉE

La machine étudiée est un moteur asynchrone triphasé, tétrapolaire, à cage, auto- ventilé , de puissance 2.2kW.

Le bobinage statorique, monté en triangle, fonctionne sous tension nominale de 380V.

Le courant nominal, est de 5.2A et la vitesse de rotation est de 1410 tr/mn.

La cage rotorique, est en aluminium, est montée directement sur les tôles assurant ainsi leur serrage. La machine complètement fermée et auto-ventilée, un ventilateur radial est monté en bout d'arbre formant ainsi un système de refroidissement fermé.

## VI. DESCRIPTION DU BANC D'ESSAI

Le banc d'essai comprend la machine décrite ci-dessus, entraînant comme charge, une génératrice à courant continu à excitation séparée (220V, 6.8A, 1500 tr/mn), qui débite sur des résistances, comme le montre la figure.3. Les températures mesurées, en différents points dans le moteur, ont été obtenues en utilisant des thermistances (CTN) placées à l'intérieur du moteur. La figure.4 montre leur emplacement dans le moteur. Les températures rotorique sont mesurées à l'aide de trois thermistances dont les signaux issus sont transmis au dispositif de mesure de température (dispositif de concordance) à l'aide d'un jeu de balai et de bagues.

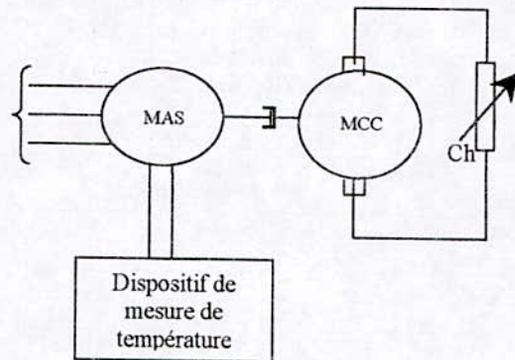


Figure.3. Montage du banc d'essai

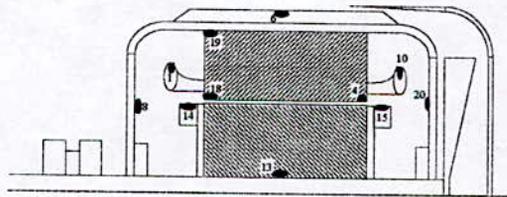


Fig.4. Vue axiale montrant l'emplacement des thermistances.

## VII. SIMULATION

Un programme, écrit en Fortran, a été développé pour déterminer la température en régime permanent et en régime transitoire [9],[10]. Le calcul est fait en tenant compte de la géométrie de la machine, de la grandeur des pertes, ainsi que des propriétés thermiques des matériaux constituant le moteur. Le tableau 2 montre les températures calculées et mesurées en régime permanent à pleine charge.

Tableau 2 : Comparaison des températures mesurées et calculées à pleine charge.

Eléments	Températures mesurées (°C)	Températures calculées (°C)
Carcasse	53.11	50.02
Dos du stator	67.57	72.00
Enroulements	85.09	91.39
Têtes de bobines	91.40	91.89
Barres rotoriques	109.21	120.60
Arbre	103.00	115.38

## VIII. SENSIBILITE DU MODELE THERMIQUE

## A. Effet des pertes supplémentaires en charge sur l'échauffement de la machine.

Les tableaux 3 et 4 montrent l'effet des pertes supplémentaires sur l'échauffement des différents éléments constituant la machine.

Tableau 3 : Effet des pertes supplémentaires sur l'élévation de la température dans la machine. 70% des pertes fer attribuées au dos du stator 30% des pertes fer attribuées aux dents du stator.

Pertés supplémentaires	Températures calculées (°C)		
	14 W 0.5% Pabs	26 W 1.2% Putile	0 W
Carcasse	53.11	53.55	52.58
Dos du stator	67.70	68.47	66.46
Enroulements	85.11	86.02	83.64
Têtes de bobines	91.39	92.34	89.93
Barres rotorique	115.15	126.63	113.20
Fer rotorique	115.11	126.48	113.16
Arbre	112.25	118.73	111.37

Tableau 4 : Effet des pertes supplémentaires sur l'élévation de la température dans la machine. 50% des pertes fer attribuées au dos et dents du stator

Pertés supplémentaires	Températures calculées (°C)		
	14 W 0.5% Pabs	26 W 1.2% Putile	0 W
Carcasse	53.11	53.55	52.58
Dos du stator	67.57	68.49	66.48
Enroulements	85.09	86.19	83.81
Têtes de bobines	91.40	92.50	90.09
Barres rotorique	120.60	126.82	113.39
Fer rotorique	120.51	126.68	113.36
Arbre	115.38	118.84	111.37

## B. sensibilité aux distributions des pertes

Pour déterminer l'influence de la distribution des pertes sur le modèle thermique, une petite variation a été faite sur chaque type de pertes et injectée aux nœuds appropriés; la nouvelle température est notée. Le tableaux 5 et 6 montrent une analyse de la variation des températures pour une augmentation de pertes de 20% dans les éléments actifs, tandis que le graphe de la figure.5 montre l'effet de la variation des pertes Joule

rotorique sur la distribution de la température dans les différents éléments.

Tableau 5. Influence de la variation des pertes sur l'échauffement du rotor et du dos du stator.

Eléments	Rotor	Dos du stator	Variation des éléments
Pertes (W)	66	42.7	Pas de variation
Temp. Calculées (°C)	120.40	67.55	
Pertes (W)	77.10	42.7	Rotor
Temp. Calculées (°C)	128.21	68.89	Dos du stator
Pertes (W)	66	51.24	
Temp. Calculées (°C)	121.43	68.70	

Tableau 6. Influence de la variation des pertes sur l'échauffement des enroulements et des têtes de bobines..

Eléments	Enroulements	Têtes de bobines	Variation des éléments
Pertes (W)	73.5	76.5	Pas de variation
Temp. Calculées (°C)	84.93	91.23	
Pertes (W)	88.2	76.5	Enroulements
Temp. Calculées (°C)	88.47	94.75	
Pertes (W)	73.5	91.8	Têtes de bobines
Temp. Calculées (°C)	88.59	96.12	

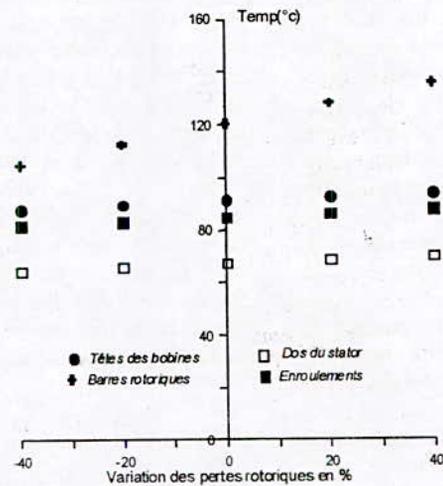


Fig.5. Effet de variation des pertes Joule rotorique sur l'échauffement des éléments.

## C. sensibilité aux coefficients de transfert de chaleur

La sensibilité du réseau thermique équivalent aux coefficients d'échange convectif et aux conductivités de certains matériaux est faite de la même manière en variant les coefficients de transfert de chaleur et les conductivités de 20%. Les tableaux 7 et 8 résument les résultats en régime permanent pour un essai à pleine charge, pour les différentes répartitions des pertes fer et supplémentaires en charge, ainsi que la variation de tous les coefficients d'échange de chaleur. L'effet de variation du coefficient d'échange convectif carcasse/ambiant, sur l'échauffement de la majorité des éléments du modèle, est présenté dans la figure.6.

Tableau 8. Effet de la variation de l'ordre de 20% des coefficients d'échanges sur l'échauffement des éléments  $P_{sup}=14W$  (05% $P_{abs}$ ).

70% des pertes fer attribuées au dos du stator.

30% des pertes fer attribuées aux dents du stator.

Eléments	Températures calculées (°C)		
	Têtes de bobines	Barres rotorique	Arbre
Sans variation	91.23	120.40	115.28
Variation de $H_{amb}$	86.47	115.69	110.57
Variation de $H_{entrefer}$	91.39	115.15	112.55
Variation de $H_{ct}$	89.18	118.96	114.52
Variation de $K_i$	89.85	120.36	115.25
Variation de $K_c$	89.56	120.09	115.03
Variation de $K_{arbre}$	90.98	117.35	109.91
Variation de $K_{al}$	91.22	120.30	115.03
Variation de $K_r$	90.47	119.57	119.50
Variation de $K_a$	91.24	120.39	120.30

Tableau 7. Effet de la variation de l'ordre de 20% des coefficients d'échange sur l'échauffement des éléments  $P_{sup}=14W$  (05% $P_{abs}$ ).

70% des pertes fer attribuées au dos du stator.

30% des pertes fer attribuées aux dents du stator.

Eléments	Températures calculées (°C)		
	Carcasse	Dos du stator	Enroulements
Sans variation	53.11	67.55	84.93
Variation de $H_{amb}$	48.41	62.83	80.18
Variation de $H_{entrefer}$	53.11	67.70	85.11
Variation de $H_{ct}$	53.10	65.44	82.86
Variation de $K_i$	53.10	67.55	83.53
Variation de $K_c$	53.11	67.31	84.16
Variation de $K_{arbre}$	53.11	67.37	84.68
Variation de $K_{al}$	53.12	67.54	84.92
Variation de $K_r$	53.10	67.31	84.16
Variation de $K_a$	53.11	67.55	84.94

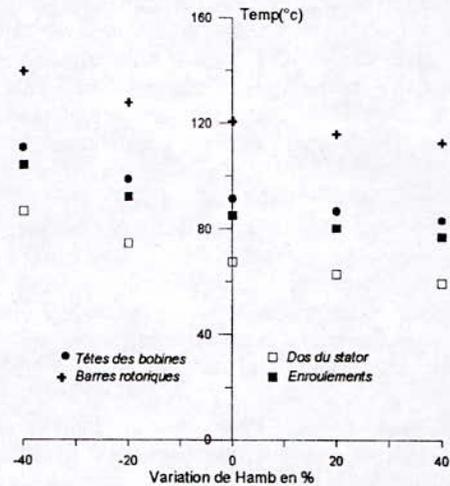


Fig.6. Effet de variation du coefficient d'échange convectif carcasse/ambiant sur l'échauffement des éléments.

## IX. RESULTATS ET DISCUSSION

La sensibilité du circuit thermique équivalent aux variations des différentes pertes, ainsi que les coefficients d'échanges convectif et les différentes conductivités, montrent que, thermiquement, le rotor et le stator sont faiblement couplés. Il s'avère qu'une variation de 20% des pertes rotorique affecte sensiblement la température au niveau du rotor, tandis que les autres éléments restent relativement insensibles. La variation des pertes supplémentaires en charge, induit une élévation de température au niveau du rotor, comparativement à d'autres parties constituant le moteur. Ainsi, négliger les pertes supplémentaires en charge, ce qui est généralement le cas des petits moteurs à induction, peut conduire à des résultats erronés.

La variation du coefficient d'échange convectif carcasse/ambiant qui caractérise la carcasse extérieure et le milieu ambiant ( $H_{amb}$ ), a une influence considérable sur toutes les températures des différents éléments. Heureusement que cette conductance peut souvent être évaluée assez précisément en connaissant la température moyenne de la partie extérieure et les pertes totales calculées de la machine. En revanche, l'influence des autres paramètres sur toutes les sorties sont faibles en régime permanent.

## X. CONCLUSION

La modélisation thermique des machines électriques tournantes est très complexe, à cause de leurs configurations géométriques, des diverses propriétés de leurs matériaux et des distributions des sources de chaleur. L'utilisation d'un circuit thermique à paramètres localisés contribue largement à minimiser ces problèmes. Cette méthode est relativement exacte pour déterminer la distribution de la température dans la machine.

L'étude de la sensibilité, a montré que, du point de vue thermique, le stator et le rotor sont faiblement couplés. La distribution de la température est relativement insensible

aux variations de la plupart des paramètres. Cependant, la distribution de la température, au niveau d'un élément, est affectée par les changements des paramètres de l'élément lui-même et des éléments adjacents. Par exemple, la température au niveau de l'enroulement dans l'encoche est plus sensible à la conductivité de l'isolant, alors que la variation des autres paramètres influe faiblement sur la température de celui-ci.

La distribution de la température peut être aussi sensible à d'autres paramètres, tels que les pertes qui peuvent affecter la température d'une manière significative. Toutefois, il est important de souligner que le coefficient d'échange convectif carcasse/ambiant a un effet considérable sur toutes les températures des différents éléments.

La précision obtenue avec cette méthode est très satisfaisante, dès lors que les paramètres conductifs sont bien identifiés. Le lien direct avec les données constructives est généralement occulté et il est difficile de connaître les incertitudes introduites par les entrefers parasites et les isolants, mais également par la nature des écoulements autour de certaines parties du moteur.

L'approche par la méthode à paramètres localisés peut être un outil utile dans la modélisation thermique de la majorité des machines électriques.

#### REFERENCES

- [1] Mellor, P.H., Robert, D. Turner, D.R., 'lumped parameter thermal model for electrical machines of TEFC design'. Proc.IEE, vol.138, N° 5, pp.205-218.
- [2] Chilet, C., Hadi, A.W., Perret, R., Isnard, R., 'Identification du modèle thermique d'une machine à induction de puissance moyenne'. Revue de physique appliquée 24(1989) 9, p.923-931.
- [3] Kylander, G., 'Thermal modelling of small cage induction motors'. Goteborg, Sweden: Chalmers university of Technology, Departement of Electrical Machines and power Electronics, Technical Report N° 265, 1995. 113p.
- [4] Bousbaine, A., 'An investigation into thermal modelling of induction motors.' Ph.D.Thesis, University, of Sheffield, U.K., 1993.
- [5] Bousbaine, A., Low, W.F., AND M.McCormick, 'Thermal modelling of induction motors based on accurate loss density measurement' Proc.ICEM, UMIST, Manchester, sept.1992, pp.935-957.
- [6] Roy, D., 'Modélisation thermique des machines électriques tournantes. Application à la machine à induction'. These de docteur d'Etat és-sciences, USM et INP de Grenoble, novembre 1983.
- [7] Benamrouche, N., McCormick, M., Ometto, A., Parrassillitti, F., 'Spacial energy loss density measurement in induction motors'. Proc.ICEM, Pisa Italy, vol.2, pp.35-40, 1988.
- [8] Robert, T.J., 'The solution of heat flow equations in large electrical machines', 1969-70, IME, vol.184, Pt.3E, pp.70-83.
- [9] Bouheraoua, M., 'Contribution à la modélisation thermique d'un moteur asynchrone à cage'. Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, Algérie., 2001.
- [10] Bouheraoua, M., Benamrouche, N., 'Thermal model of an induction motor' Proc. 37<sup>th</sup> UPEC 2002, Vol.2, Paper 604, Staffordshire university, United Kingdom, 2002.
- [11] British Standard BS4999, 1977

#### LISTE DES SYMBOLES

- $H_{amb}$  : Coefficient d'échange convectif du milieu ambiant.  
 $H_{entrefers}$  : Coefficient d'échange convectif d'entrefer.  
 $H_{ct}$  : Coefficient de contact carcasse/dos du stator.  
 $K_i$  : Conductivité de l'isolant.  
 $K_c$  : Conductivité du cuivre.  
 $K_{arbre}$  : Conductivité de l'arbre.  
 $K_{al}$  : Conductivité de l'aluminium.  
 $P_{sup}$  : Perte supplémentaire.  
 $P_{abs}$  : Puissance absorbée.  
 $P_{utile}$  : Puissance utile.  
 $K_r$  : Conductivités dans la direction radiale.  
 $K_a$  : Conductivité dans la direction axiale.

# LE COUPLAGE MAGNETIQUE-ELECTRIQUE SOUS ENVIRONNEMENT MATLAB

H. BALI \*, Z. BOULASSEL\_BELLI, Y.CHERIGUEN

Département de génie électrique, Université de Jijel BP 98, Ouled Aissa – Jijel (Algérie).

## I. RESUME

L'une des difficultés à faire face lors de la modélisation des dispositifs Electrotechniques, est la prise en compte du type d'alimentation ainsi que la nature des conducteurs utilisés. Modéliser en même temps les phénomènes magnétiques dans la partie éléments finis et les phénomènes électriques est très important. Dans cet article, on présente la méthode de résolution simultanée sous environnement MATLAB tout en prenant en considération les courants de Foucault qui se développent dans les conducteurs massifs.

Mots clés- éléments finis, équation du circuit, courants de Foucault, densité de courant, matrice de connexion.

## II. INTRODUCTION

Pour une étude complète des phénomènes électromagnétiques au sein du dispositif à modéliser, la prise en compte de pièce conductrice mobile, du type d'alimentation, des courants de Foucault, des variations de la température et des caractéristiques non linéaires des matériaux sont des difficultés dont l'utilisateur des logiciels doit faire face [1], [2]. En effet, le temps de calcul devient très important, voir même pénalisant [3]. Si on veut tenir compte d'une représentation du type circuit dans les modèles par exemple, il est nécessaire de réaliser un couplage entre les équations de Maxwell et les équations du circuit [2], [4]. Dans ce cas, il faudra noter que les équations magnétiques font intervenir des grandeurs locales (grandeurs mathématiques : potentiel vecteur magnétique en chaque nœud), tandis que les équations électriques font appel à des grandeurs globales (grandeurs physiques : courant dans chacune des mailles électriques), qui ne sont pas forcément du même ordre de grandeur [2].

Afin de résoudre le problème couplé magnétique-électrique, plusieurs méthodes ont été proposées [1], [2], [3]. On cite la méthode itérative qui est basée sur une technique de rebouclage, ce qui demande un temps de calcul élevé [2]. Pour surmonter cette difficulté, il est plus pratique d'intégrer les équations électriques dans le système matriciel et de résoudre l'ensemble à la fois. Notre travail consiste en l'implémentation, sous environnement MATLAB, d'un code de calcul pour une résolution simultanée des équations électriques et magnétiques. En conséquence, le temps CPU se voit

réduit de manière notable comparé au travaux cités en [2], [3].

## III. FORMULATION DU PROBLEME COUPLE (Magnétique-électrique)

On suppose que le problème à traiter possède une longueur infinie suivant une direction privilégiée. L'étude s'effectue dans ce cas, dans un domaine bidimensionnel 2D.

### A. Terminologie

Deux types de conducteurs sont considérés.

En premier lieu, les conducteurs massifs qui peuvent être le siège d'importants courants de Foucault, se traduit par un couplage entre le champ magnétique et électrique. Deuxièmement les conducteurs bobinés (fins) dont la répartition de la densité de courant est uniforme sur la section du conducteur, ce qui permet de découpler partiellement les équations du champ magnétique et électrique [2], [5], [6].

### B. Loi d'Ohm pour les conducteurs massifs

#### B. 1. Cas bidimensionnel cartésien

Les conducteurs sont représentés par des surfaces orientées [2], [5], [7]. Dans chaque région  $k$ , la densité de courant est donnée par la relation :

$$\vec{J} = -\sigma \left[ \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \text{grad} \phi \right] \quad (1)$$

La relation (1), peut être intégrée sur chaque région  $k$  conductrice où  $\text{grad} \phi_k$  est constant.

En écrivant  $\Delta V_k = -L \text{grad} \phi_k$  et  $R_k = L / \int_{S_k} \sigma dS_k$ , on trouve que :

$$\Delta V_k = R_k I_k + R_k \int_{S_k} \sigma (\partial A / \partial t) dS_k \quad (2)$$

#### B. 2. Cas de la symétrie axiale

Dans le cas d'un conducteur massif présentant une symétrie axiale, la densité de courant en un point donné, peut être intégrée sur chaque région  $k$  où  $\text{grad} \phi_k$  est aussi constant :

$$\int_{S_K} J \cdot dS_K = I_k = - \int \sigma (\partial A / \partial t) dS_K - \left( r \vec{grad} \phi_k \right) \int_{S_K} \sigma / r dS_K \quad \dots (3)$$

On note :

$$\Delta V_k = -2\pi r \vec{grad} \phi_k \text{ et } R_k^* = 2\pi \int_{S_K} (\sigma / r) dS_K.$$

Afin de conserver une forme analogue au cas cartésien 2D, on utilise comme variable d'état  $A^* = rA$ . La relation courant-tension-potential vecteur magnétique s'écrit :

$$\Delta V_k^* = R_k^* I_k + R_k^* \int_{S_K} (\sigma / r) (\partial A / \partial t) dS_K \quad (4)$$

### C. Loi d'Ohm pour les conducteurs bobinés

#### C. 1. Cas bidimensionnel cartésien

Les conducteurs bobinés sont caractérisés par un nombre de brins  $N_s$ , et d'un coefficient de remplissage  $\lambda$ . Il est possible d'exprimer la chute de tension due aux  $N_s$  filaments placés en série, de la région  $k$  en appliquant la relation (2) à l'ensemble des brins conducteurs :

$$\Delta V_k = \sum_{i=1}^{N_s} \left( R_i I_k + \int_{S_i} R_i \sigma (\partial A / \partial t) dS_i \right) \quad (5)$$

avec :  $S_i = \lambda S_k / N_s$

La somme des chutes de tension élémentaires, permet d'obtenir la chute de tension globale, en supposant que  $\sigma$  est constante sur un brin élémentaire, on obtient :

$$\Delta V_k = R_1 I_k + (L N_s / S_k) \int_{S_K} (\partial A / \partial t) dS_k \quad (6)$$

avec :  $R_1 = L (N_s^2 / \lambda S_k^2) \int_{S_K} 1 / \sigma dS_K$

#### C. 2. Cas de la symétrie axiale

En suivant un raisonnement identique au cas bidimensionnel cartésien, la relation courant-tension-potential vecteur magnétique s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta V_k = R_2 I_k + (2\pi N_s^2 / S_k) \int_{S_K} \partial A^* / \partial t dS_K \quad (7)$$

avec :  $R_2 = (2\pi N_s^2 / \lambda S_k^2) \int_{S_K} r / \sigma dS_k$

Sachant que  $\vec{grad} \phi$  d'où  $\Delta V_k$  « la ddp » est généralement pas connue, ainsi que les courant circulant dans les mailles (courant de région), on introduit la matrice de connexion qui va nous permettre de réduire la taille des matrices qu'on va générer par la suite. On note [8] :

$$[I_{region}] = [C]^T [I_{phase}] \quad (8)$$

$$[\vec{V}] = [C] [\Delta V] \quad (9)$$

$$[R_0] = [C] [R] [C]^T \quad (10)$$

Ces relations sont introduites à l'ensemble des équations (2), (4), (6) et (7).

### D. Equation du champ

La formulation retenue au cours de notre étude est la formulation  $\vec{A}-V$ . Dans le cas général, l'équation de diffusion électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$ro\vec{t} \left( 1/\mu \text{ ro}\vec{t} \vec{A} \right) = \vec{J}_e + \vec{J}_0 \quad (11)$$

$$\vec{J}_e = -\sigma \left( j_{\omega} \vec{A} + g \vec{rad} \phi - \vec{V} \times \vec{B} \right) \quad (12)$$

Pour les conducteurs bobinés, la densité de courant peut être considérée comme constante [8], [9] :

$$\vec{J}_0 = \frac{NI}{S} \hat{i} \quad (13)$$

La matrice de connexion est aussi introduite dans les équations du champ.

## IV. METHODE DE RESOLUTION SIMULTANEE

Après une discrétisation éléments finis des équations du champ couplées aux équations du circuit, on obtient la forme matricielle suivante, pour les conducteurs massifs et bobinés dans une représentation cartésienne puis axisymétrique respectivement [2], [10] :

- Conducteurs massifs (cas cartésien) :

$$[M] \{A\} + ([N] - [P][R][P]^T) \partial / \partial t \{A\} - [P][R][C]^T \{I_{phase}\} = 0 \quad \dots (14)$$

$$[\vec{V}] = [C][R][C]^T \{I_{phase}\} + [C][R][P]^T \partial / \partial t \{A\} \quad (15)$$

avec :

$$M_{i,j}(n_e, n_e) = \iint_{S_e} L v \vec{grad} N_i \cdot \vec{grad} N_j dx dy$$

$$N_{i,j}(n_e, n_e) = \iint_{S_e} L \sigma N_i \cdot N_j dx dy$$

$$P_{i,j}(n_e, m) = \iint_{S_e} \sigma N_i dx dy$$

- Conducteurs massifs (cas axisymétrique) :

$$[M^*] \{A^*\} + ([N^*] - [P^*][R^*][P^*]^T) \partial / \partial t \{A^*\} - [P^*][R^*][C]^T \{I_{phase}\} = 0 \quad (16)$$

$$[\vec{V}] = [C][R^*][C]^T \{I_{phase}\} + [C][R^*][P^*]^T \partial / \partial t \{A^*\} \quad (17)$$

avec :

$$M_{i,j}^*(n_e, n_e) = \iint_{S_e} 2\pi / r v \vec{grad} N_i \cdot \vec{grad} N_j dr dz$$

$$N_{i,j}^*(n_e, n_e) = \iint_{S_e} \frac{\sigma}{r} N_i \cdot N_j dr dz$$

$$P_{i,j}^*(n_e, m) = \iint_{S_e} \frac{\sigma}{r} N_i dr dz$$

- Conducteurs bobinés (cas cartésien) :

$$[M] \{A\} = [P] [C]^T \{I_{phase}\} \quad (18)$$

$$[\vec{V}] = [C][R_1][C]^T \{I_{phase}\} + [C][P]^T \partial / \partial t \{A\} \quad (19)$$

avec :

$$P'_{i,j}(n_e, m) = N_s L / S_k \iint_{S_e} N_i dx dy$$

- Conducteurs bobinés (cas axisymétrique) :

$$[M^*] \{A^*\} = [P^*] [C]^T \{I_{phase}\} \quad (20)$$

$$[\tilde{V}] = [C] [R_2] [C]^T \{I_{phase}\} + [C] [P^*]^T \partial / \partial t \{A^*\} \quad (21)$$

avec :

$$P^*_{i,j}(n_e, m) = 2\pi N_s / S_k \iint_{S_e} N_i dr dz$$

Pour obtenir une forme symétrique [8], on divise les équations du circuit (15), (17), (19) et (21) par le terme  $(-j\omega)$ .

A partir des relations précédentes, on constate certaines limites qui sont liées au développement naturel des équations de Maxwell. En effet, pour un conducteur massif, on utilise une source de tension suite à la présence de courant de Foucault. Pour un conducteur bobiné (sans courants induits), on utilise une source de courant. Afin de contourner ce problème, on utilise la méthode de résolution simultanée qui offre l'avantage de choisir librement le type d'alimentation pour chaque type de conducteur, tout en gardant le système matriciel à résoudre symétrique [1], [2], [9], [10].

**V. APPLICATIONS**

Afin d'illustrer les équations développées et dans un souci de validation, on reprend plusieurs configurations déjà étudiées [2], [11].

*A. Cas axisymétrique :*

*A. 1. Description du cas d'école*

Le dispositif considéré est constitué d'une spire massive de forme rectangulaire et de section circulaire (Fig.1). On calcule le courant dans chaque spire, ainsi que la valeur de l'inductance sous une tension de 0.1V. L'étude est réalisée à une fréquence de 1000Hz.

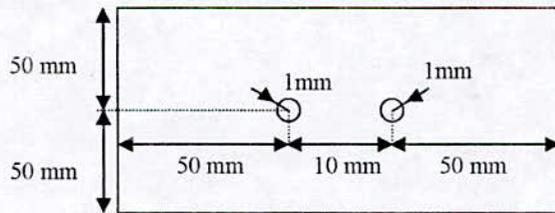


Fig.1 : Géométrie du cas d'école  
 $\rho = 1,85 \cdot 10^{-8} [\Omega m]$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$

Du fait qu'on travaille à une fréquence élevée, le maillage présente certains problèmes [2]. En effet, le potentiel vecteur magnétique présente de forte variation dans l'épaisseur de peau  $\delta$ , dans ce cas il faut au moins deux mailles dans l'épaisseur de peau pour représenter

correctement les phénomènes électromagnétique (Fig.2) et (Fig.3).

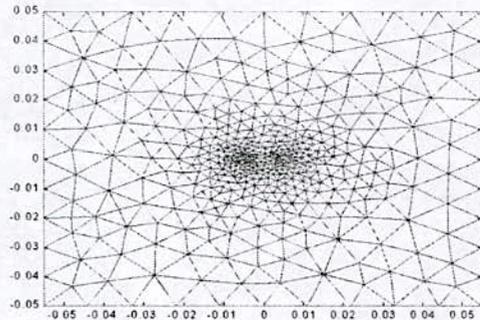


Fig.2 : Maillage initial du domaine d'étude

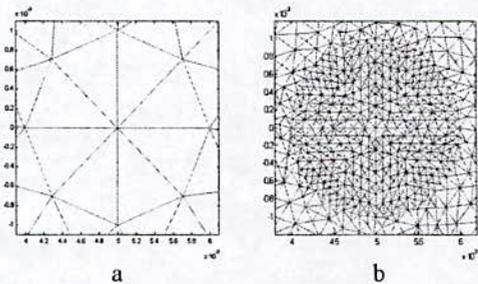


Fig.3 : Zoom du maillage dans la spire (a) initial (b) final après un remaillage adapté

En utilisant les fonctions internes de 'PDE toolbox', on génère les fichiers éléments finis qui contiennent les informations nécessaires au calcul du champ dans la structure électromagnétique. D'autre part, ces outils sont utilisés dans un programme de calcul implémenté sous environnement MATLAB afin de prendre en considération les équations du circuit. On obtient ainsi le système linéaire matriciel symétrique (Fig.4) à résoudre. La matrice de connexion utilisée est donnée par [1], [10] :

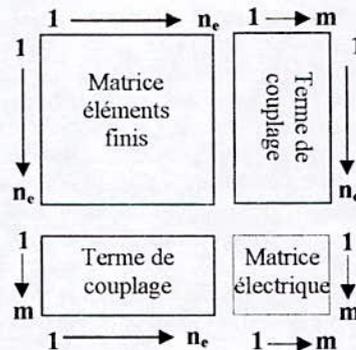
$$[C] = [1 \ -1] \quad (22)$$


Fig.4 : Remplissage de la matrice globale

Tableau.1 : Résultats obtenus pour le cas d' école

Méthode utilisée Valeurs comparées	FLUX 2D	Nos résultats
$I_1$ (en A)	7.46 -28.4°	7.46 -28.1°
$I_2$ (en A)	7.46 151.6°	7.46 151.9°
$L_1$ (en $\mu$ H)	0.506	0.502
$L_2$ (en $\mu$ H)	0.506	0.502

Le tableau.1, regroupe les résultats obtenus. Les grandeurs complexes sont données en module et en phase[2]. On constate une bonne corrélation entre nos résultats et ceux obtenus en référence [2] avec le logiciel FLUX 2D. Il est important de noter que le temps de calcul (par le code implémenté) est considérablement réduit.

A partir de l'équation (1), on détermine la densité de courant dont la répartition à l'intérieur de la spire est représentée sur la Fig.5.

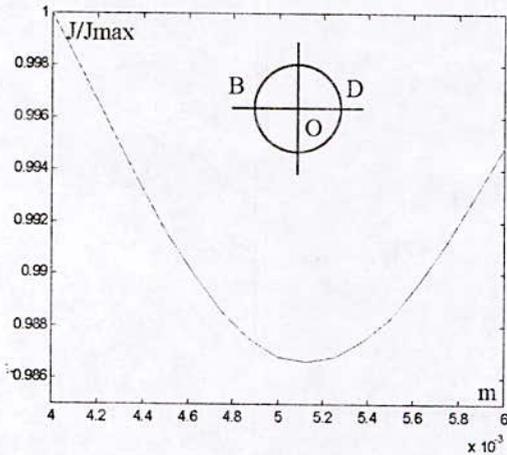


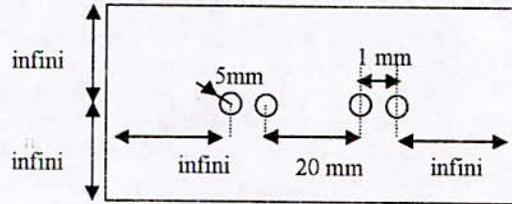
Fig.5 : Répartition de la densité de courant suivant le chemin BOD (en p.u)

Il est important de noter que les auteurs au niveau de la référence [2], présentent deux méthodes pour la résolution du problème couplé. Premièrement, la technique de rebouclage, d'une mise en œuvre facile, et qui nécessite, par contre, des temps de calculs considérables. Une deuxième formulation, qui consiste à résoudre simultanément les équations électriques et magnétiques, mais qui considère comme inconnues à calculer, le potentiel vecteur magnétique en chaque nœud du maillage, la différence de potentiel aux bornes du conducteur massif et le courant dans les régions (courant de maille).

On constate que la matrice de connexion, et avec la manière dont elle est introduite, nous permet de réduire considérablement la taille des matrices. En effet, le calcul se résume à la détermination de la valeur du potentiel vecteur magnétique, et de courant de phase [10].

Le calcul de la différence de potentiel, ou bien du courant de maille est directe, ceci en utilisant les relations (8) et (9).

Comme deuxième application, on considère un inducteur de type pancake à deux spires Fig.6 [11]. Les auteurs de la référence [11] utilisent la méthode des circuits électriques couplés afin de résoudre la problème couplé. Cette méthode est basée sur la subdivision du domaine d'étude en éléments de circuits circulaire et coaxiaux. Le nombre de maille de cette subdivision doit être assez grand pour qu'on puisse considérer que les grandeurs électromagnétiques sont uniformément réparties.

Fig.6 : Géométrie de la deuxième configuration  
 $\rho = 1,85 \cdot 10^{-8} [\Omega m]$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ 

En utilisant le modèle développé, et en procédant de la même manière que pour le cas d'école, on représente sur la Fig.7 la répartition de la densité de courant pour une fréquence de 1kHz.

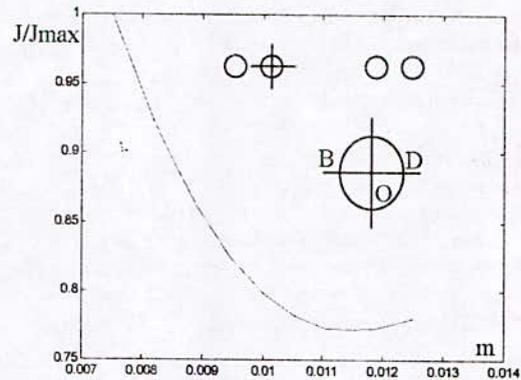


Fig.7 : Répartition de la densité de courant suivant le chemin BOD (en p.u)

On remarque que la répartition de la densité de courant d'une spire seule est modifiée lorsque cette dernière est en présence d'une autre spire. En effet, le résultat obtenu permet d'illustrer l'effet de proximité qui se traduit par une accentuation de la non uniformité de la répartition de la densité de courant.

### B. Cas cartésien

Pour cette dernière application, on considère un inducteur à une spire de section carrée (Fig.8) et (Fig.9).

Le système matriciel symétrique à résoudre est constitué des équations (14) et (15).

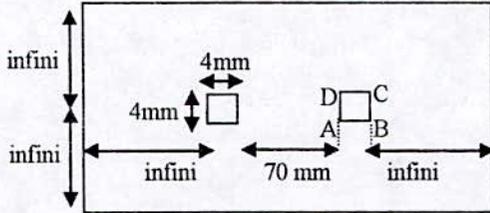


Fig.8 : Forme et dimension de l'inducteur considéré

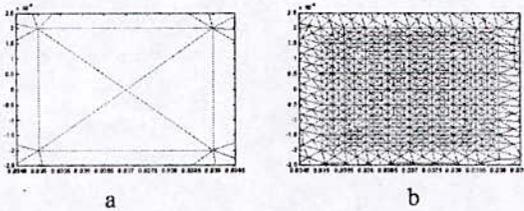


Fig.9 : Zoom du maillage dans la spire (a) initial (b) final après un remaillage adapté

Pour mettre en évidence l'effet de coin qui existe dans les inducteurs à section carrée, on représente sur les figures (Fig.10) et (Fig.11) la répartition de la densité de courant pour plusieurs valeurs de la fréquence. En effet, on constate qu'aux coins de la spire, la densité atteint des valeurs très importante, ce qui engendre une forte résistance [11].

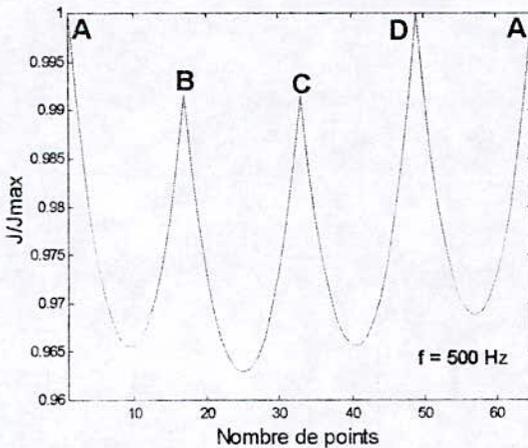


Fig.10 : Répartition de la densité de courant dans un inducteur à une spire de section carrée (en p.u)

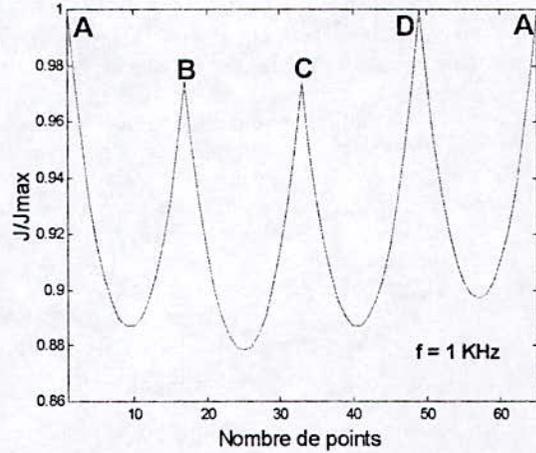


Fig.10 : Répartition de la densité de courant dans un inducteur à une spire de section carré (en p.u)

A partir de ces dernières figures, on remarque que la densité de courant décroît progressivement sur les faces extérieures AB et CD jusqu'à avoir une valeur minimum sur la face BC. On note une bonne concordance entre nos résultats et ceux publiés en [11].

## VI. CONCLUSION

Le travail qu'on a présenté dans cet article concerne la résolution simultanée des équations du champ et du circuit pour la résolution du problème couplé champ-circuit [10].

Cette procédure repose sur une méthode simple de mise en équation d'un système couplé, constitué des équations du champ dans la structure, associées aux équations de circuits. Les équations du champ sont alors établies pour la géométrie de la structure et des caractéristiques des matériaux qui la composent. La méthode des éléments finis en bidimensionnel est employée en association avec une formulation  $\vec{A}-V$  magnétodynamique. Les équations de circuits sont déterminées automatiquement sous forme d'équations d'état à partir de la topologie du circuit. Un travail de validation a été mené pour s'assurer de la justesse du modèle développé.

## VII. REFERENCES

- [1]: M. Jarnieux, « Modélisation de lanceurs électromagnétiques par la méthode des éléments finis », Thèse de doctorat, Institut National de Grenoble, 1994.
- [2]: P. Lombard, « Couplage des équations électriques et magnétiques », Thèses de doctorat, Institut National de Grenoble, 1992.

- [3]: P. Lombard, G. Meunier, « Couplage des équations électriques et magnétiques ». J.Phys.III France 3, Mars 1993, pp.397-412.
- [4]: C. Guerin, « Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs », Thèse de doctorat, Institut National de Grenoble, 1994.
- [5]: J.F. Charpentier, « Modélisation des ensembles convertisseurs statiques-machines électriques par couplage des équations du champ électromagnétique et du circuit électriques », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- [6]: J.F. Charpentier, Y. Lefèvre, H. Piquet, « une méthode générale pour modéliser des convertisseurs statiques associés à des dispositifs magnétiques », J. Phys. III France 7, Novembre 1997, p.2225-2237.
- [7]: N.M. Abe, J.R. Cardoso, "Coupling electric circuit and 2D-FEM model with Dommel's approach for transient analysis", IEEE Transaction on Mangetics, Vol. 34, n° 5, September 1998, p.3487-3490.
- [8]: T. Dreher, G. Meunier, "3D modelling of electromagnets fed by altering voltage sources", IEEE Transaction on Mangetics, Vol. 29, n° 2, March 1999, p.1341-1344.
- [9]: J.K. Sykulski, S. Lepaul, C.S. Biddlecombe, A.P.J. Simkin, "Coupling of motion and circuit with electromagnetic analysis", IEEE Transaction on Mangetics, Vol. 35, n° 3, May 1999, p.1602-1605.
- [10]: H. Bali, « Etude analytico\_numérique du couplage magnétique électrique : application au moteur linéaire », Thèse de magister, Université de Jijel, 2002.
- [11]: B. Maouche, « Etude et développement semi-analytique de l'équation de diffusion Electromagnétique avec terme de déplacement dans le cas de dispositifs axisymétriques excités en courant ou en tension », Thèse de magister, Centre Université de Bejaia, 199.

### VIII. NOMENCLATURE

$\vec{J}$	: densité de courant ;
$\vec{A}$	: potentiel vecteur magnétique ;
$\phi_k$	: potentiel scalaire électrique ;
$\Delta V_k$	: chute de tension aux bornes du conducteur ;
$R_k$	: résistance du conducteur massif pour le cas 2D cartésien ;
$L$	: longueur du domaine suivant la direction perpendiculaire au plan d'étude ;
$I_k$	: courant traversant le conducteur k ;

$R_k^*$	: résistance du conducteur massif pour le cas de la symétrie axiale ;
$\Delta V_k^*$	: chute de tension aux bornes du conducteurs ;
$N_s$	: nombre de brins ;
$\lambda$	: coefficient de remplissage ;
$S_i$	: surface d'un conducteur élémentaire ;
$R_1$	: résistance du conducteur bobiné pour le cas 2D cartésien ;
$R_2$	: résistance du conducteur bobiné pour le cas de la symétrie axiale ;
$[I_{region}]$	: vecteur courant dans les régions ( encoches) ;
$[I_{phase}]$	: vecteur courant de phase ;
$[C]$	: matrice de connexion ;
$[\vec{V}]$	: vecteur de tension ;
$\vec{J}_e$	: densité de courant de Foucault ;
$\vec{J}_0$	: densité de courant imposée ;
$\vec{A}$	: potentiel vecteur magnétique ;
$\mu$	: perméabilité magnétique ;
$\vec{v}$	: terme de vitesse ;
$\vec{B}$	: induction magnétique ;
$\omega$	: pulsation ; $\omega = 2\pi f$ ;
$f$	: fréquence ;
$\hat{t}$	: vecteur unitaire tangent à l'ensemble du bobinage ;
$[R]$	: matrice diagonale telle que $R_{k,k}(m,m)=R_k$ ;
$m$	: nombre de phase ;
$n_e$	: nombre d'éléments ;
$N_i$	: fonctions de pondération « méthode de Galerkin » ;
$[R^*]$	: matrice diagonale telle que $R_{k,k}^*(m,m)=R_k^*$ ;
$[R_1]$	: matrice diagonale telle que $R_{k,k}(m,m)=R_1$
$[R_2]$	: matrice diagonale telle que $R_{k,k}(m,m)=R_2$
$\delta$	: épaisseur de peau , $\delta = \sqrt{2/\omega \mu \sigma}$ ;

# Neuro-Fuzzy Applications in High Voltage Transformer Oil Maintenance

L. Mokhnache <sup>(1)</sup>, P. Verma <sup>(2)</sup>, A. Boubakeur <sup>(3)</sup>, R. Kattan <sup>(4)</sup>

<sup>(1)</sup>University of Batna, Faculty of Engineering, Dept of Electrical Engineering, Batna, Algeria  
lmokhnache@hotmail.com

<sup>(2)</sup>Thapar Institute of Engineering & Technology, Patiala-147 004, India

<sup>(3)</sup>Ecole Nationale Polytechnique, High voltage Lab, Av. Hacène Badi, El-Harrach, Algiers, Algeria

<sup>(4)</sup>Université Libanaise, Faculty of Sciences, Physics Department, Beyrouth, Lebanon

## ABSTRACT

To reduce the ageing experiment time thermal ageing prediction for the oil/paper insulation has been used applying neural networks.

Fuzzy logic has been applied for maintenance decision making of transformer oil and a fuzzy- neural system has been used in transformer oil diagnostic.

**Keywords:** neural networks, fuzzy logic, transformer oil, thermal ageing, diagnosis, prediction, monitoring.

## I. INTRODUCTION

The major losses of power transformers accidental outage for example, amount in general per million dollars without counting the costs associated with repair or replacement of equipment [1]. This requires preventive tests to predict the defects and to establish a program of maintenance and replacement. The preventive maintenance and estimated maintenance include tasks such as diagnosis, monitoring, control and prediction. For the preventive maintenance of the electric material, the detection and the diagnosis of defects are carried out using the interpretation of complex signatures and the prediction of properties is carried out using a rather broad data base of measurements.

Knowledge based power transformer oil diagnosis and classification became popular because of its simplicity, but the application of these standards requires experiences. After the phase of measurements, the expertise makes the decision-making phase critical because there are almost always conflicts in the data, as well as cases of 'un-decisions'. Consequently, the diagnosis of the based- knowledge oil transformer is treated in general like an art instead of a science and also used to be the reference of highly skilful experts [2]. Recommendations of maintenance are also significant after the diagnosis. In general, the knowledge of the defect type or the present state of the insulation is not sufficient. A field maintenance engineer must have

moreover, an idea of the remaining life duration of the equipment. If the estimation can be made with an acceptable precision, he can start to plan the maintenance of the insulation and to decide solutions in advance.

Staying in the field of the power maintenance equipment, the prediction of insulation properties can help considerably to improve the quality of its maintenance. The dielectric behavior of insulation material can be supervised by several measurements of its properties. To predict the state of the insulation, we need a long experimental period to have a rather complete data base in order to give a good quality of prediction.

## II. NEURAL NETWORKS WITH SUPERVISED TRAINING

### A. Architecture

The used supervised networks are multi-layer networks having an input layer, L hidden layers and an output layer. In each one of these layers, the number of neurons varies according to the application and the performances requested from the network. The radial basis function networks present a characteristic in their architecture. They are always used with only one hidden layer. This latter consists of neurons, having each one a vector called center and each input is arranged in one of the classes represented by the neurons of the hidden layer.

### A.1 Radial Basis Function Networks (RBF)

They are networks with only one hidden layer, they are used for the classification and the approximation of functions. The output given by this network has the form [3]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i \phi(\|x - c_i\|) \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

$c_i$  are values which we attribute to each neuron of the hidden layer and called centers of the classes,  $w_i$  are the

synaptic weights connecting these neurons to the outputs,  $n$  is the number of core functions  $\phi$  and  $X$  represents the inputs. The core function that we used is the Gaussian function and the network is thus called networks with radial basis function gaussian (RBFG).

In our study, we trained RBFG networks by the random optimization method (ROM). This method is based on the generation of the random sequences in order to move weights values in space, in search of an optimum. It also makes possible to escape to the local minima [4]. It is given on figure 1 ( $\epsilon_r$  is the tolerated error).

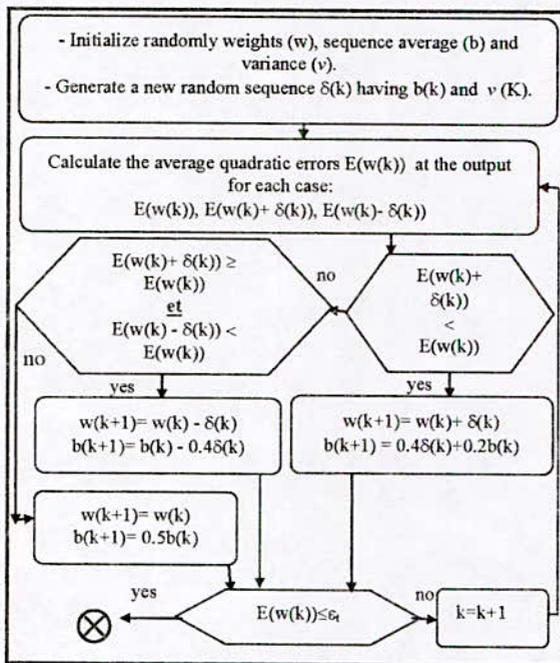


Fig.1 Algorithm of the ROM

### III. FUZZY LOGIC

The central aim of fuzzy logic is modelling the imprecise modes of reasoning that play an essential role in the remarkable human ability to make rational decisions in an environment of uncertainty and imprecision. This ability depends, in turn, on our ability to infer an approximate answer to a question based on a store of knowledge that is inexact, incomplete, or not totally reliable. The main features of fuzzy logic that differentiate it from traditional logical systems are the following [5]:

- The truth values are allowed to range over the fuzzy subsets of  $T$  for example if  $T$  is the unit interval, then a truth value for example 'very true' may be interpreted as a fuzzy subset of the unit interval.
- Fuzzy logic allows the use of fuzzy quantifiers exemplified by 'most', 'many', 'several', 'few', 'much of' and so. Such quantifiers may be interpreted as fuzzy

numbers that provide an imprecise characterization of the cardinality of one or more fuzzy or non-fuzzy sets.

- Fuzzy logic provides a method for representing the meaning of both non-fuzzy and fuzzy predicate modifiers exemplified by 'not', 'very', 'more', 'less', 'extremely', 'a little' and so. This in turn, leads to a system for computing with linguistic variables, that is, variables whose values are words or sentences in a natural or synthetic language. For example, 'age' is a linguistic variable when its values are assumed to be 'young', 'old', 'very young' and so forth.

The basic idea of fuzzy logic is to use fractional degrees of certainty to express the idea that something is more or less a member of a set, making some kinds of approximate reasoning mathematically expressible. For example, fuzzy logic allows us mathematically to draw conclusions from the statement 'there is a lot of water in this sample' without having to be too precise about what 'a lot' means. Because fuzzy logic is easy to understand and apply on a superficial level without any knowledge of mathematics, logic, or control theory; it has become somewhat of a delight.

Fuzzy sets are good at various aspects of uncertain knowledge representation, while neural networks (NN) are efficient structures capable of learning from examples. Both techniques have their advantages and disadvantages, and they can be complementary too. The use of neural nets in applications is very sparse due to its implicit knowledge representation, the prohibitive computational effort and so on.

The key benefit of fuzzy logic is that, its knowledge representation is explicit, using simple 'IF-THEN' relations. However, it is at the same time its major limitation. The oil insulated transformer diagnosis cannot be easily described by artificial explicit knowledge, because it is affected by many unknown parameters. The integration of the fuzzy logic system makes it possible to learn from the prior obtained data sets.

The Fuzzy system has been applied to the electrical insulation and cooling diagnosis using physico-chemical tests database of sampled transformers oil in the Algerian electric network.

It helps to make decision: change the oil, regenerate it, filter it, and keep it and it enables inexperienced engineers to diagnose easily with a good quality of decision and offers its performances to keep the experience of qualified analysts in an intelligent system.

These analysts can make many of the routine policy-level and technical judgements while providing the human expert with the means to investigate farther [6]. In the Quality, Control and Measurements laboratories of SONELGAZ, the used diagnosis of the transformer oil is physico-chemical. The used oil is for the medium and high voltage transformers and is named BOKAK22. The used tests standards are those recommended by IEC.

## IV. OIL/PAPER THERMAL AGEING

It has been established in [7] that the failure rate of transformers is highest for the insulation thermal ageing constraint of oil and paper insulation.

Cellulose and hydrocarbon oil have been used as transformers insulation for many years. Cellulose has been proven to have desirable electrical, chemical and physical properties, and at the same time, it has low cost. The polymeric chains of solid cellulose insulation contain a large number of anhydroglucose rings and weak C-O molecular bonds and glycosidic bonds which are thermally less stable than the hydrocarbon bonds in oil, and which decomposes at lower temperature.

Experiments have been made to measure respectively electrical and mechanical properties of aged samples of oil and paper. Test Cell shown in Figure 2 has been designed for accelerated thermal ageing on oil-paper. The oil taken conforms to the requirements of relevant Indian national specification IS-335 (1993) [8] and the unaged electrical grade paper that of relevant specification IS-9935 (1985) [9]. The oil and paper were supplied by transformer manufacturer. The seven layers of paper were wrapped on to the copper conductor. The paper sample was dried in the vacuum (1 torr) at 70°C for 10 hours, then impregnated with oil. The oil was taken as fresh in this study. Sufficient quantity of oil and paper were put in test cell in the ratio of (20:1) proportion by weight.

The oil was aged with and without paper whereas paper was aged in air and oil. The capacity of the test cell was 3 liters. The test cell was kept in the air circulated oven for accelerated ageing at 120°C, 140°C and 160°C. The temperature control of the oven was within  $\pm 2^\circ\text{C}$ . Oil samples from the test cell were taken out periodically i.e. at 160°C (50, 100, 200, 400, 800 and 1600 hrs), 140°C (100, 200, 400, 800 and 2000), 120°C (300, 600, 1200, 2400 and 4000). After each cycle of ageing, the oil samples were tested for breakdown voltage (BDV) (with an without paper) and the paper for tensile strength.

Also, extensive research on the progressive deterioration of the insulation revealed that such a failure is only due to the Partial discharges. Although, the magnitude of partial discharges may be small, they can cause progressive deterioration and ultimate failure of the equipment. The early detection of partial discharges present in a transformer oil is very important to reduce the losses and it is an important tool for improving the reliability of HV insulation system. It is a very sensitive method for the evaluation of insulation healthiness.

From the above, prediction of partial discharges in transformer oil at different thermal and electrical stress, becomes very important to maintain the equipment by reducing experiments time and cost. Results will be published in [10].

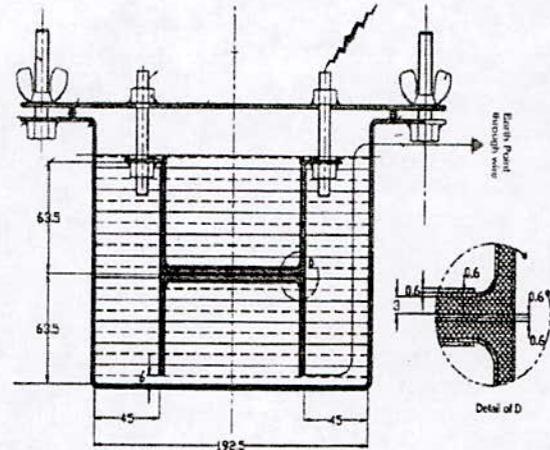


Fig. 2 Test Cell

## V. NEURAL NETWORKS IN PREDICTION

In this application, the used neural network is the radial basis function Gaussian one (RBFG).

The RBFG networks constitute efficient models for the function generalization. The use of the Gaussian function allows benefiting from its local characteristic to facilitate the training and improve the generalization. The most important advantage of this technique is that the network has always one hidden layer [11].

Giving a set of input and output data  $x_i, y_i, i=1,2,\dots,n$ , the state of the hidden unit  $j$  will be denoted by:

$$\rho_j(x_i) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - c_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\right) \quad (2)$$

where:  $c_{ij}$ :  $i=1,\dots,n$  and  $j=1,\dots,m$  are the RBFG centers.  
 $\sigma_{ij}$ : define the widths of the Gaussians.

The RBFG centers are vectors of  $n$  dimensions; they can be selected from the training data by some mechanisms [12]. In our case, training with the ROM, we have used a simple technique that consists of an arrangement of these centers in a regular trellis in order to cover uniformly the data space input.

The network response  $y^*$  is given by:

$$y^* = \frac{\sum_{j=1}^n w_j \rho_j(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \quad (3)$$

where  $\left(\sum_{j=1}^n \rho_j(u)\right)$  is a normalizing factor, and  $w_j$  is the

weight connection between the hidden unit  $j$  and the output unit. The introduction of a normalization factor,

which is a common quality between all the neurons, gives for each neuron its own data and also information about the other neurons.

The chosen network is trained by Random Optimization Method (ROM), which is based on the generation of random sequences in the aim to move the synaptic weights in the space to find an optimum. It is more suitable in some cases where the error function has several minima.

Notice that the ROM converges to a global minimum with a probability equal to 1 in a compact set. The idea of this algorithm is to attribute to the net weights a set of a white noise sequence and then compute the network output. If the target output is less than the previous error, the new weights are kept; otherwise, the previous weights are kept until the desired error is obtained.

To predict a future value  $y_{n+1}$  of a set of measured data  $y_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , the algorithm will be trained on a set of samples having the form  $(y_i, y_{i+1})$ ,  $i=1, \dots, n-1$ . After this training, the weights of the net are updated so as when the network receives the value  $y_i$ , its response will be  $y_{i+1}$ . This procedure is repeated until the prediction of all values is obtained.

#### A. Results and discussion

We present in figure 3 the effect of thermal aging on tensile strength of paper aged in oil and in air for three aging temperatures 120, 140 and 160°C. The learning time is the maximum aging time for each temperature: 1600h for the temperature 160°C, 2000h for 140°C and 4000h for 120°C. The prediction is done respectively for a period of 800 h, 1000h, 2000h for 160°C, 140°C, 120°C.

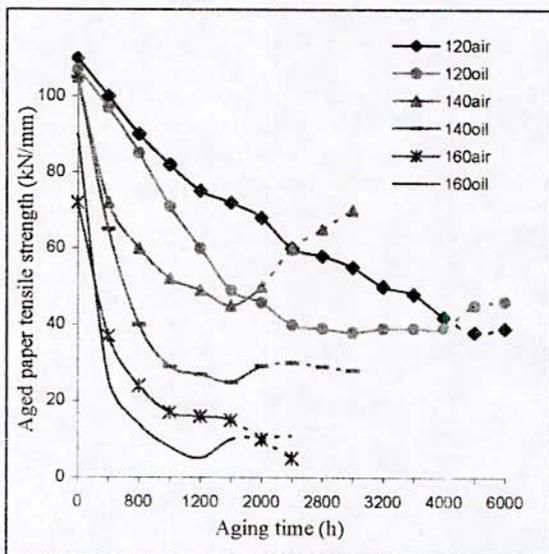
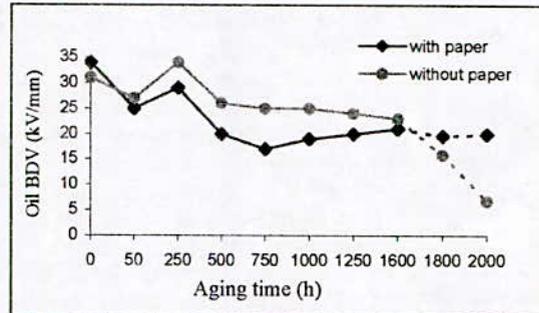
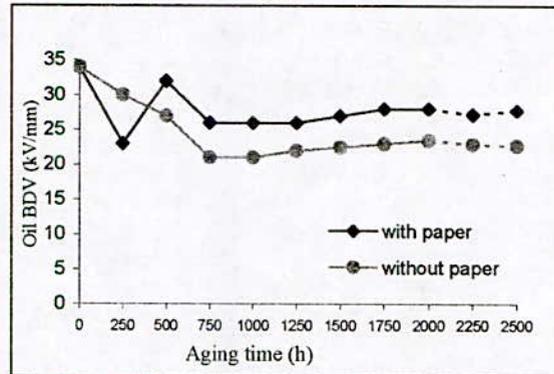


Fig.3 Prediction of tensile strength of paper aged in air and in transformer oil under different temperatures ranging from 120 to 160°C

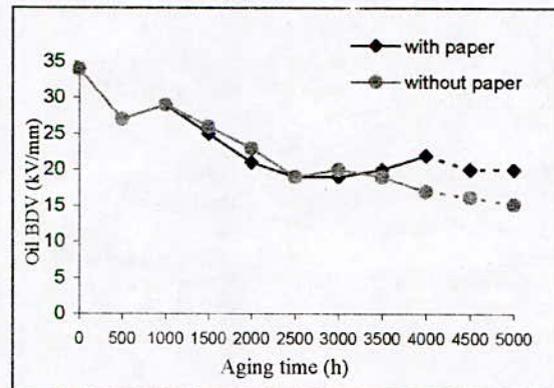
In figure 4 (a,b,c), it can be seen that initially the oil breakdown voltage (BDV) decreases and then increases upon further ageing. This trend may be due to moisture in the oil, which is removed after continued ageing. Moisture is recognized to be "enemy number one" for transformer insulation [13].



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 BDV of Oil versus aging time for different aging temperatures.  
(a)160°C - (b)140°C - (c)120°C

In figure 4, the learning time is the same as in the case of figure 2 and the prediction period is respectively 400h, 500h, 1000h for 160°C, 140°C, 120°C. For illustration, we

present in figure 5 results where the RBFG net predicts the BDV till 7000 hours.

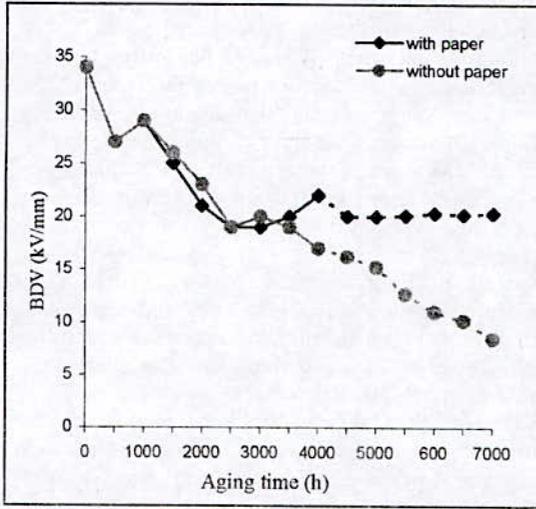


Fig. 5 prediction of BDV of oil for a 7000h aging time for the temperature 120°C

## VI. FUZZY LOGIC IN TRANSFORMER OIL DIAGNOSIS

### A. Fuzzy system parameters definition

#### A.1 Used physico-chemical tests and decisions

The physico-chemical tests are defined by their linguistic variables as:

**C** = oil colour      **TE** = water content,  
**AD** = total acidity,    **PD** = dielectric losses factor,  
**VC** = viscosity,      **RD** = dielectric strength.

The output 'D' corresponding to one of the four diagnosis and decisions by sample, is defined by the following intervals:

- For  $D \leq 1.25$ : good properties of the oil, keep it.
- For  $1.25 < D \leq 2.25$ : highly polluted oil, the oil should be regenerated.
- For  $2.25 < D \leq 3.25$ : polluted oil, necessary to a treatment by filter or dehydrate it.
- For  $D > 3.25$ : degraded properties, change the oil.

#### A.2 Input Classification Intervals

The used intervals for classifying the physico-chemical tests are given by IEC standards and the ones marked by (\*) are defined from the analyst experience [14] (Tab.1):

TABLE 1 Input Classification Intervals

« C is transparent »	TR	$C \leq 1.5$
« C is yellow »	YE	$1.5 < C \leq 2.5$
« C is orange »*	ORA	$2.5 < C \leq 3.5$
« C is brown »	BR	$3.5 < C \leq 4.5$
« VC is low »	LO	$VC < 8.75$
« VC is average »*	AV	$8.75 \leq VC < 12.15$
« VC is high »	HI	$VC > 12.15$
« AD is low »		$AD < 0.03$
« AD is average »*		$0.03 \leq AD < 0.09$
« AD is high »		$AD \geq 0.09$
« RD is low »		$RD < 39$
« RD is average »*		$39 \leq RD < 49$
« RD is high »		$RD \geq 49$
« PD is low »		$PD \leq 0.04$
« PD is average »*		$0.04 < PD \leq 0.095$
« PD is high »		$PD \geq 0.095$
« TE is low »		$TE < 30$
« TE is average »*		$30 < TE \leq 36$
« TE is high »		$TE > 36$

The used intervals for classifying the physico-chemical tests are given by IEC standards and the ones marked by (\*) are defined from the analyst experience:

#### A.3 Rules

We have obtained 11 rules from SONELGAZ laboratory and they are given in Table 2. To establish them, we have used Mamdani method with the fuzzy compositional operator 'min' for the 'AND'. The fuzzy output indicates the taken decision. This latter is obtained by using the 'min' operator too. In general, one rule by itself doesn't do much good. What are needed are two or more rules that can play off one another. The output of each rule is a fuzzy set. The output fuzzy sets for each rule are then aggregated into a single output fuzzy set. Finally the resulting set is defuzzified, or resolved to a single number. In the Fuzzy Logic Matlab toolbox, there are five parts of the fuzzy inference process: fuzzification of the input variables, application of the fuzzy operator (AND or OR) in the antecedent, implication from the antecedent to the consequent, aggregation of the consequents across the rules, and defuzzification [14].

TABLE 2 Rules table

Rule N°	C	VC	AD	RD	PD	TA	Decision
1	BR	-	-	LO	HI	HI	change
2	TR	LO	-	HI	LO	AV	keep
3	TR	LO	AV	HI	LO	AV	keep
4	YE	AV	HI	HI	LO	AV	filter
5	YE	HI	AV	HI	LO	AV	keep
6	YE	AV	AV	AV	LO	HI	regenerate
7	BR	AV	HI	LO	HI	AV	change
8	TR	AV	AV	HI	LO	AV	keep
9	OR	AV	AV	AV	LO	AV	regenerate
10	YE	HI	LO	HI	LO	HI	keep
11	OR	AV	HI	AV	HI	-	regenerate

### B. Tests and results

For testing the applied fuzzy system, the following transformer oil sample tests have been introduced as: (C=2, VC=11.45, AC=0.11, RD=50, PD=0.025, TE=35). Using the 'min' method for rules and the 'max' for the fuzzy system output and after the defuzzification using the gravity centre method, the fuzzy controller outputs a value of 2.75 (Fig.6), which indicates that the oil is polluted and it is necessary to treat it by filter or dehydrate it. The application of fuzzy system has presented a big simplicity comparing to the used neural networks (NN)[15,16], but this happened thanks to the exact knowledge of the rules. If the rules are not exactly known, the learning ability of NN presents the best solution. The fuzzy logic has allowed the rules to be configured in a more natural language-type of structure, which is convenient.

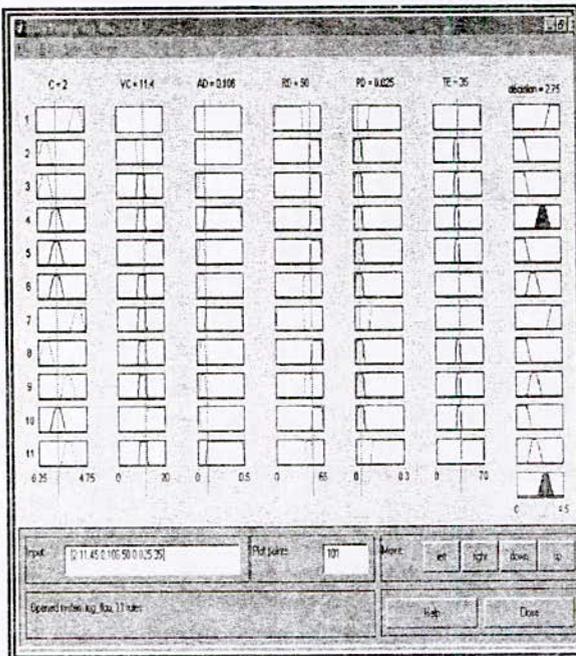


Fig.6 Rules test using the membership graph using The 'min' method

Utilities invest significant time and finances into equipment monitoring and maintenance in order to anticipate failures or accelerated aging in power equipment. Such monitoring includes regular insulation condition tests for switching devices, power transformers, generator windings and so on. In general, many of the indicators of equipment condition are imprecise and/or unreliable. Engineers must have considerable experience before that analysis tests become useful. Several utilities have developed expert systems and artificial intelligence to codify this experience and improve knowledge of the diagnosis transformer oil.

The oil insulated transformer diagnosis cannot be easily described by artificial explicit knowledge, because it is affected by many unknown parameters. The integration of NN in the fuzzy logic system makes it possible to learn from the prior obtained data sets.

The Fuzzy-Neural system has been applied to the electrical insulation and cooling diagnosis and decision making using physico-chemical tests database of sampled transformers oil in the Algerian electric network.

The maintenance decisions of the insulated oil (change the oil, regenerate it, filter it, and keep it) are given by a fuzzy system, which help the neural net to make diagnostic. The proposed diagnosis system gives accurate diagnostics. It enables inexperienced engineers to know the oil default origin easily with a good quality of decision [17].

### A. Tests and decision making results

Using the same fuzzy system presented above and for testing the applied fuzzy system, the following transformer oil sample tests have been introduced as: (C=2, VC=11.45, AC=0.11, RD=48, PD=0.025, TE=35). The fuzzy system outputs a value of 2.75 as given in Figure.6, which indicates to filter the oil.

The neural networks present prospects for application particularly interesting for the assistance to the diagnosis with external signatures. The preventive maintenance and estimated maintenance include tasks such as monitoring, diagnosis, control. For the preventive maintenance of the electric insulations, the detection and the diagnosis of defects are carried out using the interpretation of the complex signatures [18].

Strategies based on statistics of maintenance aim in general, to reduce the number of failures, the cost of failure and the cost of associated repair. The execution of a maintenance strategy provides possibilities to acquire the first indications of the equipment change. These indications can be of great importance in the detection of insulation properties deviations, early and before they do not present dangers or losses.

In this part of work, the neural bloc receives the fuzzy bloc output (maintenance decision) as one of its inputs as appeared in figure 7. The learning is done having as input

the same physico-chemical set adding the maintenance decision. The neural system outputs a value ranging from 0.5 to 4.5 for the different situations: dissolved moisture in the oil, dust in suspension, thermal ageing, oxidation.

The output intervals are ranged as:

- Dissolved moisture: 0.5-1.5
- Dust in suspension: 1.51-2.5
- Thermal ageing: 2.51-3.5
- Oxidation: 3.51-4.5

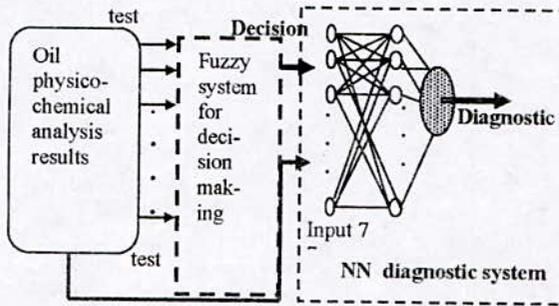


Fig.7 General scheme of the used fuzzy-neuro system for diagnostic

### B. Monitoring of oil in service

It is essential to examine periodically a dielectric allowing accounting for its evolution in service. It is difficult to lay down an absolute rule, valid in all the cases, and thus we give only general directives leaving to each one the care to adapt them to its particular case in dependence on the possibilities of interruption in service and the value of the installed material and the cost price of these examinations, etc. Also, let us note that it is essential to preserve all the results of each examination, because it is often more useful to know how the situation develops than to refer to limits established in the absolute which leads in most of time to the arbitrariness. The diagnosis related to the six physico-chemical tests is given below for each one.

#### B.1 Dielectric strength

In general, a lowering of the dielectric strength is due to a pollution of the dielectric by dissolved moisture and/or dust in suspension. The various processes of treatment whose application is done according to the degree of pollution and the level of quality to be restored, aim ensuring simultaneously a filtering and a dehydration of the dielectric liquid. We give in Table 3 the limiting values of the breakdown voltage of oil given in IEC 156.

#### B.2 Water content

As soon as it exceeds a certain limit (Tab.3), the moisture present in oil can generate a strong reduction in dielectric strength. The elimination of this water calls upon rather complicated processes of treatment (ISO R 760).

#### B.3 Dielectric loss factor ( $\text{tg}\delta$ )

The increase in the dielectric loss factor results from multiple factors. Often the treatments of filtering and dehydration, have a beneficial action on the factor of dielectric loss (IEC 250) (Tab.3).

TABLE.3 Limit values of dielectric strength, water content and dielectric loss factor of the transformer oil

Nominal voltages	$U_N \leq 36 \text{ kV}$	$36 < U_N \leq 70$	$70 < U_N \leq 170$	$170 < U_N$
Minimal limiting values of dielectric strength of oil [kV]	30	35	40	50
Maximum limiting values of the water content of oil [ppm]	40	35	30	20
Maximum limiting values of $\text{tg}\delta$ at $90^\circ\text{C}$ and $50 \text{ Hz}$	1.5	0.8	0.5	0.2

#### B.4 Index of neutralization

The neutralization index of insulating oils increases gradually according to thermal ageing. The limiting value of safety is of  $0.5 \text{ mgKOH/g}$ , beyond which one can fear unexpected modifications (IEC 296).

#### B.5 Color and cinematic viscosity

The evolution of color index from 1 to 4 for aged oil [12] is due to the oxidation of oil in service which has as a consequence the formation of acid products (Tab.4) (1: pure white and 3: pale lemon). Cinematic viscosity does not vary much during ageing (Tab.4) and the minimal limiting value is 10.5 (standard NF-T-60 100).

TABLE.4 Color index and cinematic viscosity of oil before and after ageing

States of oil	Index of color	Cinematic viscosity (cst)
New	1	12.54
Aged at $80^\circ\text{C}$	1-2	12.54
Aged at $120^\circ\text{C}$	3-4	12.49

### C. Diagnostic results using fuzzy-neuro system

The same input vector used in the testing phase fuzzy set is presented to the neural set as a test vector. The NN output gives 0.92, which indicates that the oil is polluted by dissolved moisture. This result justifies the decision made by the fuzzy set: filter the oil. The application of a neural network at this step is done because there are no exact rules for diagnostic in a general term. We need to have more specific information which can constitute a huge set of rules. For example the geography of the area from where the oil has been sent, functioning conditions, history of the oil... In this situation the learning ability of NN presents the best solution.

### VIII. CONCLUSION

Prediction of transformer oil/paper thermal ageing may help considerably to improve its maintenance. When the oil is in contact with paper, the BDV of oil shows increasing trend for short period.

The ageing process of insulation can be monitored by several properties measurements, which need long test period to have a complete database to predict the dielectric behaviour of the HV insulation. The use of neural networks in prediction reduces the time of ageing tests which are expensive.

Prediction of partial discharges in transformer oil at different thermal and electrical stress, becomes very important to maintain the equipment by reducing experiments time and cost.

Fuzzy system has been developed for transformer oil maintenance recommendations. The insulation maintenance is done using physico-chemical oil tests, and manipulated them according to defined fuzzy membership functions, and concludes maintenance recommendations based on fuzzy calculation. Knowing the inference engine of rule-based diagnosis, the use of fuzzy logic has presented a notable flexibility.

The limitations of the traditional methods of transformer oil diagnosis are due primarily to their strong dependence on the human experiment, from where the fuzzy-neural hybrid system can bring good solutions.

The fuzzy-neural system presents a good tool in diagnosis for the new un-experienced analysts to make the good decisions concerning the oil maintenance and in a reduced time. A correct diagnostic allows making required monitoring program for oil.

This study will help to assess the health of transformer and therefore, appropriate action can be taken well in advance to save the life of transformers.

Another work is being carried out on the application of neuro-fuzzy system in prediction of transformer oil thermal ageing [19].

### IX. REFERENCES

- [1] C. Myers, 'Transformers – Condition Monitoring by Oil Analysis, Large or Small; Contentment or Catastrophe', Proceedings of the 1st IEE/MecE Int.Conf. on Power Station Maintenance – Profitability through Reliability, pp.53-58, 1998.
- [2] Z. Wang, 'Artificial Intelligence Applications in the Diagnosis of Power Transformer Incipient Faults', Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia In partial fulfilment of the requirement for the degree of Polytechnic Institute and State University Doctor of Philosophy In Electrical Engineering, Aug. 8, 2000.
- [3] J.S. Jang, C.T. Sun, E. Mizutani 'Neuro-Fuzzy and soft computing', Prentice Hall, N. J, 1997.
- [4] L. Mokhnache, A. Boubakeur, A. Feliachi, 'Thermal Ageing Prediction of Transformer Oil and PVC of High Voltage Cables Using Neural Networks', IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology – PP 107-112, Volume 150, Issue 03. May 2003.
- [5] Zadeh L.A., 'Fuzzy logic', IEEE-Computer, April 1988, pp: 83-93.
- [6] L.Mokhnache, A.Boubakeur, N. Nait Said, 'Some Neural networks Paradigms In Insulating Transformer Oil Maintenance decision', 2<sup>nd</sup> EPE (Electrical & Power Engineering), Tomul XLVIII(LII), pp. 285-290, Nov.2002, Iasi, Romania.
- [7] MSA Minhas and al, "Failures in power system transformers and appropriate monitoring techniques", High voltage Engineering symposium, published by IEE N° 467, PP. 1.94.S23, August 1999.
- [8] IS: 335 – 1993 "New Insulating Oil"(Bureau of Indian Standard).
- [9] IS: 9335 (Part iii Section1), "Cellulosic Papers for Electrical purposes" (Bureau of Indian Standard).
- [10] L.Mokhnache, P. Verma, A. Boubakeur, 'Prediction Of Partial Discharges In Transformer Oil Using Artificial Neural Networks', ISH05, Beijing,-China, 2005
- [11] L. Mokhnache, P. Verma, A. Boubakeur, 'Neural Networks In Prediction Of Accelerated Thermal Ageing Effect on Oil/Paper Insulation Tensile Strength', Int. Conf. on Solid Dielectrics (ICSD04), ID208, IEEE-DEIS, , Jul. 2004, Toulouse, France.
- [12] L.Mokhnache, 'Application des réseaux de neurones dans le diagnostic et la prédiction des isolations de haute tension', thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Labo de HT, Jan. 2004
- [13] I. Fofana, V. Wasserberg, H. Borsi, and E. Gockenbach, "Challenge of mixed insulating liquids for use in high- voltage transformers, part-2: Investigations of mixed liquid impregnated paper insulation". IEEE Electrical insulation magazine, 18(4), pp 5-16, 2002.
- [14] Mokhnache L., Kada Ch., Boubakeur A., Naït Said N., 'Fuzzy Logic System for Oil Insulated Transformer Diagnosis', 5<sup>th</sup> QRM2004, Oxford April 2004, pp:89-92.

- [15] L. Mokhnache, A. Boubakeur, N. Nait Said, '*Diagnosis Of Transformer Oil Using Some Neural Networks Algorithms*', 4<sup>th</sup> International Conference "Quality Reliability Maintenance" QRM2002 Oxford March 2002, pp:191-194.
- [16] L. Mokhnache, A. Boubakeur, N. Nait Said, 'Comparison of Different Neural Networks Algorithms Used in the Diagnosis and thermal ageing prediction of Transformer Oil', IEEE-SMC proceedings, paper ID: REG-485, Oct. 2002, Hammamat, Tunisia.
- [17] L. Mokhnache, A. Boubakeur, 'Fuzzy-Neural System for Oil Insulated Transformer Diagnosis and Maintenance', COMADEM'04, Cambridge, Aug. 2004.
- [18] Zwielsein G., 'Diagnostic des défaillances théorie et pratique pour les systèmes industriels', *Edition Hermès*, 1995.
- [19] Mokhnache, A. Boubakeur, P. Verma, R. Kattan, 'A Neuro- Fuzzy system for thermal ageing prediction of paper/oil Insulation Properties', COMADEM05, Birmingham 2005

# MODELISATION D'UNE DECHARGE SURFACIQUE DANS UN SYSTEME CERCLE -CERCLE SOUS TENSION ALTERNATIVE

S. BOUAZABIA\*, L. HADJOUT, M. BOULAHBAL

[sbouazabia@usthb.dz](mailto:sbouazabia@usthb.dz), [lhadjout@yahoo.fr](mailto:lhadjout@yahoo.fr), [mouradboulahbal@yahoo.fr](mailto:mouradboulahbal@yahoo.fr)  
[sbouazabia@yahoo.fr](mailto:sbouazabia@yahoo.fr), [lhadjout@usthb.dz](mailto:lhadjout@usthb.dz), [mboulahbal@usthb.dz](mailto:mboulahbal@usthb.dz)

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene  
Faculté d'électronique et informatique  
Département d'électrotechnique  
BP 32 El Alia Bab-Ezzouar

## Résumé

Le travail présenté, dans ce papier, consiste à reproduire par simulation la décharge surfacique, dans un système de deux électrodes circulaires concentriques, en se basant sur des essais expérimentaux. Nous développons un modèle pour simuler l'évolution de la décharge dans le système étudié. Ce modèle utilise la méthode des éléments finis pour le calcul du champ et tient compte du caractère aléatoire de la progression de la décharge. La forme de la décharge est quantifiée par sa dimension fractale.

**Mots Clés :** décharge électrique, dimension fractale, effet couronne, éléments finis.

## Introduction

Les décharges électriques ont de tout temps fasciné l'homme de par la complexité de leur forme et leur origine [1 à 5]. Elles se manifestent lorsque des contraintes limites, dépendant de divers paramètres électro-géométriques (dimensions géométriques de l'échantillon, type et durée d'application de la tensions etc..) et des caractéristiques physico-chimiques du matériau, sont atteintes. Parmi toutes les contraintes, le champ électrique reste le facteur le plus important.

Ces décharges électriques constituent un phénomène destructeur pour les isolants. Leur forme et trajectoire sont imprévisibles. Ce qui fait d'elles un phénomène aléatoire, elles apparaissent, dans certains cas, sur les surfaces des matériaux diélectriques et conduisent à leur détérioration partielle ou totale. Les traces de la

décharge ressemblent à des canaux ramifiés de faibles diamètres appelées "*figures de Lichtenberg*".

Plus récemment [4, 5], des études sur la modélisation des décharges électriques ont été entreprises. Elles se sont intéressées à la propagation de la décharge, en particulier sa forme moyennant des relations mathématiques permettant de les décrire et les quantifier.

Dans ce travail, nous reproduisons par simulation la forme de la décharge surfacique, dans un système d'électrodes cercle-cercle concentriques que nous comparons avec les résultats expérimentaux obtenus. Le modèle élaboré utilise la méthode des éléments finis pour le calcul de la répartition du champ.

On s'intéresse à l'évolution de la décharge, en tenant de son caractère aléatoire, depuis son initiation (effet couronne) jusqu'à la disruption totale.

Nous examinons, en particulier, sa forme et sa dimension fractale, en introduisant, comme critère de propagation, le champ seuil d'initiation (champ critique d'apparition de l'effet couronne).

## I Dispositif expérimental

Le dispositif d'essais est constitué d'une source haute tension alternative (100kV, 2kVA, 50Hz), d'un modèle plan circulaire et d'un système optique de visualisation et d'acquisition d'images.

Le modèle expérimental est constitué d'une plaque en verre circulaire de 28 cm de diamètre et 8 mm d'épaisseurs sur laquelle sont placées deux électrodes circulaires concentriques à l'axe de la plaque, en papier aluminium, d'épaisseur 3 $\mu$ m (fig. 1).

L'électrode interne est reliée à la haute tension et l'électrode externe est mise à la terre.

Les essais sont réalisés dans un laboratoire complètement obscur afin de visualiser, grâce à un dispositif optique constitué d'un caméscope relié à un moniteur TV, l'effet couronne et la décharge.

Pour un rayon interne  $R_1$  et une distance inter électrodes  $D$  (ou rayon externe  $R_2$ ,  $R_2$  étant égal  $R_1+D$ ) donnés, nous relevons la tension seuil d'apparition de l'effet couronne et la tension de disruption. Les valeurs présentées dans ce papier représentent la moyenne d'un minimum de cinq essais.

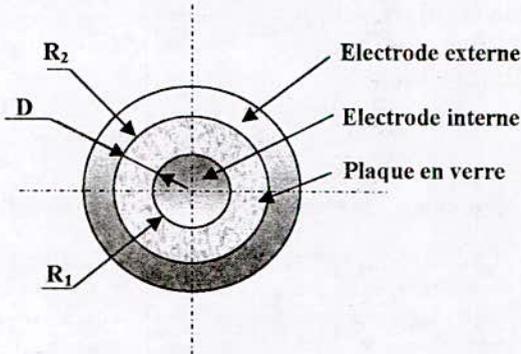


Fig. 1 : Modèle expérimental

## II. Modélisation

La répartition du potentiel est décrite par l'équation de Poisson donnée par :

$$\Delta v = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

En négligeant les charges d'espaces, et en considérant l'évolution de la décharge dans un plan  $(x, y)$ , l'équation aux dérivées partielles à résoudre est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

La résolution de cette équation est basée sur la méthode des éléments finis, utilisant la formulation variationnelle, conduit à la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie.

Pour simuler l'évolution de la décharge, nous adoptons les hypothèses suivantes:

- la décharge est un canal conducteur. Toutes les branches rajoutées à la décharge sont mises au potentiel de l'électrode interne.
- la décharge évolue, par saut, des points de champ intense vers des points de plus faible intensité. A chaque saut la répartition du champ est

recalculée en résolvant l'équation de Laplace et en tenant compte des nouvelles conditions aux limites induites par la décharge;

- la propagation est aléatoire. La décharge progresse lorsque le champ en son extrémité est supérieur au champ qui l'a initié (champ seuil d'apparition de l'effet couronne);

Les éléments adoptés pour le maillage sont de forme triangulaire (fig. 5). Dans chaque élément, le potentiel est approximé par des polynômes bilinéaires de premier ordre.

Les conditions aux limites, à l'initiation de la décharge, sont:

$$\begin{cases} v(R_1) = U \\ v(R_2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ces conditions changent avec la propagation de la décharge. En effet, toute branche rajoutée se retrouve reliée à la borne haute tension. Le potentiel le long de cette ramification est donc pris égal à  $U$ .

La répartition du champ électrique est déduite de la relation champ potentiel

$$\vec{E} = -\text{grad}v \quad (4)$$

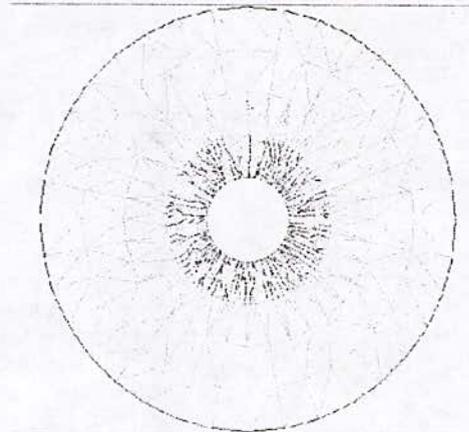


Fig. 2 : Maillage pour calcul

Pour simuler l'évolution de la décharge, nous avons élaboré un second maillage, semi régulier, constitué de  $n$  rayons et  $m$  angles égaux (fig. 3).

La décharge démarre de l'électrode interne et se développe vers l'électrode externe. Pour une extrémité de la décharge  $M$  (fig. 3) d'abscisses matricielles  $(i, j)$ , la décharge peut évoluer

aléatoirement vers les trois points A, B et C d'abscisses respectives  $(i+1, j+1)$ ,  $(i+1, j)$  et  $(i+1, j-1)$ , selon le critère de propagation défini par:

$$E(i, j) > E_c(1 - \delta) \quad (5)$$

$E(i, j)$ : le champ au point considéré.

$E_c$ : le champ critique, il est égal au champ seuil d'apparition de l'effet couronne.

$\delta$ : variable aléatoire à générer. Celle-ci est donnée par:

$$\delta = \lambda \ln x \quad (6)$$

avec  $\lambda$ : paramètre de la loi exponentielle dépendant du phénomène physique.

$x$  variable aléatoire générée par la loi uniforme (random)

La comparaison entre les tensions de disruption obtenues expérimentalement et les tensions simulées a montré que pour une tension alternative 50hz,  $\lambda=0,4$  est la valeur la plus indiquée [4]

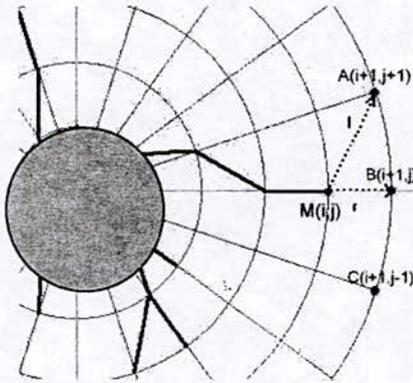


Fig. 3 : Progression de la décharge

L'image de la décharge est quantifiée par sa dimension fractale. Celle-ci représente le rapport entre la surface occupée par la décharge et la surface totale sollicitée à la  $i$ ème étape. Elle est calculée par [6]:

$$D_f = \frac{\text{Log}(\text{Nb}(i))}{\text{Log}(\text{Lon}(i))} \quad (7)$$

avec  $\text{Nb}(i)$  et  $\text{Lon}(i)$  représentent respectivement le nombre de branches et la longueur totale de ces branches à la  $i$ ème étape.

Le programme de simulation est établi selon l'organigramme donnée en fig. 4:

### III. Résultats a) Expérimentaux

La tension seuil d'apparition de l'effet couronne croit lorsque le rayon interne ou la distance inter électrodes augmentent (fig. 5). Par contre, le champ seuil, déduit de ces précédentes caractéristiques, et obtenu par un calcul par éléments finis, diminue lorsque ces deux paramètres augmentent (fig. 6).

La tension de disruption croît avec la distance inter électrodes et le rayon interne (fig. 7). Ces résultats prouvent, d'une façon claire, la dominance et l'influence prépondérante du champ électrique dans l'initiation et la propagation jusqu'à la disruption du système utilisé.

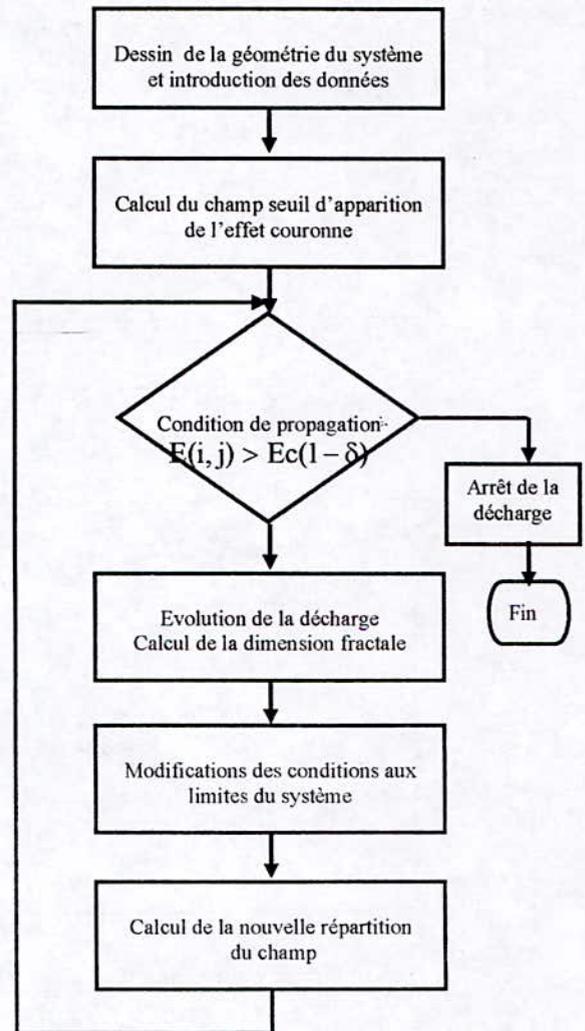


Fig. 4 : Organigramme de simulation

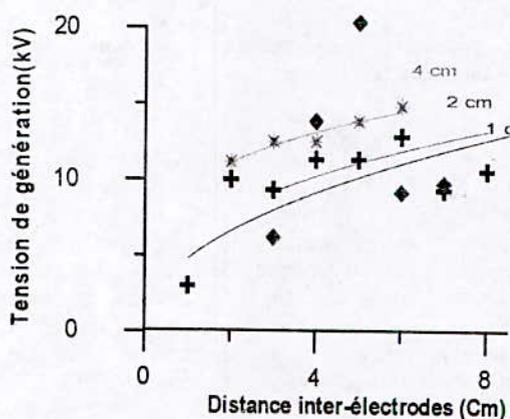


Fig. 5 : Tension seuil d'apparition de l'effet couronne en fonction de la distance inter-électrodes

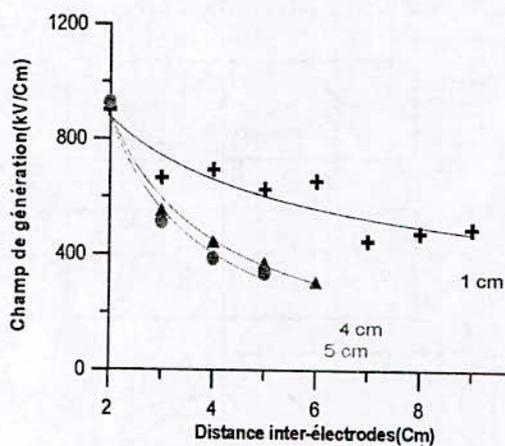


Fig. 6 : Champ seuil d'apparition de l'effet couronne en fonction de la distance inter-électrodes

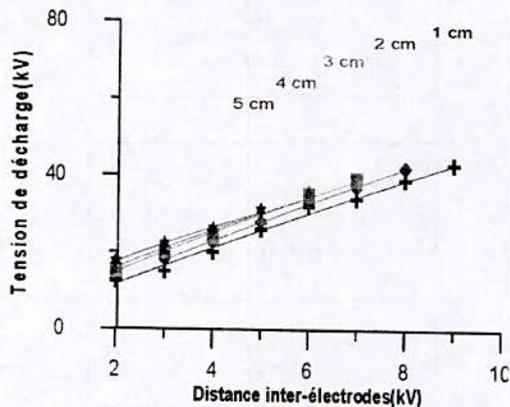


Fig. 7 : tension de disruption en fonction de la distance inter-électrodes

#### b) Simulation

Les formes des décharges ainsi que la variation de leur dimension fractale, pour différentes distances inter-électrodes et rayons internes, sont représentées sur les figures (8 à 13). Nous constatons que ses figures sont identiques aux observations expérimentales rencontrées dans la littérature[1, 5]. De plus, la dimension fractale reste toujours comprise entre 1 et 2. Elle diminue au fur et à mesure que la longueur de la décharge augmente. En effet, la décharge, touffue au départ, se ramifie de plus en plus devenant plus filamentaire.

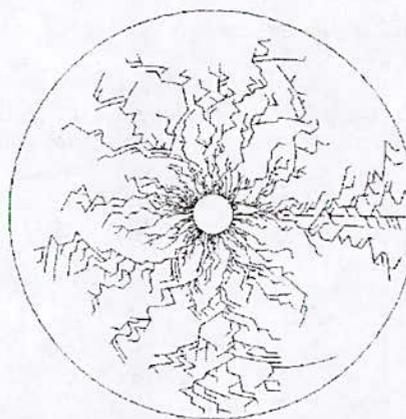


Fig. 8 : Décharge pour  $R1=1\text{cm}$ ,  $D=9\text{cm}$   
Tension appliquée 40 kV  
Tension expérimentale= 43 kV

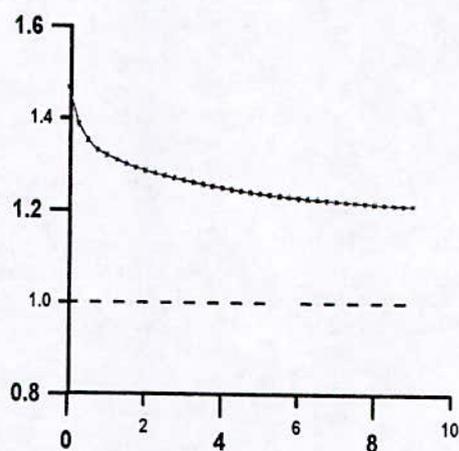


Fig. 9 : Variation de la dimension fractale en fonction de la distance inter-électrodes pour la fig. 8.

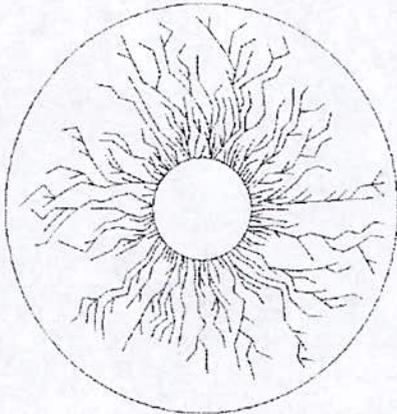


Fig. 10 : Décharge pour  $R1=1\text{cm}$ ,  $D=3\text{cm}$   
Tension appliquée 12kV  
Tension expérimentale= 25 kV

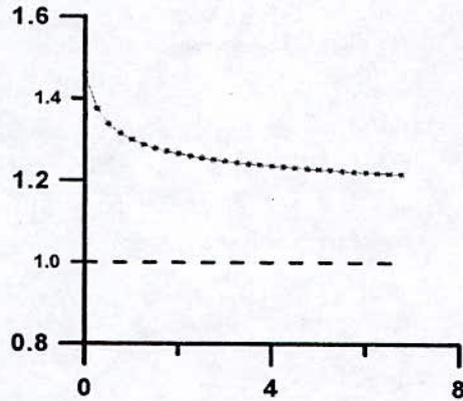


Fig. 12 : Variation de la dimension fractale en fonction de la distance inter-électrodes pour la fig. 11.

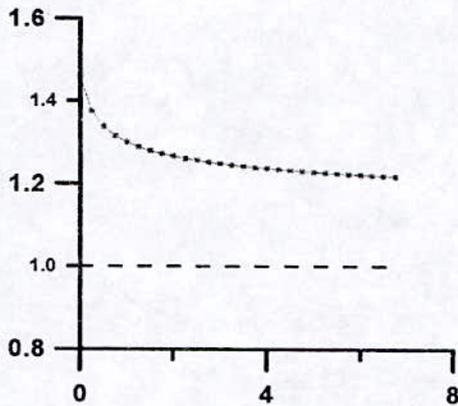


Fig. 11 : Variation de la dimension fractale en fonction de la distance inter-électrodes pour la fig. 10.

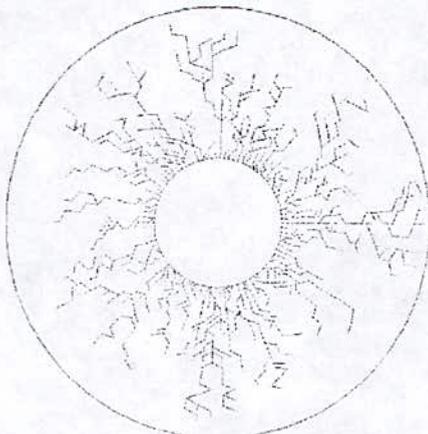


Fig. 11 : Décharge pour  $R1=3\text{cm}$ ,  $D=7\text{cm}$   
Tension appliquée 28 kV  
Tension expérimentale= 36 kV

La figure 13, représente les courbes de variation de la tension de disruption expérimentale et celle obtenue par simulation en fonction de la distance inter-électrodes, pour différents rayons de l'électrode interne. Nous observons une assez bonne concordance (différence d'environ 10%). Cette différence serait due à l'hypothèse selon laquelle le canal de la décharge est un conducteur pur. Or une chute de tension existerait entre les deux extrémités de ce canal.

Les résultats obtenus montrent que le modèle proposé qui consiste à supposer que la propagation de la décharge peut être assimilé à un phénomène électrostatique, variant d'un saut à l'autre de la propagation, est largement justifié.

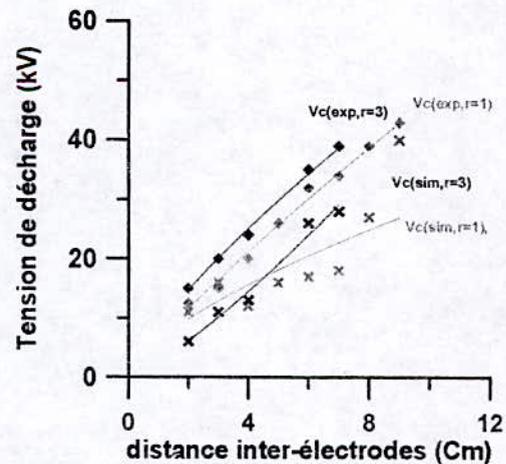


Fig. 13 : Comparaison entre les tensions de disruption expérimentale et simulée

### Conclusion

Le but de notre travail est de modéliser la progression des décharges électriques dans un système cercle-cercle.

Nous avons développé un modèle assez performant pour simuler l'évolution de la décharge dans le système étudié. Ce modèle utilise la méthode des éléments finis pour le calcul du champ et tient compte du caractère aléatoire de la progression de la décharge.

Le modèle élaboré reproduit des formes de décharge relativement proche de celles que nous observons expérimentalement.

L'évolution de la décharge électrique dépend fortement du paramètre aléatoire, ce paramètre imprévisible varie en fonction de la géométrie du système ainsi que de la tension appliquée.

Le modèle de décharge développé gagnerait à être amélioré en prenant en considération la chute de tension au cours de la progression de la décharge

- [7] R.Ierusalimschy, L.H. De Figueiredo, W. Celes, "Lua 5.0 Reference Manual", [lua@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lua@tecgraf.puc-rio.br), Abril 2003.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Z. Djemai, « Détermination de la dimension fractale des décharges électriques radiales sur les surfaces isolantes ». Thèse de doctorat d'état des sciences ENP(1999)
- [2] Z. Djemai, « Etude de la propagation des streamers à l'interface liquide/solide sous tension alternative de 50Hz ». Thèse de Magister ENP (1991)
- [3] M.N. Fridjet et J.Abes, « Reproduction de la décharge électrique dans un système pointe cercle ». USTHB, I. Electronique Mémoire de fin d'étude (2001)
- [4] Hami M. et Kahoul R. « Détermination de la dimension fractale d'une décharge électrique sur les interfaces. Etude des lois probabilistes », PFE 2002, Institut d'électronique, USTHB Alger
- [5] T.Aka-Ngnuni, A. Bérroual, "Modelling of multi-channel streamers propagation in liquid dielectrics using the computation electrical network", J. Phys. D: Appl.Phys, 34, 794-805, 2001.
- [6] D.Meeker, "BELA, Finite Element Electrostatics Solver, ", Version 1.0, [dmeeker@iecc.org](mailto:dmeeker@iecc.org), <http://femm.berlios.de>, 2003.

## Study of the Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion (OMTHD) technique in comparison with the Harmonic Elimination (OHSW) technique applied to Multilevel Inverters

Y. SAHALI, M. K. FELLAH

Intelligent Control and Electrical Power Systems Laboratory ICEPS

University Djillali Liabes of Sidi-Bel-Abbes- ALGERIA

E-mail: [ya\\_sahali@yahoo.fr](mailto:ya_sahali@yahoo.fr) [mkfellah@univ-sba.dz](mailto:mkfellah@univ-sba.dz)

**Abstract**—In order to reduce the harmonic content at the output voltage multilevel inverters, many modulation strategies applied to control two or three-level inverters are extended with certain modifications. Among these strategies one notes the Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion "OMTHD" and the Harmonic Elimination "OHSW" techniques to generate nearly sinusoidal voltage by optimizing the total harmonic distortion "THD" of the output waveforms or by eliminating its specific undesirable harmonics. In the goal of confronting the two techniques, it is important to know, initially, if there are great differences between them and to know whether the OMTHD or OHSW is the best technique control. The chief aim of this work is to give the answer of this interrogation.

**Index Terms**— Multilevel Inverter (VSIs), Cascade Inverter, Power Supplies, Harmonics, Pulse Width Modulation, THD.

### I. INTRODUCTION

MULTILEVEL INVERTER techniques have been attracting increasing attention in recent years mainly due to its ability to overcome the voltage limitations of semiconductor devices in conventional two-level inverter and to improve the quality of the output voltage waveform by reducing, for example, its Total Harmonic Distortion THD [1 to 7].

Various alternative circuit topologies have been reported in the literature and widely used in many industrial applications, such as, static Var compensators, HVDC link, active filtering.

The main topologies of multilevel inverters are:

- Neutral point clamped inverter (NPC),
- Flying capacitors inverter also referred imbricated cells,
- Multilevel inverter using cascaded-inverters with separated dc sources, hereafter called a cascade multilevel inverter.

The cascade multilevel inverter, which was probably first introduced in 1988 for plasma stabilization [8], appears to be superior to other multilevel structure inverters in terms of its structure that is not only simple and modular but also requires the least number of components [8]. This modular structure makes it easily extensible for higher number of desired output voltage levels without undue increase in circuit power complexity. In addition, extra clamping diodes or voltage balancing capacitor are not necessary.

### II. CASCADE MULTILEVEL INVERTER-STRUCTURE AND MODELING [9 to 11]

Fig. 1 shows the single-phase structure of a cascade multilevel inverter. It consists of a series of H-bridge (single-phase full-bridge) inverter cells. Each inverter cell can generate three different voltage outputs,  $+U$ ,  $0$  et  $-U$  by connecting the dc source to the ac output side by different combinations of the four devices.

The ac output voltage  $V_{an}$  is, therefore, the sum of all the individual inverter outputs:

$$V_{an} = V_1 + V_2 + \dots + V_S \quad (1)$$

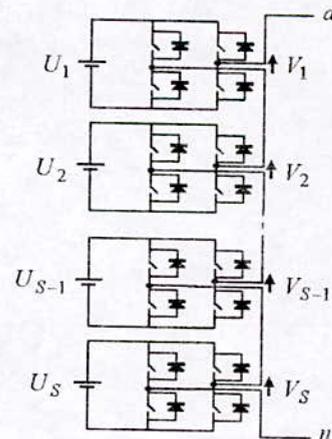


Fig. 1: The single-phase structure of the multilevel cascade inverter

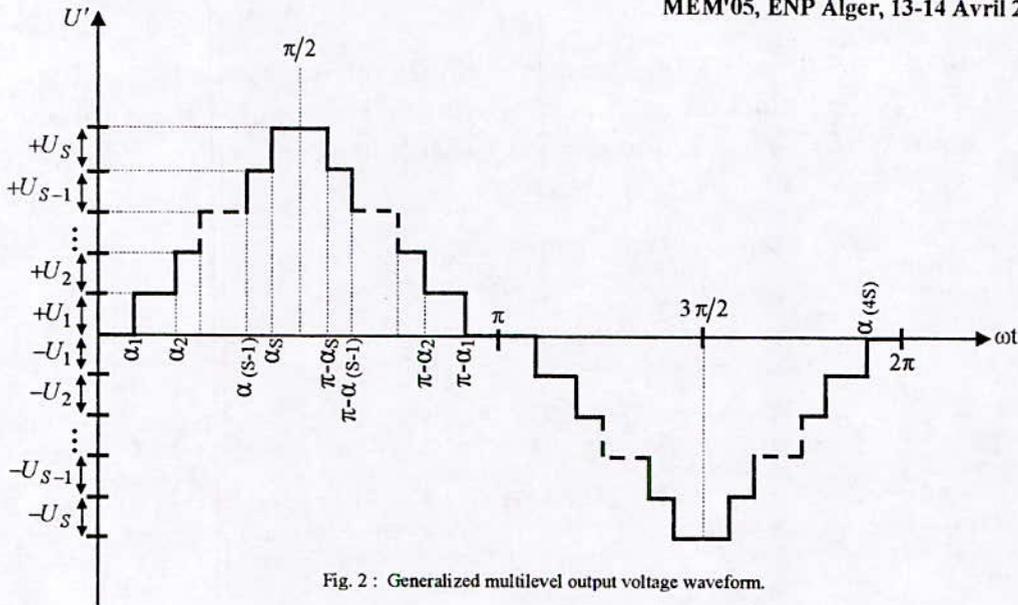


Fig. 2 : Generalized multilevel output voltage waveform.

For a three-phase system, the output of three identical structure of single-phase cascaded inverter can be connected in either wye or delta configuration.

Fig. 2 shows a generalized output voltage waveform that can be synthesized by the cascaded multilevel inverter.

### III. REVIEW OF OPTIMIZATION GENERALIZED MULTILEVEL WAVEFORM TECHNIQUES

In order to reduce the output voltage inverter THD, there are three possible optimization techniques according to the choice of generalized waveform parameters:

- Either, uses a generalized waveform with equally widths or equally spaced steps, i.e. with constant distance between switching angles (Fig.3). Optimizes, in this case, the step amplitudes (step heights).

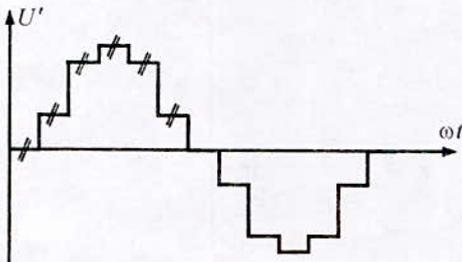


Fig. 3: A generalized waveform with equally width steps

- Or prefers a generalized waveform with the steps of equal height, i.e. equal amplitudes ( $U_1=U_2=\dots=U_s=U$ ). This waveform is known as "regular staircase waveform" (Fig.4). In this case, we optimize the step spaces, i.e. optimizes the switching angles.

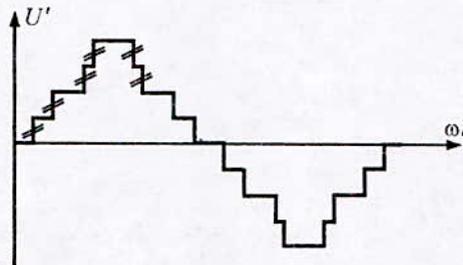


Fig. 4: A regular staircase generalized waveform

- Or selected an arbitrary generalized waveform, where both step heights and widths (spaces) must be optimized (Fig. 5).

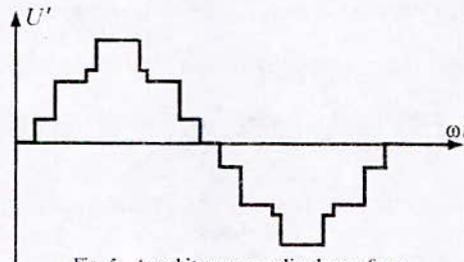


Fig. 5: An arbitrary generalized waveform

#### IV. IMPROVEMENT QUALITY APPROACHES OF THE GENERALIZED MULTILEVEL WAVEFORM

Once the generalized waveform has been chosen, two options or two approaches are then possible to improve his quality:

- ✧ Either the switching angles are chosen to eliminate a certain number of harmonics. This approach is referred as "Optimized Harmonic stepped waveform OHSW" technique" which results in THD reduction [12-13];
- ✧ Or prefers determines an appropriate switching angles to minimize, most effectively possible, this total harmonic distortion. This causes to reduce, generally, the rate of each harmonic, without eliminating it inevitably. This approach is called "Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion technique OMTHD" [14].

This two approaches will be briefly defined in the following sections.

#### V. OPTIMAL MINIMIZATION OF THE TOTAL HARMONIC DISTORTION OMTHD TECHNIQUE

The basic idea for such a method, confirmed by recent work of [15], is to adjust and calculate switching angles in order to get the lowest output voltage THD.

To minimize the THD, which is a measure of the closeness in shape of a waveform to its fundamental component, it is necessary that its partial derivative with respect to each switching angles equals zero. It is implied that the derivative partial of its square is also set to be zero.

After development and simplification, the THD of our periodic multilevel waveform (generalized waveform), which present the odd quarter-wave symmetric characteristic, is given by this general formula:

$$THD = \sqrt{\left[ \frac{\pi^2}{8} \times \frac{\left( \sum_{k=1}^S U_k \right)^2 - \frac{2}{\pi} \left[ \alpha_1 U_1^2 + \sum_{j=2}^S \alpha_j \left( U_j^2 + 2U_j \sum_{i=1}^{j-1} U_i \right) \right]}{\left( \sum_{k=1}^S U_k \cos \alpha_k \right)^2} \right]^{-1}} \quad (2)$$

Proof of this expression is given in the Appendix.

Suppose, for reasons of simplicity, the the step of equal heights (regular staircase waveform :  $U_1=U_2=\dots=U_S=U$ ), the THD is given by:

$$THD = \sqrt{\left[ \frac{\pi^2}{8} \times \frac{\left( S^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^S (2k-1) \alpha_k \right)}{\left( \sum_{k=1}^S \cos \alpha_k \right)^2} \right]^{-1}} \quad (3)$$

What implies

$$THD^2 = \left[ \frac{\pi^2}{8} \times \frac{\left( S^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^S (2k-1) \alpha_k \right)}{\left( \sum_{k=1}^S \cos(\alpha_k) \right)^2} \right]^{-1} \quad (4)$$

Differentiating this equation to determine the partial derivatives and set equal to zero, we obtains this general expression:

$$\frac{\partial (THD^2)}{\partial (\alpha_C)} = 0 \Rightarrow (2C-1) \sum_{k=1}^S \cos(\alpha_k) + \left[ 2 \sum_{k=1}^S (2k-1) \alpha_k - \pi S^2 \right] \sin(\alpha_C) = 0 \quad (5)$$

where  $C = 1, 2, \dots, S$

Thus to minimize the output voltage THD,  $S$  switching angles, namely  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S$  determined over one-quarter-cycle, need to be know. Whereas the other angles (from  $\alpha_{S+1}$  until  $\alpha_{4S}$ ) result directly by symmetry (see Fig.2). Importantly, these  $S$  switching angles must, constantly, satisfy the following condition :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_S < \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

To have these angles, a system with  $S$  equations formed from (5) is necessary. The system obtained is a nonlinear of which the resolution is done by the Newton-Raphson method uses in this paper or by any other iterative method of nonlinear systems resolution.

#### VI. HARMONIC ELIMINATION TECHNIQUE

The harmonic elimination modulation strategy for multilevel inverter is also referred in the literature to as "Optimized Harmonic Stepped Waveform OHSW". His objective is to reduce the total harmonic THD in the output voltage.

The basic concept of this reduction is to eliminate the specific harmonics, which are generally the lowest orders, with an appropriate choice of switching angles, by combining skilfully the idea of the Selective Harmonic Eliminated PWM (SHE PWM) for 3-level inverter control and based on the unipolar PWM switching scheme [16] to a generalized multilevel

waveform synthesized from several level of dc voltages.

Owing to the symmetries of the generalized waveform shown in Fig. 2 only the odd harmonics exist. For this reason, the Fourier coefficients for the regular staircase generalized waveform are given by the following equation:

$$a_n = \frac{4U}{n\pi} \sum_{k=1}^S \cos(n\alpha_k) \quad (7)$$

where

- $U$  is the amplitude of the dc source (dc voltage supply);
- $n$  is an odd harmonic order,
- $S$  is the number of dc sources or H-bridge cells;
- $\alpha_k$  are the optimized harmonic switching angles.

Evidently, these angles must also satisfy the basic condition (6).

Amplitude of any harmonic can be obtained by setting equation (7), with respect harmonic, equal to pre-specified value. But based on the performance criteria, equation (7) can be solved for  $S$  variables,  $\alpha_1$  to  $\alpha_S$ , by:

- Either, equating  $S$  predominant lower frequency harmonics to zero in order to cancel it. This approach is the approach proposed and investigated in this paper.
- Or provide for voltage control with simultaneous harmonics elimination, i.e. equating ( $S-1$ ) lower-order harmonics to zero and assigning a specific value to the fundamental component.

Basically, the lowest odd harmonic components should be cancelled from a single-phase system, whereas in the three-phase system, they are the lowest non-triplen harmonic components that need to be eliminated.

Thus, to eliminate  $S$  harmonics from the output voltage inverter,  $S$  switching angles need to be known. It implies, mathematically, that  $S$  equations formed from equation (7) are necessary. These equations can be written as:

For the single-phase system:

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \dots + \cos(\alpha_S) = 0 \\ \cos(3\alpha_1) + \cos(3\alpha_2) + \dots + \cos(3\alpha_S) = 0 \\ \vdots \\ \cos(n\alpha_1) + \cos(n\alpha_2) + \dots + \cos(n\alpha_S) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

For the three-phase system:

$$\begin{cases} \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2) + \dots + \cos(\alpha_S) = 0 \\ \cos(5\alpha_1) + \cos(5\alpha_2) + \dots + \cos(5\alpha_S) = 0 \\ \vdots \\ \cos(n\alpha_1) + \cos(n\alpha_2) + \dots + \cos(n\alpha_S) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

where

$n$  is an odd number (for the single-phase system) and an odd number different from three and from its multiples (for the three-phase system).

The resolution of this two systems, which are nonlinear, is also achieved by the algorithm of Newton-Raphson method [12-13].

## VII. COMPARISON OF THE TWO MODULATION TECHNIQUES (OMTHD ET OHSW)

To measure the harmonic performance of the two techniques for purpose of comparison the total harmonic distortion  $THD$ , which evaluates the quantity of harmonics contents in the output waveforms and which is the popular performance index for converters, was chosen as basic criteria.

To calculate the values of the  $THD$ , MATLAB is employed as programming tool.

## VIII. SIMULATION RESULTS

Firstly and after running our programs, some analytical results giving the appropriated switching angles are obtained. For example, the sample solutions (in degree) to,

- \* optimize the  $THD$  of a five-level waveform are:

$$\alpha_1 = 13.7610, \quad \alpha_2 = 44.8428 \quad (10)$$

- \* eliminate two harmonics, the third and the fifth from a five-level waveform are:

$$\alpha_1 = 12.0000, \quad \alpha_2 = 48.0000 \quad (11)$$

The output voltage  $THD$  of different multilevel inverter waveforms calculated by MATLAB is obtained by substituting the switching angle values into equation (3). Its evolution, as function of the number of switching angles, is tabulated for the  $OMTHD$  technique in summary table. 1 and for the  $OHSW$  technique in summary table. 2.

Number of switching angles per quarter-cycle	$THD$ %
	<b>OMTHD</b>
$S = 1$	28,97
$S = 2$	16,70
$S = 3$	11,58
$S = 4$	08,89

Table. 1 Output Voltage  $THD$  as function of the number of switching angles for the  $OMTHD$  technique.

The simulation results are shown in Fig.6 and Fig.7 which represent frequency spectrums of the output voltage waveforms of multilevel inverters. The frequency spectrums are presented in opposite in order to being able to compare this two techniques more easily.

### VIII. SUMMARY-COMMENTS

For the two techniques, the effect of the increase of the number of switching angles, i.e. of the number of inverter levels, on the output voltage *THD* has been foreseeable. First, we see clearly from the two summary tables (1 and 2) that as the number of switching angles increases, the output inverter *THD* decreases. Likewise, the simulation shows that the frequency spectrums of the output voltage of the 9-level inverter present a very weak harmonicity compared to the 3-level inverter. This confirms, again, the major interest of the multilevel structures. This improvement obtained in the output voltage quality, took place in the notable reduction of their *THD*, table. 3 specifies, for some switching angles, the rate of this reduction.

From this last table, it is preferable for minimizing the output voltage *THD* of multilevel inverters to privilege the *OMTHD* technique over the *OHSW* technique.

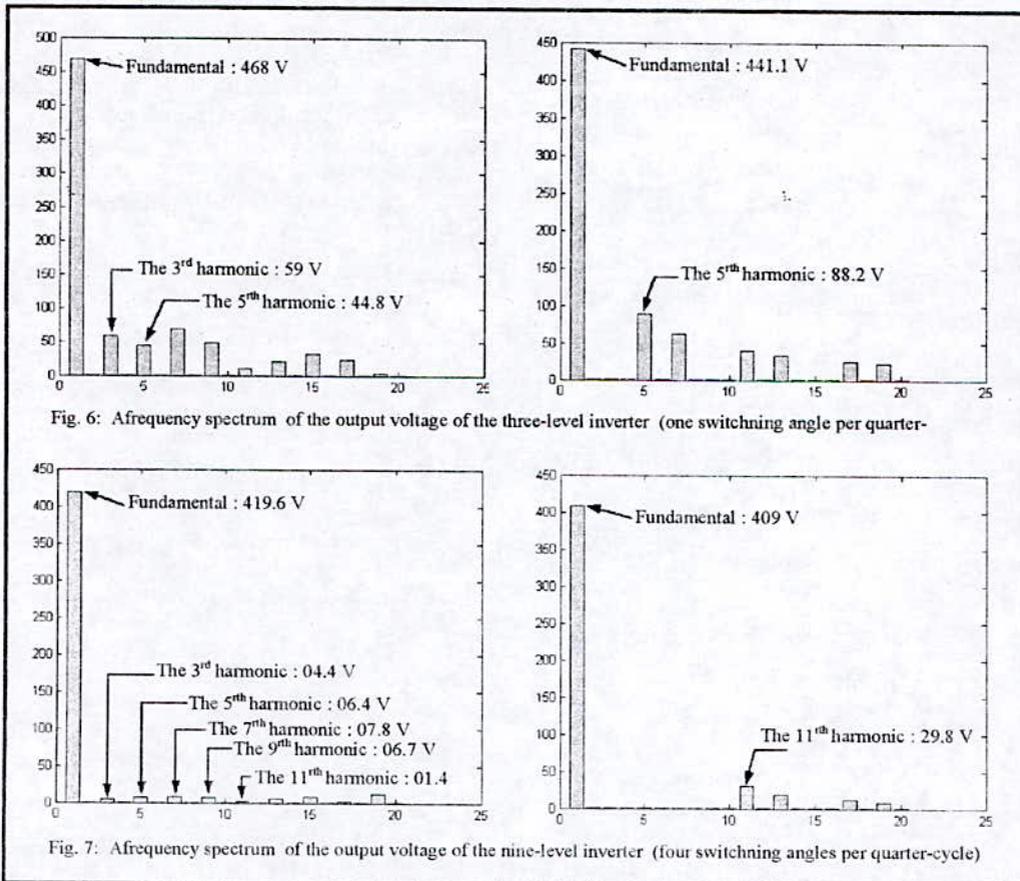
Number of switching angles per quarter-cycle	<i>THD</i> %
	<i>OHSW</i>
$S = 1$	31,08
$S = 2$	17,46
$S = 3$	12,53
$S = 4$	11,66

Table.2 Output Voltage *THD* as function of the number of switching angles for the *OHSW* technique.

For the simulation, two cascaded multilevel inverters will be used as examples. The first is a 3-level inverter with one-separated dc sources and one H-bridge cells (one switching angles per quarter-cycle), whereas the second is a 9-level inverter using 4 H-bridge cells and 4 separated dc sources (4 switching angles per quarter-cycle).

The principal characteristics of these inverters which are considered for simulation are as follows:

- The total supply voltage is 400V. Thus, the amplitude supplied each H-bridge inverter is set to be  $(400/S)V$ ;
- The operating frequency is 50HZ.



From this last table, it is preferable for minimizing the output voltage *THD* of multilevel inverters to privilege the *OMTHD* technique over the *OHSW* technique.

Nevertheless, the *THD* is not enough because it doesn't constitute the only comparison criterion. The results must be confronted with those concerning the fundamental component and the remaining harmonics (especially the lowest).

Number of switching angles per quarter-cycle	Reduction obtained (%)
$S = 1$	06,78
$S = 2$	04,35
$S = 3$	07,58
$S = 4$	23,76

Table.3 Reduction obtained in term of *THD* by the *OMTHD* comparatively with *OHSW*.

The examination of the different frequency spectrums obtained shows clearly that the first harmonics which are eliminated by the *OHSW* technique, have increasingly reduced amplitudes with the increase in the number of switching angles per quarter-cycle. The calculation of these amplitudes confirms that, these harmonics have relative amplitudes lower than 3 % of the fundamental. By more increasing the number of switching angles (increasing the output voltage inverter levels), these harmonics become increasingly negligible and approaching zero.

Then, concerning the first harmonic remaining in the output voltage frequency spectrum of the inverter controlled by *OHSW*, presents in the case of *OMTHD* technique the lower amplitude than those obtained by *OHSW*.

The amplitude of the fundamental component relating to *OMTHD* technique is higher than those relating to *OHSW* technique. The reduction (fall) of this component obtained while passing from *OMTHD* to *OHSW* technique is given in table. 4.

Number of switching angles per quarter-cycle	<i>OHSW</i>
$S = 1$	05,74
$S = 2$	01,95
$S = 3$	02,76
$S = 4$	02,53

Table. 4 Reduction of the fundamental component obtained while passing from *OMTHD* to *OHSW* technique.

## VX. CONCLUSION

The comparison between the two modulation techniques, based on the output *THD* revealed the superiority of Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion *OMTHD* technique over Optimized Harmonic Stepped-Waveform *OHSW* technique. The study carried out shows that this approach is particularly interesting. It appeared very useful since it makes possible to act on the total harmonic distortion with an increased precision, i.e. with a notable reduction of the output signals harmonic contents as well as the number of levels increases, so that the resulting staircase output voltage which has the minimum harmonic content approaches a desired waveform.

The advantage of the improvement obtained in terms of the total harmonic distortion, is unfortunately obtained to the detriment of the lowest harmonics disappearance.

In spite of their presences, these harmonics present a very low amplitudes (<3 % of the fundamental), especially with the increase in the output voltage levels, i.e. with the increase in the switching angles number. Indeed, if the switching angles number is sufficiently great, it is possible to consider these harmonics as negligible.

As an extension to this work and in order to locate the advantages which this new approach can get, a study of the performances by the means of a comparison between this one and Optimized Harmonic Stepped-Waveform (*OHSW*) technique with the fundamental amplitude control proved to be essential. This comparative study that will be presented in several aspects will be investigated in another paper in our research group. It will be published very soon.

## VXI. APPENDIX

In general, the *THD* of an arbitrary periodic waveform is defined as

$$THD = \sqrt{\frac{(rms\ value)^2 - (fundamental\ rms\ value)^2}{(fundamental\ rms\ value)^2}} \quad (12)$$

For the generalized multilevel waveform shown in Fig. 2 with  $S$  steps and different dc source voltages, the rms (root-mean-square) value obtained by integrating this multilevel waveform over one-quarter-cycle is

$$U'_{rms} = \left( \sum_{k=1}^S U_k \right)^2 - \frac{2}{\pi} \left[ \alpha_1 U_1^2 + \sum_{j=2}^S \alpha_j \left( U_j^2 + 2U_j \sum_{i=1}^{j-1} U_i \right) \right] \quad (13)$$

The fundamental rms value of the same multilevel waveform is

$$U'_{ieff} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^S U_k \cos \alpha_k \quad (14)$$

Substituting (9) and (10) into (8), we obtain the general expression (2).

#### RERERENCES

- [1] P. Bartholomeus, « Contribution à l'étude des redresseurs à facteur de puissance quasi-unitaire fonctionnant en mode multiniveaux. Application au chargeur de batteries » *Doctorat thesis at Sciences and Technologies University of Lille, 1996.*
- [2] S. Loudot « Filtrage Actif des réseaux moyenne tension : Association d'un convertisseur Multicellulaire et d'un circuit passif » *Doctorat thesis at National Polytechnic Institute of Toulouse, May 1997.*
- [3] F. Hembert « Etude et Réalisation d'un Filtre Actif Monophasé à Structure Multiniveaux obtenue par mise en série de ponts à quatre Interrupteurs » *Doctorat thesis at Sciences and Technologies University of Lille, December 1996.*
- [4] G. R. Walker « Modulation and control of Multilevel converters » *Doctorat thesis at Queensland University, November 1999.*
- [5] A. Nabae, I. Takahashi et H. Akagi « A New Neutral-Point-Clamped PWM Inverter » *IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. IA-17, No. 5, September/October 1981.*
- [6] B. S. Suh, T. A. Lipo, Y. H. Lee et D. S. Hyun « Multilevel Power Conversion-An Overview of Topologies and Modulation Strategies » *Personal documentation.*
- [7] Y. Sahali and M. K. Fellah « Principe de la Compensation Harmonique des Ondes Multiniveaux » *Conférence on Electrical Engineering, 10-11 December 2002, Batna-ALGERIA.*
- [8] B. S. Suh, T. A. Lipo, Y. H. Lee and D. S. Hyun « Multilevel Power Conversion-An Overview of Topologies and Modulation Strategies » *Personal documentation.*
- [9] F. Z. Peng et J. S. Lai « Dynamic Performance and Control of a Static Var Generator Using Cascade Multilevel Inverters » *IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 33, No. 3, May/ June 1997.*
- [10] F. Z. Peng, J. S. Lai, J. W. Mckeever et J. Vancovering « A Multilevel Voltage-Source Inverter With Separate DC Sources for Static Var Generation » *IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 32, No. 5, September/October 1996.*
- [11] F. Z. Peng, J. W. Mckeever et D. J. Adams « A Power Line Conditioner Using Cascade Multilevel Inverters for Distribution Systems » *IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 34, No. 6, November/ December 1998.*
- [12] Y. Sahali and M. K. Fellah « Optimized Harmonic Stepped Waveform OHSW technique for Multilevel Cascaded Inverters Control » *International Conference on Electrical and Electronics ICEEE'2004, Article published in DIRASSAT periodic review (AMAR TELIDJI University of LAGHOUAT), Special Issue ISSN 1112-4652.*
- [13] Y. Sahali and M. K. Fellah « Optimized Harmonic Stepped Waveform OHSW technique for Multilevel Cascaded Inverters Control » *International Conference on Electrical, Electronics Engineering, Communication & Physical Systems, University Center of Saida, May, 4-5, 2004.*
- [14] Y. Sahali and M. K. Fellah « Optimal Minimization of the Total Harmonic Distortion (OMTHD) technique for the Symetrical Multilevel Inverters Control » *First national Conference on Electrical Engineering and his Applications CNEA'04, Sidi-bel-Abbes,, May, 24-25, 2004.*
- [15] - L. M. Tolbert, F.Z.Peng, T. Cunnyngham et J. N. Chiasson « Charge Balance Control Schemes for Cascade Multilevel Converter in Hybrid Electric Vehicles » *Special Section on Multilevel Inverters-II- IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol.49, No.5, October 2002.*
- [16] Y. Sahali and M. K. Fellah « Selective Harmonic Eliminated Pulse-Width Modulation Technique (SHE PWM) applied to Three-level Inverter /Converter » *IEEE-ISIE'03 International Symposium on Industrial Electronics, Rio de Janeiro, Brasil, 9-11 Juin 2003, IEEE Catalog number: 03TH8692.*
- [17] C. Y. Liu, J. G. Zhu and V. S. Ramsden « Minimization of Total Harmonic Distortion for Square Wave Voltage Source Inverters » *AUPEC'99.*

Yamina SAHALI was born in Sidi-bel-Abbes, Algeria. She received the Eng. and M.S. degrees in Electrical Engineering with first class honour from Djillali LIABES University, Sidi-bel-Abbes, Algeria, where she is currently working towards the Ph. D. degree. His research interests include -modeling and control of Power Converters, Multilevel converters and Pulse-Width-Modulation techniques.

Mohammed-Karim FELLAH was born in Oran, Algeria, in 1963. He received the Eng. degree in Electrical Engineering from University of Sciences and Technology, Oran, Algeria, in 1986, and The Ph.D. degree from National Polytechnic Institute of Lorraine, Nancy, France, in 1991.

Since 1992, he is Professor in the Department of Electrical Engineering at the University of Sidi-bel-Abbes, Algeria, and Director of the Intelligent Control and Electrical Power Systems Laboratory at this University. His current research interests include Power Electronics, HVDC links, and Motor Drives.

# Large Scale Power System Security Assessment Using Intelligent Programming

M. BOUDOUR<sup>1</sup>, A. HELLAL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Electrical Engineering Department, University of Sciences & Technology, Algiers, Algeria

<sup>2</sup>Electrical Engineering Department, Polytechnic Institute, Algiers, Algeria

## Abstract

This paper proposes a new methodology which combines supervised learning, unsupervised learning and genetic algorithm for evaluating power system dynamic security. Based on the concept of stability margin, pre-fault power system conditions are assigned to the output neurons on the two-dimensional grid with the growing hierarchical self-organizing map technique (GHSOM) via supervised ANNs which perform an estimation of post-fault power system state. The technique estimates the dynamic stability index that corresponds to the most critical value of synchronizing and damping torques of multimachine power systems. ANN-based pattern recognition is carried out with the growing hierarchical self-organizing feature mapping in order to provide an adaptive neural net architecture during its unsupervised training process. Numerical tests, carried out on a IEEE 9 bus power system are presented and discussed. The analysis using such method provides accurate results and improves the effectiveness of system security evaluation.

## 1. Introduction

Power system spontaneous oscillations, due mainly to the development of interconnection of large electric power systems, are due to the lack of damping of the mechanical mode of the interconnected system [1,2]. An important task in power system operation is to decide whether the system is currently operating safely, critically or unsafely. The conventional eigenvalue analysis method requires a lot of computational efforts as the size of power systems become larger. The investigation of the synchronizing and damping torques method [3-6] has shown that it gives efficient means for determining the dynamic stability with a great reduction of the on-line computational requirements. They can also provide a clear picture about the dynamic performance of the individual machines using the security contour visualization.

ANN-based methods have been recently developed for power system security assessment [8-14]. The advantage of these methods is the reduction of the on-line computational requirements. The disadvantages are: (1) elaborate off-line computations are required, and (2) if some components of the pattern vector are strongly correlated, the methods become inaccurate, and a feature extraction must be performed to hopefully yield an uncorrelated set of components. Feature extraction is the process of mapping all available features into a composite feature set of lower dimension. A new feature extraction technique based on

genetic algorithm is presented and applied to power system security assessment [15].

One of the most important aspects of achieving good neural network performance has proven to be the proper selection of training features. The curse of dimensionality states, as a rule of thumb, the required cardinality of the training set for accurate training increases exponentially with the input dimension [16]. Feature extraction techniques applied to power system security assessment have previously been presented in [17].

In this paper, pre-fault power system conditions are assigned to the output neurons on the two-dimensional grid with the growing hierarchical self-organizing map technique (GHSOM) via supervised Artificial Neural Networks (ANNs) which perform an estimation of post-fault power system state. The Kohonen SOM memory runs an unsupervised clustering algorithm. It is easily trained and has attractive properties such as topological ordering and good generalization. However, two drawbacks remain untouched: firstly it uses fixed network architecture in terms of number and arrangement of neural processing elements, which has to be defined prior to training. Secondly, hierarchical relations between the input data are not mirrored in a straightforward fashion [18]. To resolve both limitations, the GHSOM composed of SOM-like neural networks with adaptive architecture was used for data mining applications in [19] to improved representation of the hierarchical structure of the analysed data collection.

In the present work, the synchronizing and damping torques analysis which utilizes a linearized small perturbation model [4,5,20] is considered and its application generalized to multimachine power systems for the dynamic security assessment where a new criterion is defined. A GHSOM-based method is presented to calculate the estimate security index so that an output neuron calls the index corresponding to an input pattern. The effect of the control parameter for the (depth / shallowness) of the GHSOM is examined and the effectiveness of the proposed technique demonstrated in a IEEE 9 bus power system.

## 2 Dynamic Security Evaluation

### 2.1 Synchronizing and Damping Torques Analysis

The concept of damping and synchronizing torques is extended to calculate the corresponding torque components

in a multimachine power system: obtained by breaking the torque of the machine with respect to its own rotor angle and speed responses according to the equation:

$$\Delta T_e = T_s \Delta \delta + T_d \Delta \omega \quad (1)$$

The time responses of  $\Delta T_e$ ,  $\Delta \delta$  and  $\Delta \omega$  include the effect of the various modes and so are the computed damping ( $T_d$ ) and synchronizing ( $T_s$ ) torques. The linearized model of the subsystem in a n-machine power system is depicted in Fig.1.

The self damping and synchronizing torques of machine  $i$  are:

$$\begin{aligned} T_{sij} &= T_{seij} + T_{smij} \\ T_{dij} &= T_{deij} + T_{dmij} \end{aligned} \quad (2)$$

where "e" stands for electrical and "m" for mechanical.

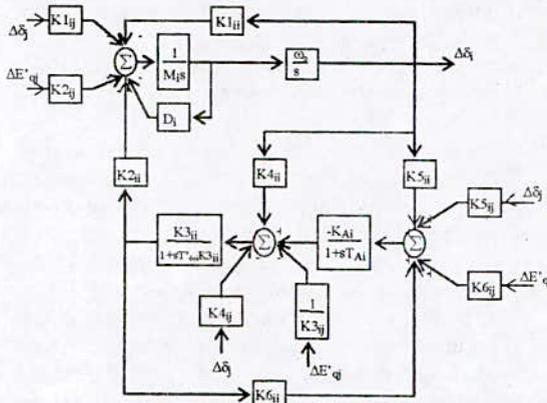


Fig. 1 Block diagram of a multimachine power system

The interaction damping and synchronizing torques of machine  $i$  with the other machines are:

$$T_{sij} = \sum_{j=1}^n (T_{seij} + T_{smij}) \quad (3)$$

$$T_{dij} = \sum_{j=1}^n (T_{deij} + T_{dmij})$$

## 2.2 New Stability Criterion

As the synchronizing and damping torques can not be determined in a closed form, a new criterion (torques criterion) is defined through necessary and sufficient conditions for the system to be stable as follows:

$$T_{sij} > T_{sij} \text{ and } T_{dij} > T_{dij} \quad (4)$$

The coupling between the low frequency electromechanical modes is investigated by computing the contribution factors [7] which give a method of presenting the interaction between the eigenvectors associated with the eigenvalues or modes as one or more parameters of the system are varied. The synchronizing and damping torques analysis is correlated to the modal analysis to provide insight into the system stability.

## 2.3 Feature Selection based Genetic Algorithm

An acceptable simple criterion for selecting a variable as a feature is that it should provide more information for classification than those not selected [20]. The genetic algorithm solves the feature selection problem by representing each possible solution as a binary vector consisting of a number of bits equal to the number of features where a "0" bit in location  $i$  means the  $i$ -th parameter is not selected and a "1" bit means it is selected. An initial population of solution candidates, called "individuals", is generated, and the "fitness"  $F$  of the  $j$ -th individual is computed according to:

$$F(j) = \omega_1 F_1(j) + \omega_2 F_2(j) \quad (5)$$

where  $F_1$  and  $F_2$  are the fitness components corresponding to neural network accuracy and cardinality, respectively, and  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are their corresponding weights. We measure set sufficiency fitness (accuracy) of individual  $j$  as the reciprocal of the average absolute error computed by testing a neural network trained with inputs corresponding to the selected attributes of the individual. We measure cardinality fitness as  $kn(j)$  where  $n(j)$  is the cardinality level of member  $j$  (number of parameters selected) and:

$$\begin{cases} k = 1 & n(j) \leq n_{desired} \\ k = 0 & otherwise \end{cases}$$

Here,  $n_{desired}$  is the desired cardinality level. We also specify  $\omega_1 = 1.0$  and  $\omega_2$  is large ( $\omega_2 = 1000$ ).

After evaluating the fitness of all  $N_1$  members of a population, a certain number of the most fit members are selected to undergo the so-called "crossover" procedure where a fraction of the selected individuals are randomly mated pairwise. In addition, a single bit of the chosen members may be "mutated" or toggled to try and improve their fitness. The new members of the population, called "children" (which evolved through either crossover or mutation), have their fitness evaluated, and again a certain chosen and the procedure repeated. The accuracy component,  $F_1(j)$ , for each  $j$  is computed by first randomly splitting the input data into train and test sets according to a user-specified ration. A neural network is then trained using the training data corresponding to feature set  $j$ . Finally, the average absolute error is obtained by testing the neural network using the test data. This error is given by:

$$F_1(j) = \frac{N_{test}}{\sum_{k=1}^{N_{test}} |R_{jk,nn} - R_{k,correct}|} \quad (6)$$

where  $N_{test}$  is the number of test data points,  $R_{jk,nn}$  is the neural network  $j$ 's output for the  $k$ -th operating condition, and  $R_{k,correct}$  is the correct performance measure for the  $k$ -th operating condition. The multilayer backpropagation neural network is chosen because of its computational simplicity and its ability to perform nonlinear functional approximation. To limit computation time, we use a

simple neural network with only one neuron in one hidden layer. After using GANN to perform the feature selection, we then identify an optimal structure that we can use to perform the function approximation to be used in the visualization software. This step assumes that a feature set that is identified as "best" using the simple structure will be at least "one of the best" for more complicated structures. For different randomly perturbed loads, 200 patterns are generated for each contingency (transmission line outage). The set of features in terms of which input data will be represented is defined among the original input pattern composed by: the real and reactive powers of the  $n$  generators ( $PG_i, QG_i$ ), their voltage regulator gains ( $K_{Ai}$ ) and the real and reactive powers of the  $n_L$  load demands ( $PD_i, QD_i$ ). The choice of these features is motivated by physical arguments and the selection process involves engineering judgement [13]. The feature extraction obtained from the original 15 dimensional input pattern, applied to the IEEE 9 bus test system, leads to the vector composed of 5 state variables, namely:  $PG_1, K_{A1}, PG_2, QG_3, PD_8$ .

### 3 Proposed Neural Network Architecture

#### 3.1 Growing Hierarchical Self-Organizing Map

The choice of a clustering technique arises from the lack of a priori information of the problem. Unfortunately, SOMs require a previous knowledge of the problem to decide the shape of its grid. In order to overcome this limit, the GHSOM has been proposed [18]. The GHSOM has a hierarchical structure of multiple layers, where each layer consists of several independent growing SOMs. The map in layer 1 consists of  $3 \times 2$  units and provides a rather rough organization of the main clusters in the input data. The six independent maps in the second layer offer a more detailed view of the data. For the control of the growth process, two different strategies can be used, using either the mean quantization error ( $mqe$ ) of a unit or the absolute value namely, the quantization error ( $qe$ ) of a unit.

The  $mqe$  of a unit  $i$  is calculated according to (7) as the mean Euclidean distance between its model vector  $m_i$  and the  $n_C$  input vectors  $x_j$  that are the set of input vectors  $C_i$  mapped onto this unit  $i$ .

$$mqe_i = \frac{1}{n_C} \sum_{x_j \in C_i} \|m_i - x_j\| \quad n_C = |C_i|, C_i \neq \phi \quad (7)$$

The starting point for the GHSOM training process is the calculation of an  $mqe_0$  of the unit forming the layer 0 map as provided in (8). With  $n_I$  we refer to the number of all input vectors  $x$  of the input data set  $I$  and  $m_0$  denotes the mean of the input data

$$mqe_0 = \frac{1}{n_I} \sum_{x_j \in I} \|m_0 - x_j\| \quad n_I = |I| \quad (8)$$

The minimum quality of data representation of each unit will be specified as a fraction, indicated by a parameter  $\tau$ , of  $mqe_0$  to satisfy the global termination criterion:

$$mqe_i < \tau \cdot mqe_0 \quad (9)$$

The growth process of a growing SOM can be described as follows. Let  $C_i$  be the subset of vectors  $x_j$  of the input data that is mapped onto unit  $i$ , and  $m_i$  the model vector of unit  $i$ . Then the error unit  $e$  is determined as the unit with the  $mqe$  as follows:

$$e = \arg \max_i \left( \sum_{x_j \in C_i} \|m_i - x_j\| \right) \quad n_C = |C_i|, C_i \neq \phi \quad (10)$$

Following the selection of  $e$ , its most dissimilar neighbor  $d$  is determined as follows, where  $N_e$  is the set of neighboring units of  $e$ .

$$d = \arg \max_i \left( \|m_i - x_j\| \right) \quad m_i \in N_e \quad (11)$$

A row or column of units is inserted between  $d$  and  $e$ . As more units are added to the growing SOM their  $qes$  decrease. The training process will continue until all units satisfy the global stopping criterion.

#### 3.2 Problem Formulation

The task of dynamic security assessment of a large-scale power system using Neural Networks (NN) is an enormous computational exercise. One way of reducing this complexity is to divide the problem into smaller tasks at different levels and train dedicated NN classifiers to handle each task. The overall structure of the devised neural architecture is depicted in Fig. 2.

The PNSI (Projection Network with Stochastic Interconnects) is a supervised three layer NN which models an input-output relationship by clustering both input and output spaces and establishing a correspondence between the clusters of the two spaces by viewing the training data only once [21].

The pre-fault state vector is the input of an array of PNSIs which work in a parallel way. Their purpose is the fast prediction of the post-fault state vector for each contingency. The learning phase of the PNSIs is performed on a main training set composed of pre-fault and post-fault state vector pairs of every outage for many operating points of the power system.

The number of the hidden layer units is not to be determined a priori, but adapts automatically to the learnt data. One approach is to generate nonlinearities with stochastically chosen interconnects between the input and hidden neural layers with a sigmoidal nonlinearity at each hidden neuron. The hidden to output interconnects are chosen to be a trainable projection matrix. The input vectors are normalised between -1 and +1 according to their maximum values reached in the training and testing sets. The components of the weight vectors associated to each neuron have been randomly initialised in the interval  $[-0.1, 0.1]$ .

The outputs of the PNSIs are then fed into a GHSOM which has been trained for classifying the post-fault vector in several bidimensionnal maps. The neighborhood function of each SOM is a unimodal function which is symmetric around the location of the winner neuron and monotonically decreasing with increasing distance from

the winner. In this paper a Gaussian is used as a neighborhood function [17]. The GHSOM training set is composed of the post-fault state vectors for all the contingencies.

The generalisation properties of the GHSOM when trained on a set of the post-fault state vectors, could fix the rough estimates obtained by the PNSIs.

#### 4 Application to Dynamic Security Assessment

The proposed method uses combined supervised and unsupervised learning for evaluating power system dynamic security. The power system index is estimated by calling an output neuron where the estimated index is assigned. After an output neuron on the grid responds to an input pattern, the output calls the estimated index. It is assumed that the index is prepared by the off-line calculation and is defined by:

$$T_{crd} = \min_i (T_{ds}^i - T_{dm}^i) \quad i=1, \dots, n \quad (12)$$

$$T_{crs} = \min_i (T_{ss}^i - T_{sm}^i)$$

As a result, power system dynamics are evaluated by the most critical value between the two critical synchronizing and damping torques:

$$T_{cr} = \min (T_{crd}, T_{crs}) \quad (13)$$

Let us assume that more than one learning data is assigned to each output neuron. The estimated index is calculated by the average value of the index corresponding to power system conditions classified into the same output neuron. Namely:

$$T_{cr}^i = \frac{1}{N_i} \sum_k T_{crk}^i \quad (14)$$

where:

$T_{cr}^i$ : estimated index at output neuron  $i$

$N_i$ : Number of input patterns classified into output neuron  $i$

$T_{crk}^i$ : index of input-pattern  $k$  classified into output neuron  $i$

## 5. Numerical Results

### 5.1 Simulation Results

The proposed method has been applied to the IEEE 9 bus study system with 14 lines and 3 generators [4,5]. The main training set is composed of 200 different load scenarios. Therefore, a total amount of 2800 samples has been generated by load flow calculations. Once the key features are selected, some of the data are used for training the PNSIs (1700 samples) while some are used for testing the trained NN (1100 samples). The GHSOM has 7 inputs (state vector and security indexes) and the corresponding training set is composed of the true post-fault state vectors (the base case and the 14 contingencies). Based on the unit representing the mean of all data at layer 0, the GHSOM training algorithm starts with a  $2 \times 2$  SOM at the first layer. The training process for this map continues with the additional units being added until the quantization error drops below a percentage  $\tau_2 = 0.005$  of the overall quantization error of the unit at layer 0, resulting in  $3 \times 2$  units representing six major clusters depicted in Fig. 3. Further, the notation  $(i/j)$  is used to refer to the unit located in column  $i$  and row  $j$  of the map.

We find units (1/2), (1/3) and (2/1) to represent the contingencies cases corresponding to secure operating points.

The main difference between these three clusters lies in the range of the values reached by both the synchronizing and damping torques, though they are both positive. For example, unit (2/1) classifies the secure cases characterized by high values of the critical synchronizing and damping torques ( $T_{crd} \geq 0.25, T_{crs} \geq 4.25$ ), whereas unit (1/2) groups

the secure cases where the critical torques remain positive in the interval defined as: ( $T_{crd} \leq 0.01, T_{crs} \leq 1.45$ ).

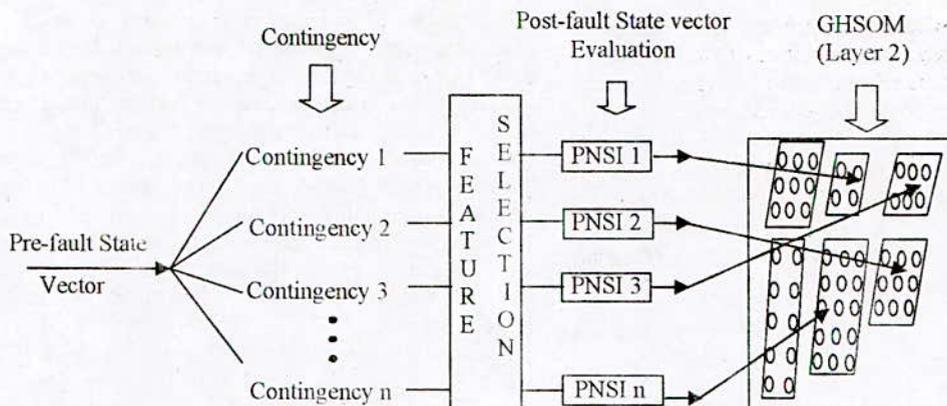


Fig. 2 Proposed mapping architecture

The non critical cases are presented by unit (2/2) where both synchronizing and damping torques are positive, corresponding to the outages that provoke major changes and cause severity conditions near the security contour, whereas the operating points remain inside this contour.

The critical cases are placed in unit (2/3) representing insecure cases near to the security boundary. These unstable states are outside the security contour. Unit (1/1) classifies the insecure cases where the critical values of the damping and/or synchronizing torque are negative. Further maps are automatically trained to represent the various state vectors.

This results in six individual maps on the second layer, each representing the data of the respective higher layer unit in more detail as  $QE_m$

reaches  $\tau_1 = 0.063$  of the corresponding  $qe$ 's unit in the layer1

In particular, a 6x5 map represents the insecure patterns of unit (1/1) of the first-layer map.

Insecure cases 6x5 SOM (379)	Secure Cases III (29) 4x3 SOM
Secure Cases I (356) 6x4 SOM	Non critical cases (78) 5x5 SOM
Secure cases II (357) 4x7 SOM	Critical cases (491) 7x6 SOM

Fig. 3 GHSOM-layer1

When a post-fault state vector is presented, the corresponding unit of the corresponding map is activated. It is then possible to label each unit with security related information. The obtained six maps in the second layer provide a satisfactory and accurate enough pictorial view of static security assessment. The results show a better use of the neurons, avoiding the problem of the dead units (the neurons which never win the competitive process), and a smaller number of misclassifications.

For comparison purpose, a two-dimensional grid of Kohonen SOM is depicted in Fig. 4. This allows us to view the hierarchical structure of the data on the flat map which consists of 15x15 output neurons. In other words, 2800 power system conditions are classified into 225 patterns. The range of the estimated index in each cluster is given in the mapping, where the critical index is defined as the minimum value between the two critical torques:  $T_{cr} = \min(T_{end}, T_{cr})$ . The white holes

correspond to the output neurons where the estimated index is not assigned. As the holes colour becomes darker in the figure, the power system approaches insecure conditions. Five out of six clusters on the first layer of the GHSOM are recognized [20].

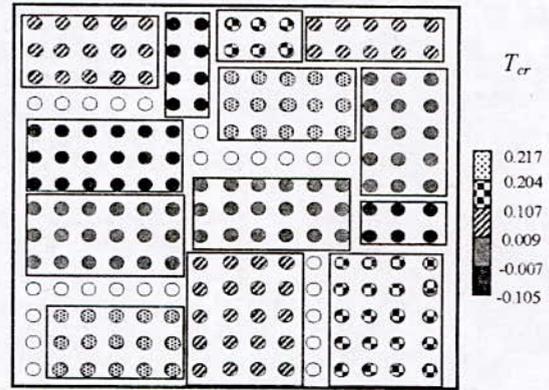


Fig. 4 Self-organizing map

## 5.2 Discussion

Simulation results show that the proposed method projects safe, critical and unsafe operation points to different clusters corresponding to different regions in the security space. Knowing which cluster relates to which security state and mapping an operational point to one of these immediately identifies whether the system is operating safely or not. The range of label attributes ( $T_{cr}$ ) in each cluster indicates which associative actions should be taken in each instance.

Different preventive control schemes may be advised for low and high critical values of the synchronizing and damping torques, depending on the installed system components, company policy, etc.

The following percentages are introduced to obtain a quantitative measure of the classification performance. The percentage of false alarms (FA), false dismissals (FD) and false classifications (FC) are calculated. The testing statistics are given in Table 1, comparing the use of the true or the predicted post-fault values in the security mapping.

Table 1 Classification Statistics

Testing statistics	True vectors	Predicted vectors
Testing data	1100	1100
True secure patterns	536	528
True insecure patterns	544	539
FA (%)	2.61	4.17
FD (%)	1.10	2.04
FC (%)	0.34	0.58

Note that identical proportions of secure and insecure data are used in both the training and testing sets. For larger  $\tau_1$  ( $\tau_1 = 0.107$ ), which serves as the control parameter for the (depth / shallowness) of the GHSOM architecture, more detailed data representation is delegated to additional maps resulting in 7 layers.

The first layer map has grown to a size of 2x2 units with the remaining groups (1/1), (1/3), (2/2) and (2/3) of Fig. 3.

## 6. Conclusion

This paper has presented a new methodology to assess the dynamic security for large scale power systems of a possible contingency simply by considering the unit activated by the pre-fault state vector in an output map. A new dynamic stability index is developed. The torque components technique has an advantage that it allows us to understand the transition of the security margin on the two-dimensional grid since it is easy to visually understand both secure and insecure states close to the operational conditions. They can also provide a clear picture about the dynamic performance of the individual machines. The primary concern about whether this new concept can become useful as an on-line aid resides in the question of scaling. A feature selection technique based Genetic Algorithm is applied to reduce effective problem dimension. Using the GHSOM the overall training time is largely reduced since only the necessary number of units are developed to organise the state vectors and its architecture allows the user to understand and analyze large amounts of data in an explorative way. Parallel supervised neural network architecture and the adaptive capability of the growing hierarchical SOM can be combined to achieve high speeds of execution and good classification accuracy. This new approach significantly improves the efficiency and effectiveness of large-scale power systems security assessment.

## References

- [1] Anderson, P.M, Fouad, A.A.(1977) *Power system control and stability*, The Iowa State University Press
- [2] Yu, Y.N.(1983) *Electric power system dynamics*, New York Academic Press
- [3] Boudour, M., Bensenouci, A.(1994) Effect of load characteristics and PSS on the stability regions using damping and synchronizing torques. *Middle East Power Conference*, Assiut, Egypt
- [4] Boudour, M., Bensenouci, A.(1998) Multimachine power system stability assessment using torques indexes and modal analysis. *AMSE Journal Modelling Measurement and Control* 69: 55-69
- [5] Aggoune M.E.(1988) *Power System Security Assessment Using Artificial Neural Networks*, PHD Thesis, University of Washington
- [6] Feilat E.A.(2000) Power system dynamic stability using least squares, Kalman filtering and genetic algorithms. *Proceeding of the IEEE South East Conference* 9: 489-492
- [7] Mugwanya, D.K., Van Ness, J.E.(1987) Mode coupling in power systems. *IEEE Trans. Power System* 2: 264-270
- [5] De Oliveira, S.E.M.(1994) Power system steady state stability as affected by static var compensators. *IEEE Trans. Power Systems* 9: 109-119
- [6] Yoshimura, K., Uchida, N.(2001) Proposal of remote signal input PSS for improving power transfer capability considering damping and synchronizing torques. *IEEE Power Engineering Society Winter Meeting* 3: 1329-1334
- [7] Pourbeik, P., Gibbard, M.J.(1994) Damping and synchronizing torques induced on generators by facts stabilizers in multimachine power systems. *IEEE Trans. Power Systems* 11:1920-1925
- [8] El-Sharkawi, M.A., et al.(1989) Dynamic security assessment of power systems using artificial neural networks. *Proc. of second Symposium on Expert Systems*, pp. 378-384
- [9] Mansour, Y., et al., Dynamic security contingency screening and ranking using neural networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, pp. 942-950
- [10] Meyer, B., Nativel, G.(1999) New trends Requirements for dynamic security assessment. *Control Engineering Practice* 7: 375-380
- [11] Srinivasan, D., et al.(1998) Power system security assessment and enhancement using artificial neural network. *Proceedings of the International Conference on Energy Management 2.*: 582-587
- [12] Niebur, D., Germond, A.J.(1992) Power system security assessment using the Kohonen neural network classifier. *IEEE Trans. Power Systems* 7:865-872
- [13] Jensen, C.A.(2001) Power system security assessment using neural networks : feature selection using fisher discrimination. *IEEE Trans. Power Systems* 16: 757-763
- [14] Brandwain, V. et al.(1997) Severity Indices for Contingency Screening in Dynamic Security Assessment. *IEEE Trans. Power Systems* (12):1136-1142
- [15] Vafai, H., Jong, K.(1992) Genetic algorithms as a tool for feature selection in machine learning. *Proc. of fourth international Conference on tools with Artificial Intelligence*, Arlington, VA, pp. 200-203
- [16] Reed, R.D., Marks, R.J.(1999) *Neural smithing: Supervised learning in feedforward ANN*, Cambridge, MA : MIT Press
- [17] Veerasoonyia, S., El-Sharkawi, M.A.(1991) Use of Karhunen- Loe's expansion in training neural networks for static security assessment. *Proc. of first international forum on Applications of Neural Networks to Power Systems*, Seattle, WA, pp. 59-64
- [18] Kohonen, T.(1999) *Fast Evolutionary Learning With Batch-Type Self-Organizing Maps*, Neural Process Lett
- [19] Rauber, A., Merkel, D., Dittenbach, M. (2002) The growing hierarchical self-organizing map: exploratory analysis of high-dimensional data. *IEEE Trans. Neural Networks* 13: 1331-1341
- [20] Boudour, M., Hellal, A.(2003) Self-organizing feature maps for power system dynamic security assessment using synchronizing and damping torques technique. *Proceedings of the 29th Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Roanoke, Virginia*, pp.752-758
- [21] Marks II, R.J., et al.(1988) The effect of stochastic interconnects in artificial neural network classification. *IEEE International Conference on Neural Networks*

# OPTIMUM DESIGN OF A DISCRETE OUTPUT FEEDBACK CONTROL FOR INTERCONNECTED POWER SYSTEMS USING GENETIC ALGORITHM

Ahmed Bensenouci<sup>1</sup>, SIEEE\*  
*bensenouci@ieee.org*

A. M. Abdel Ghany<sup>2</sup>, MIEEE  
*ghanymohamed@ieee.org*

Electrical Technology Department  
 College of Technology at Al-Baha, P.O. Box 6, Al-Baha, KSA

\* Corresponding author

<sup>1</sup> Originally, Associate Professor at Ecole Nationale Polytechnique, ENP, Algiers, Algeria

<sup>2</sup> Originally, Assistant Professor at Helwan University, Cairo, Egypt

## I. ABSTRACT

This paper presents an approach for designing optimum output feedback for decentralized load frequency Controllers (LFC) for interconnected power systems using Genetic Algorithm (GA). The overlapped original system is decomposed into subsystem (area). A Local Output Feedback Controller (LOFC) is designed for each subsystem and its relative optimum gains matrix is derived using GA. The proposed approach is implemented on a three-area interconnected power system where the system performance is analysed by simulating different disturbances. Effectiveness is shown through a comparative study with the Conventional Integral Control (CIC).

**Keywords:** Load Frequency Control, Overlapping Decentralized Technique, Output Feedback Control, Genetic Algorithm.

## II. INTRODUCTION

For reasons of economy and reliability, neighboring power systems are connected. The net power flow on the tie lines connecting a system to the external system is frequently scheduled by a prior contract basis [1-3]. System disturbances caused by load fluctuation result in changes in tie-line power and system frequency which give rise to a Load Frequency Control (LFC) problem. Based on this primary objective, LFC's goal is to regulate the power output of an electric power generator within a prescribed area, in response to changes in system frequency, tie-line loading, or both.

Several researches [2,4-5] employed continuous linear optimal control theory to solve the LFC problem. However, the realization of such controller is difficult because the feedback portion of the optimal controller is a function of the complete state vector of the system. Generally, not all state variables are accessible. Even if the state estimation techniques are used to estimate the inaccessible state variables, the data needs to be

transferred over long distances, in large interconnected systems. In addition, the system data required for determining the control signal in each subsystem is measured in discrete mode and then transferred over the telemeter links [6-10]. It is also recognized that the centralized LFC poses many difficulties in telemetering the system data for process to a centralized controller when the size and complexity of the interconnected power system increases [2]. Accordingly, it is more reliable to deal with a decentralized LFC [11-12]. In the LFC problem, often the control criterion is to minimize the Area Control Error (ACE) who is defined as a linear combination of the tie-line power and the area frequency deviation from their set points. Significant efforts on control strategies for optimal feedback controllers were made [13-15].

In this work, GA is applied to the optimization of the output feedback controller defined by a constant feedback gains matrix to be determined. GA application represents a modern optimization tool characterized by some good features as compared to classical optimization techniques [16-17]. The application is made to a decentralized LFC through Siljak's technique [18]. In order to achieve of the LFC requirements, the application of the Conventional Integral Control (CIC) is also considered for comparison purposes with GA one. In short, this paper provides a simple modified approach for designing discrete Local Output Feedback for decentralized LFC of an interconnected power system. The procedure is started by decomposing the interconnected power system into areas. A local discrete output feedback, based on the sampling interval, is designed for each area where GA is used to determine the LOFC gains matrix. GA uses binary numbers to perform its main steps namely, selection, crossover, and mutation. The passage from binary to real is required since the cost function (fitness) is evaluated with real floating numbers. The proposed design procedure is applied to three interconnected power system. Effectiveness is demonstrated using wide range of operating conditions and parameter variations.

### III. POWER SYSTEM MODELING AND DECOMPOSITION

The proposed control methodology is implemented on interconnected power system comprising three areas of which one is a hydro and the others are steam with/without reheat power plants [9,12].

#### A. Continuous-time dynamic model

The continuous linear dynamic model, in state-space form, can be written as:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1)$$

Where

$\mathbf{x}$  state vector ( $n \times 1$ ,  $n=13$ )

$\mathbf{u}$  control & disturbance vector ( $6 \times 1$ ):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta P_{d1} & \Delta P_{c1} & \Delta P_{d2} & \Delta P_{c2} & \Delta P_{d3} & \Delta P_{c3} \end{bmatrix}^t$$

$\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ) &  $\mathbf{B}$  ( $n \times 6$ ) constant matrices

The state variables and inputs are defined as follows:

- Incremental frequency deviations:  
 $\Delta F_1 = x_1, \Delta F_2 = x_6, \Delta F_3 = x_{11}$
- Incremental change in tie-line powers:  
 $\Delta P_{tie1} = x_5, \Delta P_{tie2} = x_{10} - x_5, \Delta P_{tie3} = -x_{10}$ .
- Incremental load demand change:  $\Delta P_{di}$  ( $i=1-3$ ): disturbance
- Incremental speed changer position:  $\Delta P_{ci}$  ( $i=1-3$ ): control
- Area control error:  $ACE_i = \Delta P_{tie_i} + B_i \Delta F_i$ ,  $B_i$ : weight factor ( $i=1-3$ )

The entries of  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  can be deduced from Figure 1 and the appendix.

#### B. System Decomposition

The overlapping decentralization technique proposed by Siljak [18] is employed to decompose the full system into subsystems (areas). In this technique, the areas represent the subsystems while the change in tie-line power is the overlapping part. The details of decomposition of interconnected multi-areas of LFC in longitudinal connection have been proposed in [12]. In the considered case, the system is decomposed into three component ( $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2$  &  $\tilde{\mathbf{x}}_3$ ) representing the 3 areas and defined by

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^t \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{bmatrix}^t \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix}^t \end{cases} \quad (2)$$

With this representation, the system becomes

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Where  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{B}_{ij}$  ( $i, j=1-3$ ) are subsystem matrices whose elements depend on the system parameters and

$$u_i = [\Delta P_{di}, \Delta P_{ci}]^t \quad (i=1-3)$$

The new state vector  $\tilde{\mathbf{x}}$  ( $15 \times 1$ ) is related to  $\mathbf{x}$  by:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (4)$$

Where  $\mathbf{T}$  is a non-square matrix ( $15 \times 13$ ) defined by:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Where  $\mathbf{I}_i$  is an identity matrix of dimension "i" whereas 0 is a matrix of 0 entries and proper dimension, "1" number one.

The expanded system can be reformulated using overlapping subsystems as follows [18]:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (6)$$

where

$\tilde{\mathbf{A}}$  ( $15 \times 15$ ) and  $\tilde{\mathbf{B}}$  ( $15 \times 6$ ) represent the overlapping expanded system matrices and

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^* - \mathbf{M} \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad (8)$$

$$\mathbf{T}^* = (\mathbf{T}^t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t \quad (9)$$

$\mathbf{M}$  is a square matrix ( $13 \times 13$ ) that has the following form:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.5A_{12} & -0.5A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5A_{22} & -0.5A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5A_{22} & -0.5A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5A_{32} & 0.5A_{32} & 0 & 0.5A_{34} & -0.5A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5A_{44} & -0.5A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5A_{44} & 0.5A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5A_{54} & 0.5A_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Using the previous equations, the expanded system can be described as:

$$\tilde{x}_i = \tilde{A}_i \tilde{x}_i + \tilde{B}_i u_i + \sum_{i \neq j} \tilde{A}_{ij} \tilde{x}_j + \sum_{i \neq j} \tilde{B}_{ij} u_j \quad (11)$$

Where  $\tilde{A}_i$  and  $\tilde{B}_i$  ( $i=1-3$ ) are the matrices corresponding to the three decoupled subsystems. The control input to each subsystem is defined by  $u_i = [\Delta P_{di}, \Delta P_{ci}]^t$ .

For the control purpose, assume weak coupling element such as  $\tilde{A}_{ij}$  &  $\tilde{B}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) can be neglected. Therefore,

the decoupled controlled subsystems are given by:

$$\tilde{x}_i = \tilde{A}_i \tilde{x}_i + \tilde{B}_i u_i \quad (12)$$

It must be noted that the system described by (1) and the subsystems, obtained after decoupling process using (12), should be controllable.

### C. Discrete-time dynamic model

A discrete-time model for each subsystem can be obtained, for  $i=1-3$ , from (12) in the form:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = \Phi_i x_i(k) + \Delta_i u_i(k) \\ y_i(k+1) = C_i x_i(k+1) \end{cases} \quad (13)$$

( $i=1-3$ )

where,  $x_i(k) = x_i(kT_s)$ ,  $u_i(k) = u_i(kT_s)$  are specified at  $kT_s$ ,  $k=0,1,\dots$  and  $\Phi_i$ ,  $\Delta_i$  are the state transition and input driving matrices, respectively, which depend on the sampling interval  $T_s$ . To simplify the analysis, "i" is dropped. Equation (13) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Delta u_k \\ y_{k+1} &= C x_{k+1} \end{aligned} \quad (14)$$

## IV. OUTPUT FEEDBACK CONTROL

On the basis of an assumed sampling interval  $T_s$ , the state prediction equation of the discrete-time linear model

described by (14) can be derived as follows. Using (14), the following equation can be derived:

$$z_k = H_1 x_{k+1} - H_2 v_k \quad (15)$$

Where

$$H_1 (N \times N) = \begin{bmatrix} C\Phi^{-1} \\ C\Phi^{-2} \\ \dots \\ C\Phi^{-N} \end{bmatrix}$$

$$H_2 (N \times N) = \begin{bmatrix} C\Phi^{-1}\Delta & 0 & \dots & 0 \\ C\Phi^{-2}\Delta & C\Phi^{-1}\Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ C\Phi^{-N}\Delta & C\Phi^{-N+1}\Delta & \dots & C\Phi^{-1}\Delta \end{bmatrix} \quad (16)$$

Multiplying (16) by  $H_1^{-1}$ , one gets

$$x_{k+1} = F_1 z_k + F_2 v_k \quad (17)$$

Where;

$$z_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \dots \\ y_{k-N+1} \end{bmatrix} \quad v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ \dots \\ u_{k-N+1} \end{bmatrix}$$

$$F_1 = H_1^{-1} \quad F_2 = H_1^{-1} H_2$$

The output-prediction equation can obtain as follows:

$$y_{k+1} = C x_{k+1} = \alpha z_k + \beta v_k \quad (18)$$

Where,  $\alpha = C F_1$ ,  $\beta = C F_2$  and  $N$  is the number of measurements of the outputs and inputs from  $t=kT_s$  back to  $t=(k-N+1)T_s$ .

Equation (18) completely defines the process dynamics without reference to the state vector  $x$ . The minimum number of previous  $N$  measurements is selected such that  $N \geq n/p$  where  $p$  is the number of outputs [14-15].

To obtain output prediction formulation, (18) can be rearranged as follows. After vertically partitioning  $\beta$  into  $\beta_2$  and  $\beta_1$ , (18) becomes:

$$y_{k+1} = \alpha z_k + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} v_k \quad (19)$$

Then

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ \dots \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-N+1} \end{bmatrix} + \beta_2 u_k \quad (20)$$

And (20) is augmented by additional rows to form;

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \dots \\ y_k \\ \vdots \\ y_{k-N+2} \\ \dots \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1N} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_p & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I_M & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & J_M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-N+1} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_{k-N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ J_M \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (21)$$

Or, in simplified form,

$$w_{k+1} = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} z_k \\ v_{k-1} \end{bmatrix} + \Omega u_k$$

Thus, the prediction equation of the augmented vector  $w_{k+1}$  can be written in compact form as:

$$w_{k+1} = \theta w_k + \Omega u_k \quad (22)$$

Where;  $\theta$  and  $\Omega$  are the second and fourth matrices, respectively and the compound output vector  $w_{k+1}$  is given as shown in (21).

A state feedback optimal control law for the system described by (14),  $u_k = F_s x_k$ , may be found by minimizing, with respect to  $u_k$ , the quadratic-performance index:

$$J_s = \sum_{k=0}^r \left[ x_{k+1}^t Q x_{k+1} + u_{k+1}^t H u_{k+1} \right] \quad (23)$$

Where  $F_s$  is the optimal state feedback gains.

Since (22) is similar to (14), by a similar way, an output feedback optimal control law for the system described by

(22),  $u_o = F_o w_k$ , may be found by minimizing, with respect to  $u_o$ , the quadratic-performance index:

$$J = \sum_{k=0}^r \left[ w_{k+1}^t Q w_{k+1} + u_{k+1}^t H u_{k+1} \right] \quad (24)$$

When using (22), one gets

$$J = \sum_{k=0}^r \left[ w_k^t Q w_k + u_k^t R w_k + u_k^t S u_k \right] \quad (25)$$

Where

$$\begin{cases} Q = F_o^t Q F_o \\ R = 2F_o^t Q F_o \\ S = F_o^t Q F_o + H \end{cases} \quad (26)$$

The matrix  $F_o$  is the optimal output feedback gains matrix. To obtain  $Q$ ,  $R$  and  $S$  matrices,  $F_4$  and  $F_5$  must be known. The matrices  $Q_s$  and  $H_s$  are weighting matrices that should be selected properly to meet some desired performance. The former should be symmetric positive semi-definite whereas, the later should be symmetric positive definite matrix to get the global minimum [14-15].  $F_4$  and  $F_5$  can be obtained as described next.

From (17) and if  $F_2$  ( $N \times N$ ) is vertically partitioned into  $F_4$  ( $N \times m$ ) and  $F_3$  ( $N \times N-m$ ), (17) becomes

$$x_{k+1} = F_2 z_k + [F_4 \ F_3] v_k \quad (27)$$

That can be rearranged as:

$$x_{k+1} = [F_1 \ F_3] z_k + F_4 u_k = F_5 z_k + F_4 u_k \quad (28)$$

To calculate the output feedback control gains  $F_o$ , two optimization solver techniques are presented, namely, Genetic Algorithm (GA) and the Dynamic Programming (DP).

## V. DYNAMIC PROGRAMMING (DP)

Dynamic Programming (DP) technique is used to minimize  $J_o$  given by (24) at several stages starting from initial stage  $k=0$  and moving backward until stage  $k=r$ . If  $r$  is large enough, the DP algorithm converges to  $F_o$  that is constant. The multi-stage dynamic programming algorithm [14] is summarized as follows:

Step 1: Initialization process

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \\ \text{Compute} \\ \eta &= R + 2^* \Omega^t \sigma + \theta \\ \mu &= S + \Omega^t \sigma \Omega \end{aligned}$$

$$F = -0.5 * \mu^{-1} \eta$$

$$k=1$$

Step 2: Iterate while  $k > 0$

$$\{ F_0 = F$$

$$\sigma = Q + \theta^t \sigma \theta + F^t \eta + F^t \mu F$$

$$\mu = S + \Omega^t \sigma \Omega$$

$$\eta = R + 2 * \Omega^t \sigma * \theta$$

$$F = -0.5 * \mu^{-1} \eta$$

If  $|F - F_0| > \text{tolerance}$ , break, stop

$$k = k + 1;$$

$$\}$$

$$F_D = F$$

Where  $F_D$  is the Dynamic programming gains matrix.

## VI. OPTIMIZATION PROBLEM FORMULATION

To obtain a constant output feedback control gains matrix  $F_0$  using an optimization technique, replace  $u_k$  by

$u_k = F_0 w_k$  into (25) to get;

$$J_0 = \sum_{k=0}^r \left[ w_k^t (Q + F_0^t R + F_0^t R) w_k \right] \quad (29)$$

On the basis of assumed sampling time interval  $T_s$ , the optimization problem is thus defined by:

Find  $F_0$  that minimizes  $J_0 = \sum_{k=0}^r \left[ w_k^t G w_k \right]$  with respect

to  $u_k = F_0 w_k$  using Genetic Algorithm (GA).  $G$  matrix is given by  $G = Q + F_0^t R + F_0^t R F_0$ .

## VII. GENETIC ALGORITHM (GA)

GA is based on the selection of a cost function and a search interval then an initial population, randomly chosen inside the search interval, and finally, an iterative application of the three main steps; *reproduction*, *crossover*, and *mutation*, until convergence (stabilization of the fitness function) is obtained or a specific number of iterations is reached. The 3 steps are described as follows [16-17]:

### Reproduction:

Select the chromosomes from current generation (population) to be parents to the next generation. A chromosome is selected (reproduced) based on its fitness. Chromosomes with lowest fitness values are discarded and those with higher fitness values, i.e., fittest, are kept for the next generation, i.e., they survive.

### Crossover:

To produce a variety in the next generation, some

members (chromosomes) are paired randomly. Each paired string exchanges a randomly chosen portion of its bits with its mate. This produces new chromosomes that maintain many of the characteristics of their parents.

### Mutation:

After crossover, each chromosome of the population will alter some of its bits, i.e. if bit is 0 it is changed to 1 and vice-versa. Usually, the number of bits altered is very low. The mutation step prevents the algorithm from losing some potentially useful information that might prevent the algorithm from reaching its optimum.

The detailed algorithm of GA is presented next. First, define a cost function or *fitness*  $J = f(F)$  to be optimized, where  $F$  is the variable (*chromosome*) to be determined, that optimizes  $f(F)$ . The steps are described next.

### Step 1: Initialization

Select appropriate search intervals for

$$F = \{F_1, \dots, F_{N_{pop}}\}$$

Where  $N_{pop}$  is the population size, and

$F_i$  is the  $i^{\text{th}}$  chromosome written as a horizontal concatenation:  $F_i = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]$  where  $i=1, \dots, N_{pop}$  and  $m$ : being the number of parameters to be optimized. In this study,  $m=27$  (9 gains for each of the 3 areas). The parameter  $F_j = p_j$  is bounded, i.e.,

$p_j \in [p_{\min,j}, p_{\max,j}]$  where  $j = 1, \dots, m$  and  $p_{\min,j}$  and  $p_{\max,j}$  are the lower and upper bounds, respectively, of  $p_j$ .

The optimum of the fitness function  $f(F)$  is evaluated for each chromosome  $F_i$  written in real-based numbers whereas, the three main GA steps use binary-based numbers. The passage from real to binary (encoding) and vice versa (decoding) is illustrated through an example shortly.

Generate randomly a population  $P_{k=0}$ , i.e.,  $P_{k=0} = \{F_1, F_2, \dots, F_{N_{pop}}\}$ . The index "k" is a counter that represents the generation index ( $k=0$ , initial population,  $k=1$ , first generation, etc.).

### Encoding/Decoding of a Chromosome:

Because floating binary numbers are used in GA, a conversion from real to binary (encoding) and vice versa (decoding) is required. To simplify; let the string of  $F_i$  has two unknown gains (parameters)  $F_{i1}$  and  $F_{i2}$

$$F_i = [F_{i1} \ | \ F_{i2}] = '1001010101 \ | \ 0101001101'$$

Where each binary string is made of  $N_{bit}=10$  bit binary string for each of the 2 parameters. The parameter bounds are:

$$F_{i1} \in [p_{1\min}, p_{1\max}] = [1, 30]$$

$$F_{i2} \in [p_{2\min}, p_{2\max}] = [0.01, 5]$$

The chromosome  $F_i$  can be represented as:

	Gene 1 ( $F_{i1}$ )	Gene 2 ( $F_{i2}$ )
$F_i =$	0101000101	0101111001

String	$F_{i1}$	Coding (Population Size: 10)		$F_{i2}$
1	1	0000000000	0000000000	0.01
2	20.3	1010101010	1010101010	3.35
3	30	1111111111	1111111111	5

#### Encoding of String 2 of $F_{ij}$ :

$$F_{i1bin} = dec2bin[(F_{i1dec} - p_{1min})/Q_1]$$

$$= dec2bin[(20.3-1)/0.0283] = '1010101010'$$

$$Q_1 = (p_{1max} - p_{1min}) / (2^{N_{bit}} - 1) = (30-1) / (2^{10} - 1) = 0.0283$$

#### Decoding of String 2 of $F_{ij}$ :

$$F_{i1dec} = bin2dec[F_{i1bin}] * Q_1 + p_{1min} = 20.3$$

$$Q_1 = (F_{i1max} - F_{i1min}) / (2^{N_{bit}} - 1) = (30-1) / (2^{10} - 1) = 0.0283$$

With

*bin2dec*: conversion from binary to decimal

*dec2bin*: conversion from decimal to binary

#### Step 2: Reproduction

- For each value of  $F = \{F_1, \dots, F_{N_{pop}}\}$ , evaluate the value of the corresponding fitness function, i.e.  $f(F_1), \dots, f(F_{N_{pop}})$ .
- Compute the total value of the fitness function  $F_{tot} = f(F_1) + \dots + f(F_{N_{pop}})$ .
- Compute the probability of selection for each chromosome  $F_i$ :  $p_i = f(F_i) / F_{tot}$ ,  $i=1, \dots, N_{pop}$ .
- Compute the cumulative probability for each chromosome  $F_i$ :  $q_i = p_1 + \dots + p_i$ .
- Generate a random number  $r \in [0, 1]$ .
- For all  $F_i$  ( $i=1, \dots, N_{pop}$ ) do the following: if  $r < q_i$  select  $F_i$  as a candidate for reproduction, otherwise select  $F_1$  such that  $q_{i-1} < r < q_i$ .
- At this stage, some chromosomes will survive (reproduced or kept) whereas others will die (eliminated).

#### Step 3: Crossover

- The probability of crossover,  $P_c$ , gives the number of chromosomes  $r_c$  that will undergo the crossover process:  $r_c = P_c * N_{pop}$ , i.e.  $P_c$  times the size of the population.
- For each chromosome of the generation (after reproduction), generate a random number  $r \in [0, 1]$  interval, then choose  $F_i$  ( $i=1, \dots, N_{pop}$ ) for which

$r < P_c$ .

- Randomly couple the chromosomes, that is, each 2 chromosomes together.
- For each couple, randomly generate an integer number "pos" in  $[1, N_{pop}]$  interval. This number indicates the position of the bit submitted to crossover position, i.e., for  $r_c=1$ :

$$F_1 = (b_1 \dots b_{pos} b_{pos+1} \dots b_{N_b})$$

$$F_2 = (c_1 \dots c_{pos} c_{pos+1} \dots c_{N_b})$$

are replaced by

$$F_1 = (b_1 \dots b_{pos} c_{pos+1} b_{pos+2} \dots b_{N_b})$$

$$F_2 = (c_1 \dots c_{pos} b_{pos+1} c_{pos+2} \dots c_{N_b})$$

Where  $N_b$  is the number of bits.

#### Step 4: Mutation

- The probability of mutation,  $P_M$ , gives the number  $r_M$  of bits in a chromosome to undergo the mutation process:  $r_M = N_b * P_M * N_{pop}$ . For each bit, generate a random number  $r \in [0, 1]$  then inverse the bit if  $r < P_M$ .

For example

$$F_1 = (b_1 b_2 \dots b_i=0 \dots b_{N_b})$$

if  $r < P_M$  for bit  $b_i$  we get

$$F_1 = (b_1 b_2 \dots b_i=1 \dots b_{N_b})$$

#### Step 5: Updating and Stopping Criterion

At this point, a new generation  $P_{k+1}$  is obtained from  $P_k$ . Set  $P_k = P_{k+1}$  and repeat step 2 (reproduction), step 3 (crossover) and step 4 (mutation) using the new  $P_i$  until convergence is obtained, i.e., error =  $|P_k - P_{k-1}| < \epsilon$  where  $\epsilon$  is a predetermined tolerance.

## VIII. SIMULATION RESULTS

The digital simulation is done using MATLAB Platform with the following data for GA:

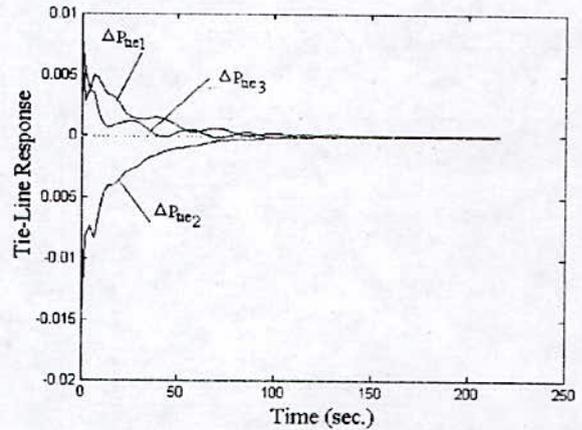
$P_c = 0.25$	Crossover probability
$P_M = 0.1$	Mutation probability
$N_{pop} = 10$	Population number
$N_b = 10$	binary string length

The system used comprises 3 areas; one hydro and 2 steam power plants one with and the other without reheat, as shown in Figure 1. Under normal operating conditions, the simulation is started by calculating the OFC gains for each area using GA. The later are shown in Table 1.

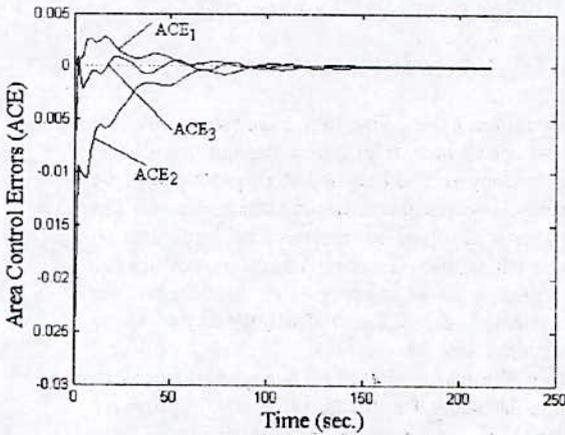
Table 1 OFC gains matrices

$F_o$		
0.0491	0.0267	0.0012
-0.0044	-0.0320	-0.0014
0.0430	-0.0217	-0.0217
-0.0219	-0.0504	0.0399
-0.0113	-0.0187	-0.0218
-0.0494	0.0274	-0.0288
0.0351	0.0269	-0.0384
0.0185	0.0309	-0.0396
-0.0197	0.0324	0.0405

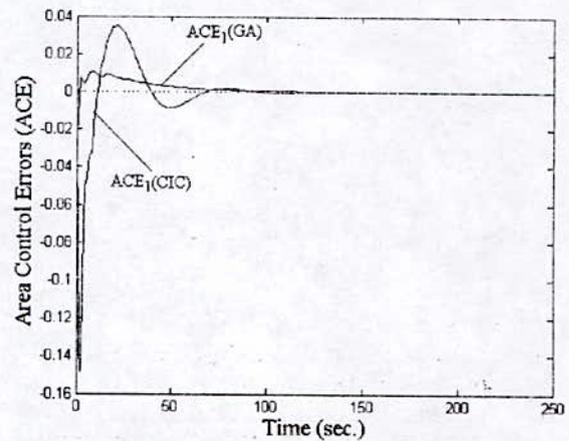
Figure 2 shows the transient responses of ACE,  $\Delta F$  and  $\Delta P_{tie}$  of the three areas with 1% step change in  $\Delta P_{di}$  ( $i=1-3$ ). Similarly, figure 3 shows the transient responses of  $ACE_i$ ,  $\Delta F_i$  and  $\Delta P_{tie1}$  when the system is subjected to a step input of  $\Delta P_{d1}=\Delta P_{d2}=5$  and  $\Delta P_{d3}=3\%$  using both GA and CIC. The responses of the controlled system using either CIC or GA verify the LFC requirements of removal of steady state errors but GA shows better performance than CIC. For further testing the effectiveness of the proposed controllers, the system parameter values ( $Tp_1, kp_1, Tp_2, kp_2, R_1$ ) are increased by 20% and ( $Tp_3, kp_3, R_2, R_3$ ) by 30 % simultaneously, from their base case values. Figure 4 shows the transient response of ACE,  $\Delta F$  and  $\Delta P_{tie}$  when the three areas is subjected to 5%, 5% and 3% step change in  $\Delta P_{di}$  ( $i=1-3$ ), respectively, besides the parameter changes mentioned previously. The results indicate that the proposed controllers yield good performance over a wide range of operating conditions.



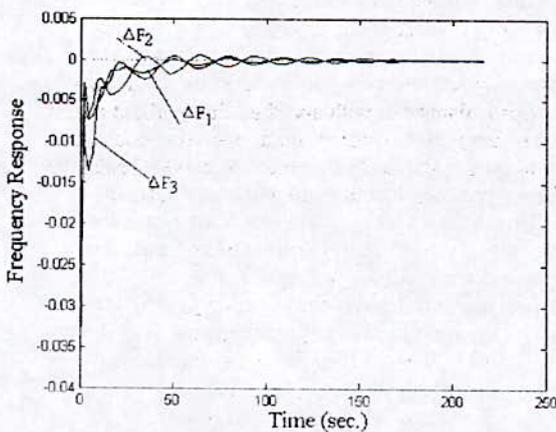
(c) Tie-Line Power Response

Fig. 2 System Response due to  $\Delta P_{di}=1\%$ ,  $i=1-3$ , (Output Feedback Control with GA)

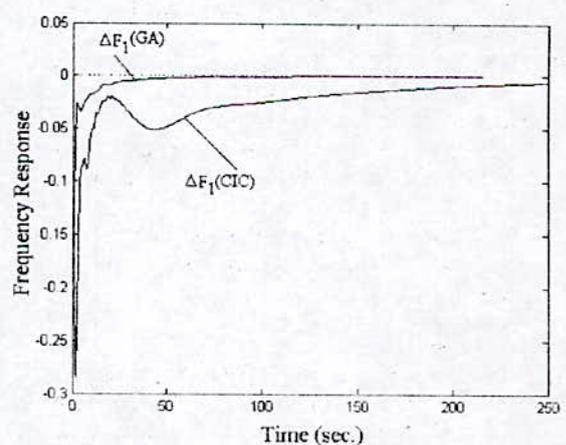
(a) Area Control Error Response



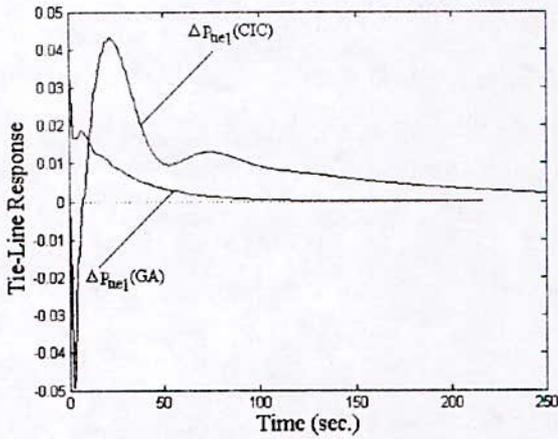
(a) Area Control Error Response (Area 1)



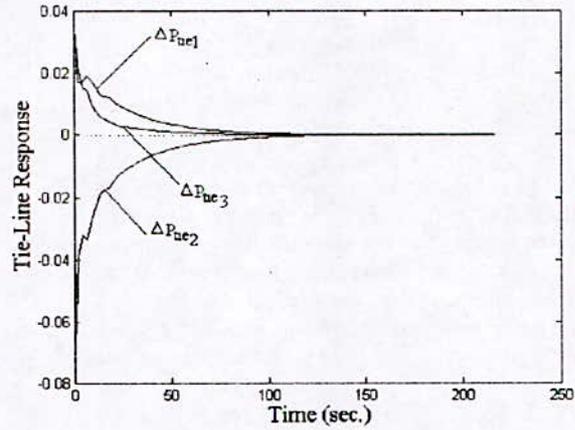
(b) Frequency Response



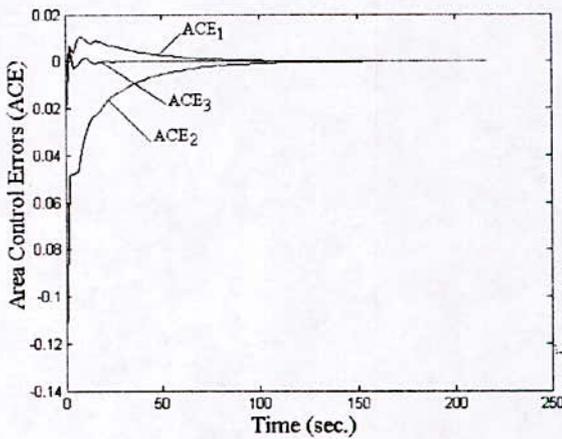
(b) Frequency Response (Area 1)



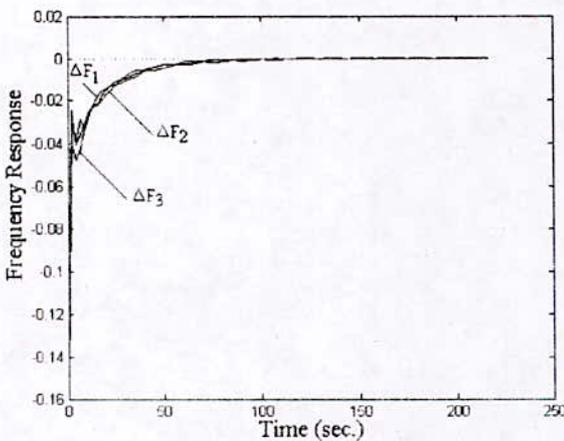
(c) Tie-Line Power Response (Area 1)

Fig. 3 System Response for CIC & GA  
( $\Delta P_{d1}=\Delta P_{d2}=5\%$  &  $\Delta P_{d3}=3\%$ )

(c) Tie-Line Power Response

Fig. 4 System Response due to  $\Delta P_{d1}=\Delta P_{d2}=5$  &  
 $\Delta P_{d3}=3\%$  with parameter changes  
(Output Feedback Control with GA)

(a) ACE Response



(b) Frequency Response

## IX. CONCLUSION

This paper presented the design of a discrete-time optimal Output Feedback Control (OFC) for a decentralized Load Frequency Control (LFC) system to achieve improvements in transient and steady state responses, and to insure zero steady-state errors. The optimization technique used is the Genetic Algorithm (GA). The proposed approach has been applied to a three-area power system connected in a longitudinal structure where different disturbances were applied. The results of local decentralized discrete output feedback controllers were encouraging. To show the effectiveness of the proposed GA-based OFC, a comparative study with the Conventional Integral Control (CIC) is presented where GA shows superior performance improvement.

The advantageous of the proposed controller over the widely known optimal state feedback controllers as applied to LFC design are as follows.

1. The system states should be measured or estimated in order to apply state feedback optimal control as it is not the case for OFC where only measured signals such as the Area Control Error (ACE) and its historical data are used.
2. The proposed controller is local; therefore, each area is regulated by using its own measurable data.
3. The realization of each regulator is simple and costless

As an extension to this work, power system connected in longitudinal or ring multi-area with and without nonlinearities will be considered.

## X. REFERENCES

- [1]. O. I. Elgerd, "Electric Energy System Theory: An Introduction", McGraw-Hill, 1982.
- [2]. C.E. Fosha and O.I. Elgerd "The Megawatt-Frequency Control Problem: a new approach via optimal control theory ", *IEEE Trans. Trans. On Power App. and Systems, PAS-89*, pp. 563-577, 1970.
- [3]. A.J. Wood and B. F. Wollenberg, *Power Generation operation and control*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1994.
- [4]. S.M. Miniesy and E.V. Bohn, "Optimum Load Frequency Continuous Control with Unknown Deterministic Power Demand", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91*, pp. 1910-1915, 1972.
- [5]. H.G. Kwatny, K.C. Kalntsky and A. Bhatt, "An Optimal Tracking Approach to Load-Frequency Control", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94*, pp. 1635, 1643, 1975.
- [6]. R.P. Corfmat and A.S. Morse, "Stabilization with decentralized feedback control." *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-18*, pp.679-682, Dec. 1973.
- [7]. J.D. Colver and F.C. Schweppe, "Advanced Load Frequency Control", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91*, pp. 2095-2103, 1972
- [8]. F.P. Demello, R.J. Mills and W.F. Brells "Automatic Generation Control, part II-Digital Control Techniques", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-92*, pp. 716-724, 1973.
- [9]. A.M. Abdel Ghany, "Discrete Time Decentralized Load Frequency Controllers", *Regional Conference of CIGRE Committees in Arab Countries*, Doha, Qatar, 25-27, May 1999.
- [10]. T. Hiyama, "Optimization of Discrete-Type Load-Frequency Regulators Considering Generation-Rate Constraints", *IEE Proceedings, Vol. 129, Pt. C, No. 6*, November, pp. 285-289, 1982.
- [11]. A.M. Abdel Ghany and A. Bensenouci, "Optimal Adaptive Discrete Time Decentralized LFC Using Evolutionary Programming Technique" *First Baha Technical Meeting, BTM2004*, College of Tech. at Al-Baha, KSA, May 3-5, 2004.
- [12]. A.M. Abdel Ghany, M.E. Bahgat and O.H. Abdalla "Decentralized Pole-Placement Load Controller for a Multi-Area Power System", *Regional Conference of CIGRE Committees in Arab Countries*, Cairo, Egypt, 27-30 Sep. 1997.
- [13]. A. Bensenouci, A. M. Abdel Ghany, M.N. Said-Ahmad and S.A. Alghamdi, "Neuro-Genetic Adaptive Discrete-Time Load Frequency Control for an Interconnected Multi-Area Power System", *AMSE Journal, France, 2002*, Paper No. 320.
- [14]. P.A.W. Walker and O.H. Abdallah, "Discrete Control of an A.C. Turbogenerator by Output Feedback", *Proceedings of the IEE, Control & Science, Vol. 125, No. 9*, Oct. 1978, pp. 1031-38.
- [15]. O.H. Abdallah and S.M. Osheba, "Compture Control of A Turbogenerator System with a Single Output-Feedback Strategy", *Engineering Results Bulletin*, Faculty of Eng. And Tech., Monofia Univ., Vol. Part 2. 1983., pp. 147-68.
- [16]. D.E. Goldberg, *Genetic Algorithms in search, optimization, and machine learning*, Addison-Wesley, 1989.
- [17]. A. Bensenouci, S.A. AlGhamdi, "Genetic Algorithm - Theory and Applications", *Proceedings of the First Saudi Technical Conference & Exhibition, STCEX2000*, Riyadh 18-22 Nov. 2000.
- [18]. D.D. Silijak, "Complex Dynamic systems: Stability, Control and Reliability", *Proceeding of Arab School on Science and Technology: Control System Theory and Applications*, Bloudan, Syria, Aug. 29-Sept. 10, 1981.

## XI. APPENDIX

The parameters of the first area:

$$T_{p1}=3.76; k_{p1}=20; T_w=1; T_3=32; T_2=5; T_1=0.6; R_1=3; T_{12}=0.545/(2*\pi); B_1= 0.383;$$

The parameters of the second area:

$$k_{p2}=80; T_{p2}=20; T_{t1}=0.3; T_{r1}=10; k_{t1}=0.5; T_{g1}=0.38; R_2=2.4; T_{21}= T_{12}; B_2=0.425;$$

The parameters of the third area:

$$k_{p3}=100; T_{p3}=20; T_{32}= T_{21}; T_{g2} = 0.4; R_3=2.4; B_3=0.425$$

## XII. VITAE



**Dr. Ahmed BENSENOUCI** obtained his Ph.D. in Electrical Engineering from Purdue University, IN, USA, in 1988, his Master of Engineering in Electric Power Engineering from Rensselaer Polytechnique Institute, NY, USA, in 1983, and his B.S. in Electrical Engineering from Ecole Nationale Polytechnique, Algiers, ALGERIA, in 1981. He got promoted to Associate Professor in Ecole Nationale Polytechnique, ALGERIA in 1992 where he was working since 1989. From 1994 to 1996, he worked at the University of 7<sup>th</sup> of April, Zawia, Libya and during 1996 to 1998, at the University of Malaya, KL, Malaysia, as a Staff member. From 1998 until now, he is with the College of Technology at Al-Baha, Saudi Arabia where

he was granted distinguished lecturer for the year 2000. He authored more than 70 papers in several areas of Power System including the application of Intelligent Networks (Neural Network, Fuzzy Logic, Genetic Algorithm). His research areas include Power System Modeling, Analysis and Control, and Application of Intelligent Techniques (Neural Networks, Fuzzy, Genetic Algorithm, Variable Structure, ...etc) to the Analysis and Control of Power System. He is a Senior IEEE Member.



Dr. A.M. ABDEL GHANY received his Ph.D. in Computer Controlled Systems from the Institute of

Control and Systems Engineering, Technical University of Wroclaw, Poland, in 1994, his Master of Science and B.S. degrees from the Electrical Machines and Power System Department, Helwan University, Cairo, Egypt, in 1980 and 1987, respectively. From 1994 to 1999, he worked as an Assistant Professor at the Department of Electrical Machines and Power System, Helwan University, Cairo Egypt. He got promoted to Associate Professor in the same Department, in 2002. From 1999 until now, he is a Staff Member at the Electrical Technology Department, College of Technology at Al-Baha, Al-Baha, Kingdom of Saudi Arabia. Dr. Abdel Ghany has authored more than 42 papers in Control and Analysis of Power System. His areas of interest are Control of Power System and Electrical Machine, Automatic and Digital Control Systems. He is an IEEE Member.

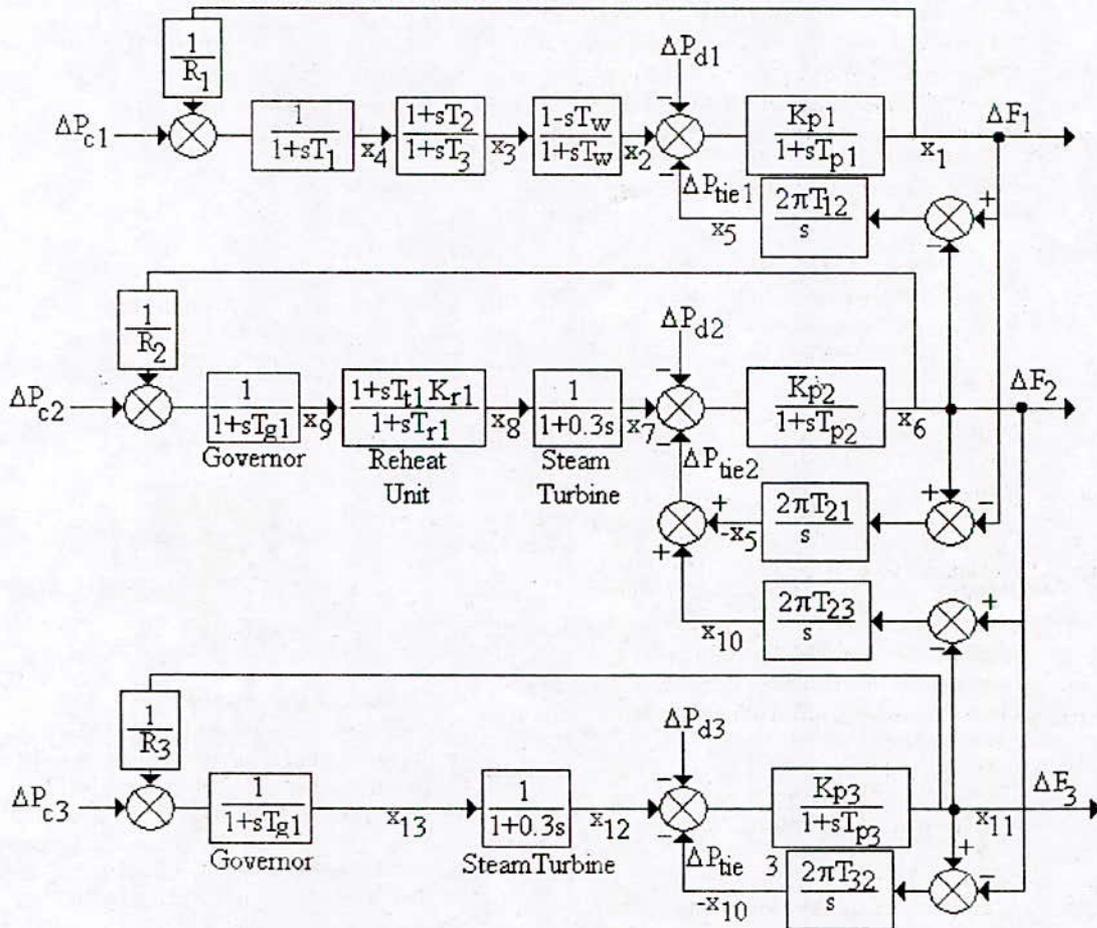


Fig. 1 Three-Area Load Frequency Control System

## Torsion d'un cylindre avec double périodicité. Endommagement

M'barek Taghite<sup>\*</sup>, Khalid Taous<sup>\*\*</sup>, Gérard Maurice<sup>\*</sup>, Ammar Ould-Hammouda<sup>\*\*\*</sup>, Hélène Lanchon-Ducaquis<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée  
2 avenue de la Forêt de Haye  
BP 160

54504 Vandoeuvre Cedex - FRANCE

<sup>\*\*</sup> Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz  
Université de Metz, Île du Sauley  
57045 Metz cedex - FRANCE

<sup>\*\*\*</sup> Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure(ENS-Kouba),  
vieux Kouba, BP : 92, Kouba, Alger, ALGERIE

### Résumé :

On estime le module équivalent de rigidité à la torsion et le risque d'endommagement pour un cylindre dont la section multiconnexée présente une double porosité irrégulière. On met en évidence les complications du modèle générées par le contraste d'échelles entre les zones poreuses et compactes.

**Mots clefs:** Homogénéisation ; Multipériodicité ; Contraste d'échelles ; Endommagement.

### I. Introduction

Le problème de torsion d'un arbre cylindrique permet (en général) de ramener la recherche des 9 inconnues de l'ingénieur (composantes respectives des champs de contraintes et de déplacements) à la détermination d'une unique inconnue scalaire  $\theta^\varepsilon$ , appelée fonction de contraintes; cette dernière est, dans le cas d'un équilibre quasi-statique, solution d'un problème aux dérivées partielles, de type elliptique, formulé sur la partie  $\Sigma^\varepsilon \subset \Sigma$  de la section droite  $\Sigma$  occupé par le matériau; elle est nulle sur la frontière  $\partial\Sigma$ . Lorsque  $\Sigma^\varepsilon$  est multiconnexée (cas d'un arbre perforé ou poreux), les conditions aux limites sur les bords  $\partial\Sigma_p$  des perforations, impliquent une condition intégrale sur chacune de ces courbes fermées pour assurer l'uniformité du champ de déplacements; cette condition génère une complexité supplémentaire au modèle mathématique.

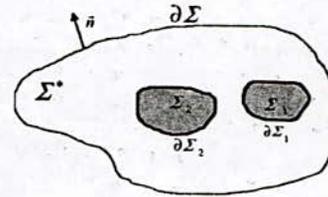


Fig1 : Représentation de la section droite perforée du cylindre (cas  $N = 2$ ).

Nous aborderons ici le cas d'une section multiconnexée présentant une première distribution «  $\varepsilon^r$  - périodique » de zones poreuses; ces dernières comportant une seconde distribution «  $\eta^r$  - périodique » de pores.

On distingue dans  $\Sigma^\varepsilon$ , d'une part les zones compactes dont la réunion sera désignée par  $\Sigma_c^\varepsilon$ , d'autre part les parties pleines des zones poreuses dont la réunion sera désignée par  $\Sigma_p^\varepsilon$ . Il existe aux interfaces entre  $\Sigma_c^\varepsilon$  et  $\Sigma_p^\varepsilon$  un contraste d'échelles «  $\varepsilon^r, \eta^r$  » susceptibles d'y générer des couches limites, lesquelles vont se traduire par d'éventuelles discontinuités lorsque  $\varepsilon$  et  $\eta$  tendent vers 0.

### II. Explicitation du contexte bipériodique considéré

Dans la situation bipériodique qui nous concerne (cf. Fig.2.a) chaque zone perforée ou poreuse appartient à une première période d'ordre  $\epsilon^r$  appelée « bloc »  $B$ ; le complémentaire  $B_c$  des zones poreuses  $B_p$  dans chaque bloc est appelé zone compacte. Nous devons alors considérer de plus une deuxième échelle microscopique  $\eta^r$  correspondant à la période de distribution des pores dans les zones poreuses  $B_p$ ; en fait :

$$\epsilon^r = \max\{\epsilon_1^r, \epsilon_2^r\}$$

$$\eta^r = \max\{\eta_1^r, \eta_2^r\}.$$

Les nombres  $\epsilon_\gamma^r$  et  $\eta_\gamma^r$  (pour  $\gamma = 1$  et  $2$ ) désignent ici les périodes réelles réduites, respectives, pour la direction  $\vec{e}_\gamma$ , de distribution des blocs dans la section  $\Sigma$  et des pores dans la partie  $B_p$  des blocs.

**1. Idées générales de base pour une homogénéisation monopériodique**

Lorsqu'on est en présence d'un milieu hétérogène monopériodique que l'on souhaite homogénéiser, on commence par caractériser la taille (réduite) de la période en posant (dans  $\mathbb{R}^2$  par exemple) :

$$\epsilon^r = \max(\epsilon_1^r, \epsilon_2^r),$$

$\epsilon_i^r$  représentant le côté de la période réelle (microscopique); puis on effectue un zoom de rapport  $(\epsilon^r)^{-1}$  qui envoie cette période sur un pavé  $Y$  d'ordre unité, de côtés :

$$b_i = \frac{\epsilon_i^r}{\epsilon^r}.$$

A partir de là, on génère un processus asymptotique en opérant sur  $Y$  une similitude inverse de rapport  $\epsilon$ ,  $\epsilon \in ]0, \epsilon^r]$  qui va associer à  $Y$  un recouvrement  $\epsilon$ -périodique du domaine réel de départ, par des cellules microscopiques de côtés :

$$\epsilon_i = \epsilon b_i = \frac{\epsilon}{\epsilon^r} \epsilon_i^r$$

lesquels tendent vers 0 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

A chaque point du domaine réel de départ, représenté par la variable macroscopique  $\underline{x} = (x_1, x_2)$ , on peut associer sa position :

$$y = \frac{\underline{x}}{\epsilon}$$

dans le pavé fixe de référence

**2. Adaptation de la méthode au contexte bipériodique**

Au domaine plan  $\Sigma$ , on associe deux pavés de référence à l'aide de deux zooms successifs. Le premier

zoom (cf. fig. 2.b), analogue à celui décrit pour le cas monopériodique doit être un peu détaillé ci-dessous pour mieux faire comprendre les contraintes intervenant au niveau du deuxième. Le domaine  $\Sigma$  peut être recouvert de manière périodique par des blocs  $B_\epsilon$  de taille  $\epsilon^r$ . Le

zoom  $(\epsilon^r)^{-1}$  associe à chacun de ces blocs un bloc  $B$  dont la taille est de l'ordre de l'unité. Tous les blocs  $B$  ainsi obtenus peuvent, quitte à faire une translation être associés à un même pavé  $Y = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  fixé dans  $\mathbb{R}^2$  et :

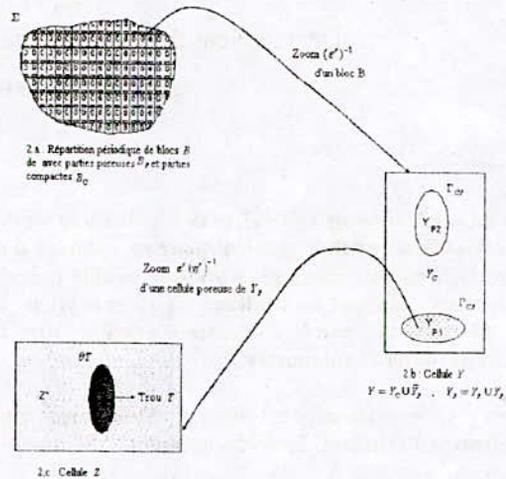


Figure 2 : Structure géométrique bipériodique de la section droite  $\Sigma$

$$B_\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon^r} B = \epsilon (Y + \underline{h}),$$

avec  $\underline{h} = \underline{k} \underline{l} = (k_1 l_1, k_2 l_2)$  où  $\underline{k}$  est un multi-entier.

Ainsi à chaque  $\underline{x}$  dans  $\Sigma$  est associé un seul  $\underline{y}$  dans  $Y$  via la relation :

$$\underline{x} = \epsilon(\underline{y} + \underline{h})$$

Remarquons que dans cette relation  $\epsilon \underline{h}$  représente l'origine du bloc  $B_\epsilon$  dans  $\Sigma$ .

Le pavé  $Y$  consiste alors en deux parties séparées par une frontière  $\Gamma_{cp}$  (cf. fig. 2.b) : une première partie  $Y_c$  qui correspond aux images des points  $\underline{x}$  de la zone compacte de  $\Sigma_c^\epsilon$ , et une deuxième partie  $Y_p$  qui correspond aux images des points  $\underline{x}$  de la zone poreuse de  $\Sigma_p^\epsilon$ . Comme dans le premier processus, cette seconde partie  $Y_p$  peut être recouverte par des blocs  $B_{(\eta^r/\epsilon^r)}$  de taille  $\frac{\eta^r}{\epsilon^r}$ . Par un

deuxième zoom  $(\eta^r)^{-1} \epsilon^r$ , on peut associer à chacun de

ces blocs un bloc  $B'$  dont la taille est de l'ordre de l'unité. Tous ces blocs  $B'$  peuvent, quitte à faire des translations être ramenés à un pavé fixe  $Z = ]0, l_1[ \times ]0, l_2[$  dans  $\mathbb{R}^2$  (cf. fig. 2.c):

$$B'_{(\eta^r, \varepsilon^r)} = \eta \frac{\varepsilon^r}{\eta^r} B' = \eta(Z + \underline{h}')$$

où  $\underline{h}' = \underline{k} \underline{l}' = (k_1 l'_1, k_2 l'_2)$  avec  $\underline{k} \in \mathbb{Z}^2$ .

Ainsi à chaque  $y$  dans  $Y_p$  est associé de manière unique un  $z$  de  $Z$  par la relation :

$$\underline{y} = \eta(\underline{z} + \underline{h}')$$

On peut remarquer que dans cette relation  $\eta \underline{h}'$  représente l'origine du bloc  $B'_{(\eta^r, \varepsilon^r)}$  dans  $Y$ .

Reste alors à effectuer le passage à la limite simultané :

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0$$

en respectant les ordres de grandeurs relatifs des paramètres initiaux  $\varepsilon^r$  et  $\eta^r$  de la manière suivante :

$$\eta = \varepsilon^\delta, \text{ avec } \delta = \frac{\log \eta^r}{\log \varepsilon^r}$$

### III. Énoncé du problème posé

On cherche, dans ce contexte bipériodique, à caractériser le comportement global à la torsion de l'arbre cylindrique correspondant. La réduction dimensionnelle du problème physique conduit au modèle adimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \left( \phi^p \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) + \phi^c \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_a} \right] = 2 \quad \text{dans } \Sigma^\varepsilon \\ \phi^p \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } T^\varepsilon \\ \int_{\partial T^\varepsilon} \phi^p \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left[ \gamma^* \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial n} \right] ds^\varepsilon = 2 \int_{T^\varepsilon} \phi^p \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) dS^\varepsilon \\ \theta^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma \end{array} \right.$$

Dans cet énoncé,  $T^\varepsilon$  désigne chaque trou de  $\Sigma$  et  $\theta^\varepsilon$  "fonction de contraintes" dont dérive le tenseur des contraintes  $\sigma^\varepsilon$  par les relations suivantes

$$\sigma^\varepsilon = 0 \text{ sauf } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_2} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = -\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x_1} \end{array} \right.$$

$\phi^p$  et  $\phi^c$  désignent les fonctions caractéristiques, respectives de  $\Sigma_p^\varepsilon$  et  $\Sigma_c^\varepsilon$ .

On note que si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega_q \subset \Omega$  un sous-domaine de  $\Omega$ ; on appelle fonction caractéristique

de  $\Omega_q$  la fonction  $\Phi^{\Omega_q}$  définie presque partout par

$$\Phi^{\Omega_q}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_q \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega_q \end{cases}$$

### IV. Méthodes et résultats

A chaque point du domaine  $\Sigma$  réel de départ, représenté par la variable macroscopique  $\underline{x} = (x_1, x_2)$ , on peut associer les positions :

$$y = \frac{\underline{x}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad z = \frac{\underline{x}}{\eta}$$

respectivement dans les pavés fixes de référence

$$Y = ]0, l_1[ \times ]0, l_2[ \quad \text{et} \quad Z = ]0, l_1[ \times ]0, l_2[ \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Afin de mieux se concentrer sur les difficultés réelles d'homogénéisation bipériodique des milieux perforés, nous proposons quelques simplifications qui vont permettre (sans restreindre la généralité des techniques utilisées) de traiter ici le cas particulier  $\eta = \varepsilon^2$  et nous supposons enfin que tous les pores sont identiques et qu'il n'y en a qu'un par période poreuse; nous désignons par  $T$ , l'image de ce pore dans  $Z$  et par  $Z^*$  le complémentaire de  $T \cup \partial T$  dans  $Z$ .

Compte tenu du contexte décrit ci-dessus, on va chercher la solution  $\theta^\varepsilon$  du problème sous la forme du développement asymptotique:

$$\theta^\varepsilon(x) = \sum_{q \geq 0} \varepsilon^q \theta_q(x, y, z)$$

dans laquelle  $y$  et  $z$  représentent les variables locales dans les cellules de références  $Y$  et  $Z$ .

On postule que pour chaque  $q$  :

$$\theta_q(x, y, z) = \phi^P(y) \theta_{qP}(x, y, z) + \phi^C(y) \theta_{qC}(x, y, z),$$

est :

- Continu presque partout sur  $\Sigma \times Y \times Z$
- Simultanément  $Y$  - périodique et  $Z$  - périodique

En utilisant la méthode des échelles multiples combinée avec le développement de Taylor, on montre que pour  $\varepsilon$  très petit, une bonne approximation de  $\theta^\varepsilon$  est représentée par  $\theta_0$  vérifiant le problème homogénéisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \text{ application de } \Sigma \text{ dans } \mathbb{R} \\ -H_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = 2 \left( 1 - \frac{|Y^c| |T|}{|Y| |Z|} \right) \quad \text{sur } \Sigma \\ \theta_0 = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma. \end{array} \right.$$

avec :

$$H_{\beta\gamma} = \frac{1}{|Y||Z|} \int_Y Q_{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial y_\eta} [y_\gamma - \xi^\gamma] dy ;$$

$$Q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} \phi^p + |Z^*| \delta_{\alpha\beta} \phi^c ;$$

$$q_{\alpha\beta} = \int_Z \nabla_z \chi^\alpha \cdot \nabla_z \chi^\beta dz + |Z| \delta_{\alpha\beta}$$

et  $\xi^\gamma$ ,  $\chi^\alpha$  solutions définies presque partout respectivement sur  $Y$  et  $Z$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0 \quad \text{dans } Y_p \\ -|Z^*| \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = 0 \quad \text{dans } Y_c \\ [Q_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial y_\beta}]_{\Gamma_{cp}} n_\alpha = [Q_{\alpha\gamma}]_{\Gamma_{cp}} n_\alpha \quad \text{le long de } \Gamma_{cp} \\ \int_Y \xi^\gamma dy = 0 \end{array} \right.$$

et  $\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_z \chi^\alpha = 0 \quad \text{dans } Z^* \\ \chi^\alpha(z) = z_\alpha \quad \text{dans } T \\ \chi^\alpha, Z\text{-périodique.} \end{array} \right.$

Le symbole  $[g]_{\Gamma_{cp}}$  désigne le saut de la grandeur  $g$  à travers la frontière entre parties compacte et poreuse de  $Y$  et la notation  $|\Omega|$  représente la mesure du domaine  $\Omega$ .

Pour un pavé de référence, ici  $Y$  et  $Z$  de  $\mathbb{R}^2$ , une distribution est dite  $Y$ - (resp  $Z$ -) périodique si elle prend des valeurs égales sur deux cotés opposés de  $Y$  (resp  $Z$ ). On constate sur cette forme locale du problème sur  $Y$ , qu'il était réaliste de prévoir, dès le départ de la modélisation, l'existence d'éventuelles discontinuités ou couches limites pour la solution au passage de la frontière entre parties poreuses et compactes de la section  $\Sigma$ .

D'autre part, le second membre de l'équation de compatibilité homogénéisée vérifiée par  $\theta_0$  est perturbé

par le terme  $J = \frac{|Y_p||T|}{|Y||Z|}$  qui est naturellement nul

lorsqu'il n'y a pas de pores ( $|T| = 0$ ). Ce terme peut être interprété comme une densité de défauts. Ceci laisse à croire que le matériau a subi un endommagement.

La rigidité équivalente à la torsion est donnée par  $D_0 = 2(1-J) \int_\Sigma \theta_0(X) dX < 2 \int_\Sigma \theta_0(X) dX$  ce qui

met en évidence un affaiblissement du module de rigidité, d'autant plus significatif que les proportions relatives de parties poreuses dans  $\Sigma$  et de trous dans la partie poreuse sont plus grandes.

## V. Conclusions

Nous obtenons des coefficients homogénéisés prenant bien en compte toutes les fluctuations de la structure, mais nous constatons de plus, une perturbation du second membre de l'équation qui semble pouvoir être interprétée (dans certaines situations du moins) en terme d'endommagement du matériau.

## VI. Références

- [1] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, H. Lanchon, "Elastic Plastic torsion of heterogenous cylindrical bars", *J.Inst Maths.Applics* 24, pp. 353-378, 1979.
- [2] D. Cioranescu, P. Donato, "An introduction to homogenization", Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications", Oxford University Press, 1999.
- [3] E. Dieulesaint, D. Royer, "Ondes élastiques dans les solides, Applications au traitement de signal", Masson et Cie, Paris, 1974.
- [4] R. Glowinski, H. Lanchon, "Torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe", *Journal de Mécanique* 12, pp. 151-172, 1972.
- [5] H. Lanchon, "Torsion élastoplastique d'un arbre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe", *Journal de Mécanique* 13, pp. 267-320, 1974.
- [6] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris, 1985.
- [7] K. Taous, M'B. Taghite, Hélène Lanchon-Ducauquis, A. Ait Elamrani, "Homogénéisation du problème de torsion élastique d'un cylindre de section multiconnexe et bipériodique", Rapport interne, Laboratoire de Mathématiques et d'Applications de Metz, 2004.

# Modélisation des fissures semi-elliptiques par couplage de la méthode d'hybridation des fonctions de poids HWFM avec la méthode de fonction de poids du point PWF

B.K. Hachi<sup>\*</sup>, S. Rechak<sup>\*\*</sup>, M. Ouadjaout<sup>\*\*</sup>, M. Haboussi<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>CUD BP 3117 Ain-Cheih 17000, Djelfa, ALGERIE

<sup>\*\*</sup>LGMD / ENP, BP 182 Harrach 16200, Alger, ALGERIE

<sup>\*\*\*</sup>LEMETA/ENSEM-INPL, BP 160 F-54504 Vandœuvre-lès-Nancy, FRANCE

## RESUME

Dans cette étude, une approche d'hybridation des fonctions de poids pour modéliser des fissures elliptiques est présentée. Appliquée aux milieux infinis, cette approche donne des facteurs d'intensité de contraintes plus précis en comparaison avec d'autres méthodes. Son extension ensuite aux fissures semi-elliptiques nous a amené à envisager son couplage avec la méthode de fonction de poids du point (PWF). La concordance des résultats trouvés ici avec d'autres travaux montre clairement l'efficacité de l'approche.

## I. INTRODUCTION

Le développement des fonctions de poids en mécanique de la rupture remonte aux travaux de Bueckner (1970) [1] portant sur l'étude d'une fissure semi-infinie dans un milieu infini. L'approche développée alors utilisait la fonction de Green. Depuis, la recherche de nouvelles fonctions de poids combinée à un approfondissement du bilan énergétique de Rice [2] a fait l'objet de plusieurs travaux, parmi lesquels, Paris et al. [3], Oore et Burns [4] et Bortmann et al. [5]. En 1986, Gao et Rice [6] ont introduit l'étude de la stabilité de la forme rectiligne du front de fissure pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes (FIC). Par la suite, beaucoup de travaux utilisant cette technique se sont succédés. Les problèmes traités concernent alors la forme de la fissure, le mode de rupture ainsi que le domaine d'application (statique, dynamique, thermo-élastique, ...).

La technique de fonction de poids consiste à utiliser une ou plusieurs solutions connues (solution de référence) d'un cas particulier dans le but de trouver la solution pour le cas général. La solution de référence vient généralement de résultats analytiques (exactes). Mais dans certains cas, l'absence de tels résultats oblige les auteurs, tels que Ornyak et al. [7, 8] pour la méthode de fonction de poids du point (PWF), à utiliser des solutions approximatives des fissures elliptiques pour déterminer la solution générale dans le cas de fissures semi-elliptiques [7] et quart-elliptiques [8].

Dans cette étude, nous nous intéressons au calcul du FIC pour une fissure elliptique en mode I, considéré comme le mode le plus dangereux. L'expression du FIC obtenue par la technique des fonctions de poids est donnée par [4] :

$$K_{I,Q} = \int_{(\Gamma)} W_{\infty} q(Q) dS \quad (1)$$

$K_{I,Q}$  représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I au point  $Q$  du bout de fissure,  $W_{\infty}$  la fonction de poids liée au problème,  $q(Q)$  le chargement au point  $Q$  et  $S$  la surface de l'ellipse.

## II. PRESENTATION DE L'HYBRIDATION

La méthode par hybridation développée ici utilise deux types de fonction poids. La première fonction a été développée par Oore & Burns [4] pour modéliser toute forme fermée de fissure dans un milieu infini :

$$W_{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{\pi I^2 \rho_Q} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{(\rho_Q)^2} \quad (2)$$

La deuxième est celle développée par Krasowsky et al. [9] pour les fissures elliptiques dans un milieu infini :

$$W_{\infty} = \frac{2 \cdot \Pi^{1/4}(\theta)}{\sqrt{\pi \left(1 - \frac{r^2(\varphi)}{R^2(\varphi)}\right) I^2 \rho_Q} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{(\rho_Q)^2}} \quad (3)$$

$r, \varphi$  sont les coordonnées polaires du point arbitraire  $Q$ ,  $R(\varphi)$ , la distance entre l'origine et le bout de fissure d'angle  $\varphi$ ,  $l_{\infty}$ , la distance entre le point  $Q$  et le point arbitraire  $Q$ ,  $(\Gamma)$ , la courbe de l'ellipse (front de la fissure),  $\rho_Q$ , la distance entre le point  $Q$  et le segment élémentaire  $d\Gamma$ ,  $\Pi(\theta) = \frac{(\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta)}{(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)}$  et  $\alpha = \frac{a}{b}$ .

L'idée de l'hybridation est de diviser la fissure elliptique en deux zones I et II, puis utiliser chacune des deux fonctions de poids dans la zone où elle est la plus efficace. Les deux zones sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} \text{zone I : } & \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 \leq 1 \\ \text{zone II : } & \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 > 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Avec  $a'/a = b'/b = \beta$  et  $\beta \in [0, 1]$ .  $\beta$  est le paramètre de proportion entre les zones (déterminé ci-après).

La fonction de poids de l'expression (3) est destinée exclusivement aux fissures de forme elliptique. Néanmoins, elle présente une singularité supplémentaire  $(1-r/R)^{-1/2}$  par rapport à l'expression (2). Ceci rend l'expression (3) moins efficace au voisinage du bout de la

fissure lorsque  $r \rightarrow R$ . Cet argument nous a conduit à choisir la fonction de poids (3) pour la zone elliptique I, et la fonction de poids (2) pour la zone externe II, où la singularité  $(1-r/R)^{1/2}$  est très forte :

$$\begin{aligned} W_{\infty} &= W_{\infty}^A \text{ de l'eqn (3) si } Q \in \text{zone I} \text{ et} \\ W_{\infty} &= W_{\infty}^C \text{ de l'eqn (2) si } Q \in \text{zone II} \end{aligned} \quad (5)$$

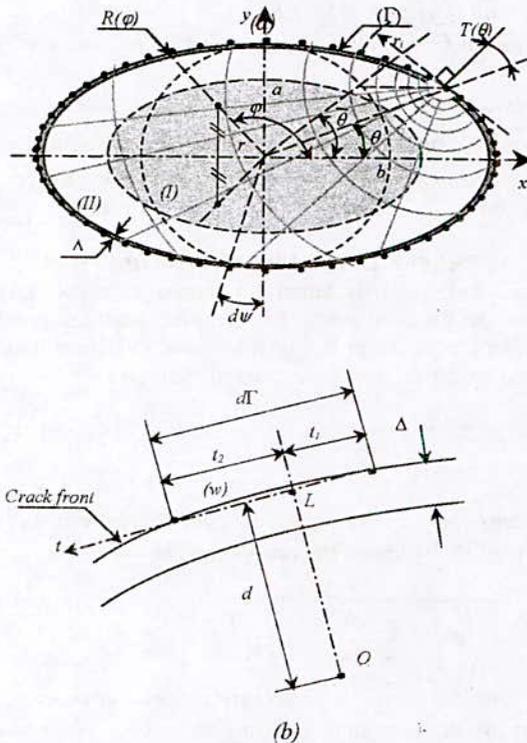


Figure 1 Subdivision de la fissure elliptique en deux zones et sa discrétisation

Il reste à déterminer la proportion  $\beta$  adéquate entre les deux zones I et II. Il est à noter que la fonction de poids (2) tend, plus rapidement que la fonction de poids (3), vers la fonction de poids d'une fissure circulaire lorsque  $\alpha \rightarrow 1$  (on l'a vérifié numériquement). D'autre part, la fonction (3) est nettement plus adaptée à la variation du rayon de courbure  $R$ , du front de la fissure, cas des ellipses aplatis (les faibles valeurs de  $\alpha$ ). Ceci est confirmé par la présence de rayon de courbure, qui vaut  $(a/\alpha)(\Pi(\theta))^{3/2}$  dans l'expression de la fonction (3). Par conséquent, plus  $\alpha$  est petit et le gradient de rayon de courbure de l'ellipse est fort, plus la zone I devrait s'agrandir vis à vis la zone II, et vis versa. Afin d'assurer cette proportion, et après une étude d'optimisation sur les deux paramètres  $\alpha$  et  $R$ , nous avons adopté la convention suivante pour  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \alpha^2 \text{ pour } \alpha \in [0,8, 1] \text{ et} \\ \beta &= (3/2)\min(\alpha, R) \text{ pour } \alpha \in ]0, 0,8[ \end{aligned} \quad (6)$$

### III. UTILISATION DE LA METHODE DE FONCTION DE POIDS DU POINT PWFM

Pour les fissures semi - elliptiques, la fonction de poids  $W_{\infty}$  dans l'équation (1) est décomposée en deux parties, asymptotique et corrective [7] :

$$W_{\infty} = W_{\infty}^A + W_{\infty}^C \quad (7)$$

#### III.1 Choix de la composante asymptotique

La composante asymptotique  $W_{\infty}^A$  comme son nom l'indique représente la fonction de poids  $W_{\infty}$  lorsque le point de chargement  $Q$  et très proche du point du front de fissure  $Q'$  c-à-d  $W_{\infty}^C \rightarrow 0$ . Dans le choix de la composante asymptotique, Orynyak *et al.* [7] exigent deux conditions à respecter. La première concerne les points du contour  $Q'$  internes (loin de la surface libre). Pour ces points,  $W_{\infty}^A$  doit logiquement être remplacée par la fonction de poids d'une fissure elliptique. Dans cette étude, ça sera la fonction de poids trouvée par hybridation donnée par l'équation (5) :

$$W_{\infty}^A = W_{\infty}^{(Elliptical)} = \begin{cases} W_{\infty}^A \text{ de l'eqn (3) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{\infty}^C \text{ de l'eqn (2) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (8)$$

La deuxième condition concerne le cas où les points  $Q$  et  $Q'$  sont simultanément proches de la surface libre. Pour cette situation la composante asymptotique (8) doit être corrigée pour introduire l'influence de la surface libre. La technique employée par Isida *et al.* [10] et beaucoup d'autres auteurs pour des situations similaires est d'introduire un chargement fictif en un point  $Q_x$  symétrique à  $Q$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . La composante asymptotique devient dans ce cas :

$$W_{\infty}^A = W_{\infty}^{(Elliptical)} \left[ 1 + \frac{I_{\infty}^2}{I_{\infty, \infty}^2} \right] \quad (9)$$

Orynyak *et al.* [7] n'ont pas précisé la procédure d'application de (8) et (9). Ce qui nous a conduit à proposer une forme compacte de  $W_{\infty}^A$  afin de les vérifier simultanément :

$$W_{\infty}^A = W_{\infty}^{(Elliptical)} \left[ 1 + \left( \frac{I_{\infty}^2}{I_{\infty, \infty}^2} \right) \left( 1 - \frac{y_{Q'}}{a} \right) \left( 1 - \frac{y_Q}{a} \right) \right] \quad (10)$$

$y_Q$  et  $y_{Q'}$  sont la projection sur l'axe  $(y)$  des points  $Q$  et  $Q'$ , respectivement.

#### III.2 Choix de la composante corrective

Les conditions proposées par Orynyak *et al.* [7] concernant le choix de la composante de correction  $W_{\infty}^C$  portent sur le rapport  $W_{\infty}^C/W_{\infty}^A$ . Ils exigent que ce rapport soit négligeable ( $W_{\infty}^C/W_{\infty}^A \rightarrow 0$ ) lorsque :

- Le point de chargement  $Q$  est au voisinage du contour  $(\Gamma)$ .
- Le point de chargement  $Q$  est très proche du point de calcul  $Q'$ .

Orynyak *et al.* [7] ont choisi pour le premier cas l'expression :

$$W_{\infty}^c = W_{\infty}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) D(\theta, \alpha) \quad (11)$$

Et pour le deuxième cas l'expression :

$$W_{\infty}^c = W_{\infty}^A \left(\frac{l_{\infty}^2}{a^2}\right) D(\theta, \alpha) \quad (12)$$

$D(\theta, \alpha)$  est la seule fonction inconnue à déterminer ultérieurement. Orynyak *et al.* [7] n'ont pas précisé également la procédure d'utilisation de chacune des équations (11) et (12).

De la même manière que pour  $W_{\infty}^A$ , nous proposons une forme compacte de la composante  $W_{\infty}^c$ , tout en essayant de vérifier les deux conditions d' Orynyak *et al.* [7] citées ci-dessus :

$$W_{\infty}^c = W_{\infty}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\min(l_{\infty}^2, a^2)}{a^2} D(\theta, \alpha) \quad (13)$$

$$W_{\infty}^c = \bar{W}_{\infty}^c D(\theta, \alpha)$$

Nous avons remplacé  $l_{\infty}^2$  par  $\min(l_{\infty}^2, a^2)$  pour forcer le rapport  $l_{\infty}^2/a^2$  à être  $< 1$ , ce qui n'est pas détaillé par Orynyak *et al.* [7].

### III.3 Méthode de calcul

Considérons que la distribution du chargement  $q(Q) = \alpha(x, y)$  à l'intérieur de la fissure est arbitraire. En utilisant les équations (7), (10) et (13) dans l'équation (1) nous obtenons le FIC adimensionnel suivant :

$$G(\theta, \alpha) = \frac{K_I(\theta, \alpha) E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \quad (14)$$

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) D(\theta, \alpha)$$

Où les intégrales adimensionnelles  $I^A$ ,  $I^C$  sont données par :

$$I^A(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(s)} \sigma(x, y) W_{\infty}^A dS \quad \text{et} \\ I^C(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(s)} \sigma(x, y) \bar{W}_{\infty}^c dS \quad (15)$$

Si pour un chargement particulier  $\sigma_0$ , la solution  $G_0(\theta, \alpha)$  est connue (solution de référence), la réutilisation de l'équation (14) permet d'exclure le paramètre  $D(\theta, \alpha)$  pour toute autre forme de chargement  $\alpha(x, y)$  :

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) \left( \frac{G_0(\theta, \alpha) - I^A_0(\theta, \alpha)}{I^C_0(\theta, \alpha)} \right) \quad (16)$$

## IV. PROCEDURE NUMERIQUE, MAILLAGE ET SINGULARITES

Le calcul du FIC nécessite l'évaluation de deux types d'intégrale : de surface dans (1) et curviligne dans (2) et (3). Des singularités sont présentes dans ces intégrales nécessitant un traitement qu'on détaille ci-après.

### IV.1 L'intégrale de surface

Dans l'intégrale de surface de l'équation (1), la technique de traitement de la singularité  $1/l_{\infty}^2$  est celle employée efficacement par Krasowsky *et al.* [9]. Elle consiste à entourer le point ( $Q'$ ) par un petit demi-cercle de rayon  $R_0$  sur lequel l'intégrale est analytiquement évaluée pour trouver :

$$K_I^s \approx 1.21703 \sqrt{R_0} q(Q') \quad (17)$$

Le FIC est donné dans ce cas par  $K_I^s = K_I^{S'} + K_I^{S''}$  avec  $S'$ , la surface de l'ellipse,  $S''$ , la surface du demi-cercle et  $S^*$ , la surface restante. Pour réduire l'erreur due à la linéarisation de la courbure au point ( $Q'$ ), on prend dans (17) :

$$R_0 = (1/30 \sim 1/20) \min(R, (Q'), a) \quad (18)$$

Notons que pour les fissures semi-elliptiques Orynyak *et al.* [7] n'ont pas détaillé la procédure de traitement de singularité dans la technique de PWHM. Pour résoudre ce problème, nous avons adapté l'équation (17) comme suit :

$$K_I^s \approx \lambda (1.21703 \sqrt{R_0} q(Q')) \quad \text{avec } \lambda \in [0.5, 1.0] \quad (19)$$

$\lambda$  est un paramètre caractérisant la position de demi-cercle de rayon  $R_0$  par rapport à l'axe ( $Ox$ ). Il est lié au rapport entre sa partie située au-dessus de l'axe ( $Ox$ ) et sa surface totale ;  $\lambda = 0.5$  pour  $\theta = 0^\circ$  par exemple. Le maillage de ( $S'$ ) est généré en traçant des demi-cercles concentriques de centre ( $Q'$ ) et de rayons  $R_0 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \dots$  et d'environ 60 demi-droites d'origine ( $Q'$ ) (voir la figure 1a).

### IV.2 L'intégrale du contour

Lorsque  $Q$  est très proche du bout de la fissure, l'intégrale  $\int_{\Gamma} [d\Gamma / (\rho_Q)^2]$  devient singulière et son évaluation

numérique devient délicate. Pour traiter cette singularité nous ignorons tout d'abord une bande très étroite à proximité du contour d'épaisseur  $\Delta = \gamma a$  où  $\gamma = 1/300$  (voir la figure 1b). La surface effective de la fissure devient :  $(x/b)^2 + (y/a)^2 \leq (1 - \Delta/R(\theta))^2$  (20)

Tant que le point  $Q$  est loin du front de la fissure ( $\Gamma$ ), l'intégrale se transforme en une somme :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{(\rho_Q)^2} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{(d\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \quad (21)$$

Dans (21)  $N$  désigne le quart du nombre de point subdivisant le contour ( $\Gamma$ ). Ce nombre est obtenu par minimisation de l'erreur sur la linéarisation de la courbure du segment  $d\Gamma$  :

$$N \geq \pi / (2\sqrt{8\mu\gamma}) \quad \text{avec } \mu = 0.1 \sim 0.2 \quad (22)$$

Si  $Q$  est très proche du  $k^{\text{ème}}$  segment du front de fissure discrétisé (figure 1b), l'intégrale est évaluée analytiquement sur ce segment afin d'éviter tout risque de singularité pouvant perturber le bon déroulement du calcul :

$$\int_{\frac{d}{\rho_0}}^{\frac{t_2}{\rho_0}} \frac{dw}{\rho_0^2} \approx \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t^2 + d^2} = \left[ \frac{1}{d} \left( \arctan \frac{t_2}{d} - \arctan \frac{t_1}{d} \right) \right] \quad (23)$$

L'équation (21) devient alors :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{(\rho_0)^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d\Gamma}{\rho_{0i}^2} + \int_{\frac{d}{\rho_0}}^{\frac{t_2}{\rho_0}} \frac{dw}{\rho_0^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d\Gamma}{\rho_{0i}^2} \quad (24)$$

L'utilisation de (24) au lieu de (21) est justifiée par une étude détaillée sur le gain en précision de calcul.

**V. EXEMPLES, RESULTATS ET INTERPRETATIONS**

**Tableau I** FIC adimensionnel - fissure elliptique dans un milieu infini.

$\alpha$	$\bar{\theta}^0$	$\bar{K}_I$ (exact)	$\bar{K}_I$ (HWFun)	$\bar{K}_I$ (Krasowsky)	$\bar{K}_I$ (Ours)
1.0	0.	1.00000	1.00056	1.00035	0.99893
	30.	1.00000	1.00057	1.00035	0.99894
	60.	1.00000	1.00058	1.00035	0.99896
	90.	1.00000	1.00059	1.00035	0.99897
0.6	0.	1.00000	1.00858	0.96532	1.03387
	30.	1.00000	0.99823	0.98550	1.00915
	60.	1.00000	0.99493	1.00985	0.98480
	90.	1.00000	0.99851	1.01390	0.97884
0.4	0.	1.00000	0.99780	0.94460	1.07704
	30.	1.00000	0.98987	0.98180	1.01327
	60.	1.00000	0.99619	1.00540	0.97608
	90.	1.00000	0.99994	1.02053	0.96953
0.2	0.	1.00000	0.99399	0.93730	1.17519
	30.	1.00000	0.98730	0.99690	1.01328
	60.	1.00000	0.99575	1.00400	0.96876
	90.	1.00000	0.99315	1.00400	0.96531
0.1	0.	1.00000	1.00294	-	-
	30.	1.00000	0.99957	-	-
	60.	1.00000	0.99349	-	-
	90.	1.00000	0.99007	-	-

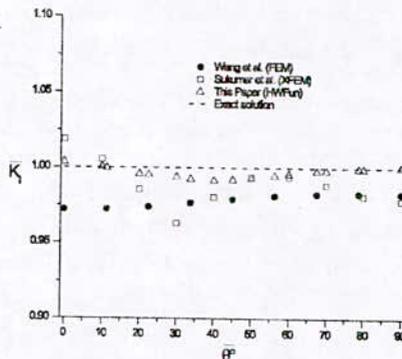


Figure 2 FIC adimensionnel - fissure elliptique à  $\alpha = 0.5$

**V.1 Fissure elliptique dans milieu infini sous traction uniforme**

Nous calculons le facteur d'intensité de contrainte adimensionnel  $\bar{K}_I = K_I E(k) / \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)$  pour une fissure elliptique dans un milieu infini et sous un chargement unitaire uniforme ( $E(k)$  est l'intégrale elliptique de second espèce et  $k = \sqrt{1 - \alpha^2}$ ). Le calcul est fait pour différentes valeurs de  $\alpha$  et de l'angle réduit

$\bar{\theta} = \arctan(\tan(\theta)/\alpha)$ . Sur le tableau I, les résultats obtenus avec notre code de calcul nommé *HWFun* sont comparés avec ceux trouvés avec les fonctions de poids (2) et (3) utilisées séparément, ainsi qu'avec la solution exacte. La réduction de l'erreur maximale sur la valeur de FIC par l'approche d'hybridation est claire (de 17.5% pour [4] et 6.3% pour [9] à 1.4% pour la présente approche). Pour  $\alpha=0.5$  et un chargement uniforme, une comparaison entre la méthode des éléments finis (FEM) Wang et al. [11], son extension (XFEM) Sukumar et al. [12], et la présente approche permet encore de mentionner la qualité des résultats obtenus avec celle-ci (figure 2).

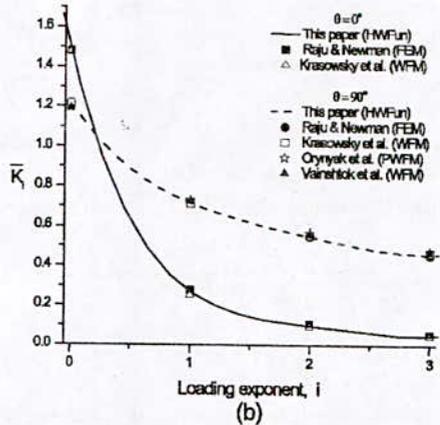
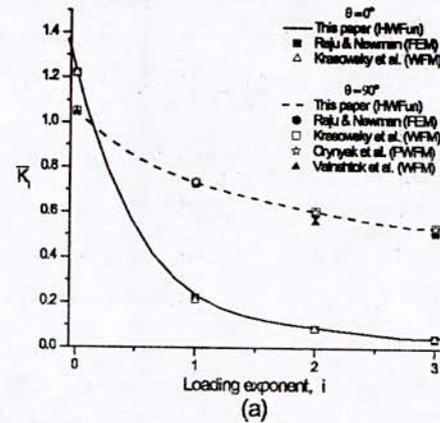


Figure 3 FIC adimensionnel - fissure semi-elliptique dans un tube mince : (a):  $\alpha = 1.0$ . (b):  $\alpha = 0.4$

**V.2 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince**

La théorie des tubes épais (théorie de Lamé) montre que les fissures longitudinales situées sur la face interne d'un tube sont les plus dangereuses. Pour cela, nous allons tester notre approche d'hybridation couplée avec la PWFM sur des tubes relativement minces ( $e/R_{int} = 0.1$  et  $a/e = 0.5$ ,  $e$  est l'épaisseur du tube,  $R_{int}$  son rayon intérieur) avec  $\alpha = 1.0$  et  $\alpha = 0.4$  pour un chargement à

l'intérieur de la fissure de la forme  $p = (y/a)^i$ . Nous considérons la solution pour  $p=1$  comme solution de référence. Le calcul est fait pour deux points  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=90^\circ$  avec  $i \in \{0,1,2,3\}$ . Les résultats trouvés avec notre code de calcul *HWFun* sont en accord avec ceux trouvés par FEM [13], par la méthode de fonction de poids (WFM) [9, 14] ainsi que par PWFm[7] d'après les graphes de la figure 3.

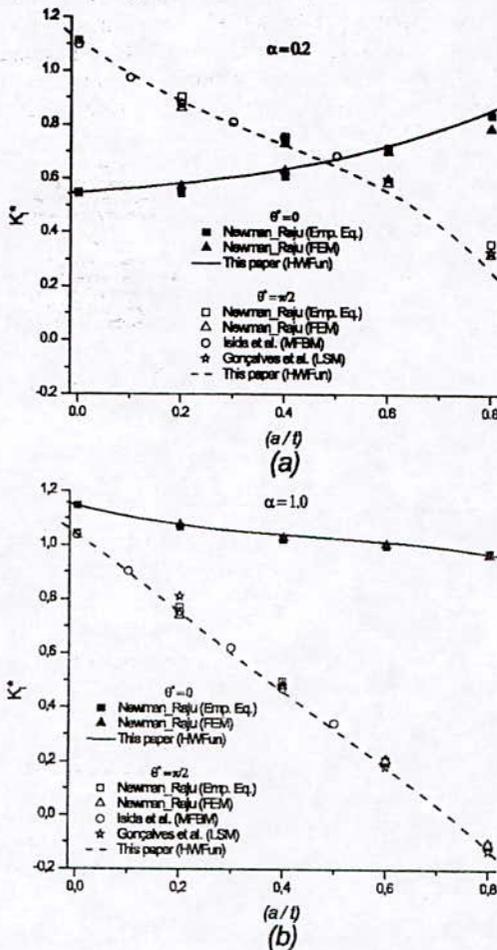


Figure 4 FIC adimensionnel pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  avec différentes configurations géométriques pour une plaque sous une flexion pure.

### V.3 Fissure semi elliptique débouchante dans une plaque sous flexion

Dans cet exemple, nous prenons la solution de référence celle trouvée par Newman & Raju [15] basés sur la méthode des éléments finis FEM, pour une contrainte de traction  $S_y=1$ .

Nous calculons ensuite  $K_i = K_i E(k) / \sqrt{\pi a}$  pour une contrainte de flexion  $S_y = 3M/wt^2 = 1$ .  $M$  étant le moment de flexion,  $w$  la largeur de la plaque et  $t$  son épaisseur. La bonne corrélation entre nos résultats, obtenus avec *HWFun*, et les résultats de Newman &

Raju[15] ou les autres [10, 16] utilisant d'autres approches est notable pour, aussi bien, le point du front de fissure ( $\theta=90^\circ$ ) que le point de surface ( $\theta=0^\circ$ ).

## VI DISCUSSION ET CONCLUSION

L'hybridation d'après le tableau I a amélioré les résultats par rapport à ceux de [4] et [9], pour les différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\bar{\theta}$ . L'erreur maximale a baissé de 6.3% pour [9] et 17.5% pour [4] à 1.3% pour la présente approche. Comparée aux résultats d'autres auteurs [11, 12] utilisant d'autres techniques, le graphe de la figure 2 montre encore l'utilité et l'intérêt de la présente hybridation.

L'utilité du couplage de l'approche d'hybridation avec la PWFm a été testée avec succès vue la bonne concordance de nos calculs avec les solutions trouvées dans d'autres travaux utilisant d'autres méthodes telles que la méthode des éléments finis (FEM), la méthode de fonction de poids (WFM), la méthode de force de volume modifiée (MBFM) et la technique de «Line Spring Model» (LSM). Ceci est valable aussi bien pour le tube sous chargement polynomiale que pour la plaque sous flexion. NB: Ce travail entre dans le cadre de la collaboration entre les laboratoires LGMD(Algérie) et LEMTA(France) 03MDU589.

## REFERENCES

- [1] H.F. Bueckner, *Z. Angew. Meth.*, **50**, 529-546 (1970).
- [2] J.R. Rice, *Int. J. Sol. Struct.*, **8**, 751-758 (1972).
- [3] P.C. Paris, McMeeking R.M. & Tada H., *Cracks and Fracture*, ed. S-W, STP601, 471-489, ASTM (1976).
- [4] M. Oore, D.J. Burns, *Transaction of the ASME J. Press. Vess. Tech.* **2-102**, 202-211 (1980).
- [5] Y. Bortmann & L. Banks-Sills, *J. App. Mech.*, **50**, 907-909 (1983).
- [6] H. Gao & J.R. Rice, *J. App. Mech.*, **53**, 774-778 (1986).
- [7] I.V. Orynyak & M.V. Borodii, *Int. J. Fract.*, **70**, 117-124 (1995).
- [8] I.V. Orynyak, M.V. Borodii & V.M. Torop, *Engng. Fract. Mech.*, **40**, 143-151 (1994).
- [9] A.J. Krasowsky, Orynyak I.V. & A.Yu. Gienko, *Int. J. Fract.*, **99** (1-2), 117-130 (1999).
- [10] M. Isida, H. Noguchi and T. Yoshida, *Int. J. Fracture*, **26**, 157-188(1984).
- [11] X. Wang and S.B. Lambert, *Engng. Fract. Mech.*, **57** (1), 13-24 (1997).
- [12] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran and T. Belytschko, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **48**, 1549-1570 (2000).
- [13] I.S. Raju and J.C.Jr. Newman *Transaction of the ASME J. Press. Vess. Tech.*, **104**, 293-298(1982).
- [14] V.A. Vainshtok & I.V. Varfolomeyev, *Int. J. Fract.*, **46**, 1-24 (1990).
- [15] J.C. Jr. Newman and I.S. Raju, NASA TP-1578, National Aeronautic and Space Administration, Washington DC, 1979.
- [16] J.P.M. Gonçalves and P.M.S.T. de-Castro, *Int. J. Press. Vess. Piping*, **76**, 551-560(1999).

## Stochastic Search Algorithms for Dynamic Finite Element Model Updating

N. Touat<sup>1</sup>, S. Rechak<sup>2</sup>, A. Ghoul<sup>1</sup>, M. Ameur<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>(ntouat2001@yahoo.fr),

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Department, University of Sciences and Technology Houari Boumediene, Algiers

<sup>2</sup>Mechanical Engineering and development Laboratory, National Polytechnic School, Algiers

### Abstract

Dynamic Finite Element model updating may be considered as an optimization process. A new optimization stochastic search algorithm has been developed recently, namely Accelerated Random Search ARS algorithm. The objective of this paper is to develop a new model updating method uses the ARS algorithm and based on experimental data. A version of the ARS algorithm, called the Modified ARS (MARS) algorithm, is presented. The validity of the proposed updating method and a version of simulated annealing algorithm are compared and tested on several mathematical functions and on two simple simulated models. The proposed method has shown its robustness and optimization efficiency, also, it gives a good results in a reduced time.

Key words: Finite Element Model, Updating, Stochastic Search Algorithms, Optimization, Objective functions.

### 1. THEORY

#### 1.1 Introduction

The development of an accurate analytical model for a structural system, more specifically, a large system, is a fundamental requirement of engineering analysis. Comparison of the analytical model responses with the test measurements is frequently used as a measure of the model's accuracy. Very often, the analytical model does not produce the dynamic parameters (frequencies, mode shapes, etc.) that adequately match with the test results and, therefore, an iterative cycle is necessary to adjust the analytical model with the test results.

Model updating is becoming a common method to improve the correlation between finite element models and measured data [1, 2]. A number of approaches to the problem exist. Among these approaches, there are with consider the Dynamic Finite Element Updating (DFEU) as an optimization process. These methods may be classified into two groups: whether they adjust analytical matrices directly (*direct method*) or correct iteratively the parameters of analytical models (*parametric or iterative methods*). Several works using direct updating algorithms have been developed. Certain methods share the feature that only one quantity is updated at a time [3-6]. Others updated the mass and stiffness matrices simultaneously, using the measured modal data as a reference [7-8], or updated the damping and stiffness matrices simultaneously, with the assumption that the mass matrix is correct and with the constraint that the measured modal data is reproduced [9]. These methods are not suitable for model updating since the updated results are seldom physically meaningful although these methods are capable of reproducing the experimental data. All the methods described thus far use objective functions defined in the modal domain. Other approaches use stochastic search algorithms for model updating. Among these algorithms we can give as example: genetic

algorithms [10-12], a variation of simulated annealing algorithm [12]. It has been shown that updating method using simulated annealing algorithm outperforms the method using traditional genetic algorithm [12]. This paper concentrates on an iterative updating method using two stochastic search algorithms and based on measured modal data. This method updates the analytical stiffness and mass matrices by an iterative cycle until obtaining a good correlation between the analytical model and measured data.

In this work, we use and compared for model updating, a new stochastic search algorithms called the *Modified Accelerated Random search (MARS)* algorithm, with the *blended simulated annealing (BSA)* algorithm [12]. The first algorithm is a powerful and efficient algorithm applied for all optimization problems and for the first time on model updating.

As reference data for simulated model updating, both cases of frequencies data and modal data are discussed for the comparison of each method. Several objective functions in the two domains are presented and compared to choose the best ones will be used for updating a simulated structure.

In section 2, we describe and compare the two ARS algorithms and the blended simulated annealing algorithm presented by [12] using hard optimization mathematical functions. The algorithms are used for model updating in section 3, by considering several objective functions and two simple models. The obtained results are discussed and concluding remarks are given in the same section.

#### 1.2. The ARS algorithm

The Accelerated Random Search algorithm (ARS) is a stochastic search algorithm [12], presented to modify the Pure Random Search (PRS) algorithm (Monte Carlo

optimization technique). The PRS is presented to solve the following:

$$\max(f(x)), \text{ with } x \in D, \quad (1)$$

$D$  is the search space.

The implementation of PRS algorithm is very easy. It can be presented by the following algorithm:

- 1- Generate a random vector  $\{X_i\}_{i=1}^n$  with uniform distribution on  $D$ ,
- 2- Compute  $M_n = \max\{f(X_i) : i = 1, \dots, n\}$ .

The convergence of this algorithm is very slow in most cases of optimization. It depends of several parameters (e.g., the type of problem to be optimized, the dimension of the problem, the largeness of the space search, etc.).

The ARS algorithm is presented to improve the convergence of the PRS algorithm and accelerate the random search to obtain the global optimum in reduced time.

Appel et al [12] propose the following algorithm for solving (1). They assume that  $D$  is the  $d$ -dimensional unit hyper-cube  $[0,1]^d$ . they denote by  $\|\cdot\|$  the sup-norm in  $D$ . The closed ball of radius  $r$  centered at  $x$ ,  $\{y \in D; \|x - y\| \leq r\}$ , is denoted by  $B(x,r)$ .

Let a contraction factor  $c > 1$  and a precision threshold  $\rho > 0$  be given.

Step 0. Set  $n = 1$ , and  $r_1 = 1$ . Generate  $X_1$  from a uniform distribution on  $D$ .

Step 1. Given  $X_n \in D$  and  $r_n \in (0,1]$ , generate,  $Y_n$  from a uniform distribution on  $B(X_n, r_n)$ .

Step 2. If  $f(Y_n) > f(X_n)$ , then let  $X_{n+1} = Y_n$  and  $r_{n+1} = 1$ .

Else if  $f(Y_n) \leq f(X_n)$ , then let  $X_{n+1} = X_n$  and  $r_{n+1} = r_n / c$

If  $r_{n+1} < \rho$ , then  $r_{n+1} = 1$ .

Increment  $n = n+1$  and go to step 1.

The authors refer to this algorithm as *finite descent ARS*,  $\{X_n\}$  as the sequence of *record generators*, and the sequence  $\{M_n = f(X_n)\}$  as the *record sequence*. The ARS algorithm may be readily applied to problems defined over a general metric space, for example, to combinatorial optimization problems and to optimization problems whose domains involve complicated constraints (case of Finite Element Model updating).

The authors considered another case of the algorithm, referred as *infinite descent ARS*. In this case, the value of the threshold  $\rho$  is equal to 0 (smaller than machine precision). The only modification in the algorithm is the exclusion of the logic expression (If  $r_{n+1} < \rho$ , then  $r_{n+1} = 1$ ). This case is attractive to take into account just from a theoretical standpoint.

In order to speed up the experimental work, the authors used a modification of finite descent ARS. The principle of the *modified ARS* refers to the following:

They keep track of the number  $N_{restart}$  of times finite descent ARS restarts ( $r_n < \rho$  and so  $r_{n+1} = 1$ ). If  $N_{restart} = n > L$ , a prescribed positive integer, then they restart the entire ARS process, setting  $r_{n+1} = 1$ ,  $N_{restart} = 0$ , and generating  $X_{n+1}$  from a uniform distribution on  $D$ ;  $X_n$  is declared a local optimum and is not used in following iterations of the algorithm. The well-chosen of the value of the parameter  $L$ , allows the modified ARS to become very robust. The choice of this parameter depends essentially of the type and size of problem of optimization. For simple problems, the value of  $L$  can be fixed, for example, to the value 5, and in the case of large problems, as for models updating, this values depends fundamentally of the size of analytical matrices.

We refer to the algorithm just described as *modified finite descent ARS* algorithm. This algorithm works better and gives good results when the dimension of the problem is more or less large. Three algorithms will be tested and compared between them to choose the best one will be used in the model updating:

1. The *finite descent ARS* algorithm,
2. The *modified finite descent ARS* algorithm,
3. A version of *simulated annealing*.

The Third algorithm, which is the simulated annealing algorithm, is a strong optimization algorithm [11], and it is presented to be compared to the two others algorithms, to select the best one will be used for model updating.

### 1.3. Simulated annealing

Before applying the third algorithm, it is necessary to give a brief description to provide sufficient details about the simulated annealing (for more details see [11]).

Simulated annealing is derived from an analogy with the annealing process of material physics [11]. To implement The SA algorithm, it is necessary to decide about the specific nature of the "cooling schedule" and the choice of "neighborhood function" used to generate the following state from the preceding one. [11] presented three SA algorithms. These algorithms have been compared and tested with traditional genetic algorithms. In this work, we take into consideration just the third version of simulated annealing presented by [11]. Concerning the type neighborhood functions used, the authors have proposed two varieties:

1. Line adjustment function,
2. Fixed radius adjustment function.

The standard cooling schedule for SA used in [11] is given by the following algorithm:

Step 0: Set the first state, and the initial temperature  $T_0$ .

Step 1: Generate the Next state by applying the neighborhood function for  $N_{sa}$  steps until reaching the equilibrium,

Step 2: Reduce the temperature by a factor  $\delta \in [0,1]$  (until  $T < T_{th}$ ) and go to step 1.

This process is repeated  $N_{sa}$  in the step 1, and  $M_{sa}$  in the second step. The authors suggest that  $N_{sa} = 100d$ , ( $d$  is

the dimension of the problem), and they set, after several tests, the value of  $\delta$  at 0.95, with  $T_n = T_{n-1} * \delta$ .

The initial temperature  $T_0$  used depends both on the particular function to be optimized and the neighborhood function used in the algorithm. In this work, the value of  $T_0$  is fixed at 5000. This value is given to increase the number of iteration for the algorithm chosen and compared with the number of iteration required by the ARS algorithms to be converged.

In this work, we use a new algorithm based on the blended algorithm proposed in [11], by employing one start temperature fixed at  $T_0$ , and applying simultaneously the two neighborhood functions at each state. This algorithm will be tested and compared with the two ARS algorithms in the next section.

## 2. Testing the algorithms

The ideal algorithm should be efficient, highly robust, powerful and applicable to all type of optimization problems. To aid in this choice, five mathematical test functions are used. Each function has its characteristic.

Since the second and the third algorithms are presented for the first time, it is suitable to examine the robustness and efficiency of each algorithm. For this reason, we have chosen four functions for test, including the followings distinctive:

- The search space dimension of each function,
- The number of variables used to optimize (problem dimension),
- The number of local minima for each function,
- The number of global minima found for each state.

(1) *Rosenbrock's banana function*:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (4)$$

This standard test function was designed specifically to be hard to optimize. It has only one minimum,  $x_{opt} = (1, 1)$ ,  $f(x_{opt}) = 0$ , located in a steep flat-bottomed parabolic valley (Fig1). The generalization to higher dimensions is given below:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_i)$$

The global minimum of the generalized function is at  $x_{opt} = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $f(x_{opt}) = 0$ . The starting position used for all functions is given by two ways: (i) by choosing the opening point, for this case (2, 2, ..., 2), (ii) by introducing a point randomly. Each variable is bounded between -2 and 2. A four-dimensional version is used to test the algorithms. A result is said to be acceptable for this function for two cases if all of the variables are within 0.1 of the global minimum, and the values of the objective function are within 0.05 of the minimum.

(2) *Hemmelblau's function*

$$f(x, y) = 100(x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \quad (5)$$

For the second function the variables  $x, y \in [-10, 10]$ . The

function takes its minimum value of 0 at four points, given by the intersection of the two conic sections

$y = x^2 + 11$  and  $x = -y^2 + 7$ . The four points are:  $P1(3.5844, -1.8481)$ ,  $P2(3, 2)$ ,  $P3(-2.8052, 3.1313)$ ,  $P4(-3.7793, -3.2832)$ .

The three variables *Hemmelblau's* function is used to test the algorithms. This function has a global minimum of 0.3039 at point (-2.804, 3.072, 1.956) with the variables vary between [-5, 5]. A result is said to be acceptable for the two functions if:

1. All of the variables are within 0.001 of the global minimum and the values of the objective function are within  $1e-06$  of the minimum for two variables,
2. All of the variables are within 0.1 of the global minimum and the values of the objective function are within  $1e-03$  of the minimum for three variables.

(3) *The freudenstein-roth function*:

$$f(x, y) = ((x - 13) + ((5 - y)y - 2)y)^2 + ((x - 29) + ((y + 1)y - 14)y)^2 \quad (6)$$

Where,  $x, y \in [-100, 100]$ . The global minimum of 0 occurs at (5, 4). This function is selected for test to study the effect of the search space dimension on the convergence of each algorithm. In this case, we use a two dimension version of the function. A result is said to be tolerable for this function if all of the variables are within 0.001 of the global minimum and the values of the objective function are within  $1e-05$  of the minimum for two variables.

(4) *Griewank's function* :

This function is given by the following equation:

$$f(x, y) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{d} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) \quad (7)$$

Where  $x, y \in [-100, 100]$ , with  $n = 2$  and  $d = 10$ . The global minimum of 0 occurs at (0, 0). A five-dimensional version is used to test the algorithms. A result is said to be good enough if all of the variables are within  $1e-04$  of the global minimum and the function is within  $1e-07$  of the minimum.

(5) *Rastrigin's function*:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) - \cos(18x) - \cos(18y) \quad (8)$$

Where  $x, y \in [-1, 1]$ . The global minimum of -2 occurs at (0, 0). This function has a set of local minima; it becomes then hard to be optimized. To augment the difficulty of optimization, a five-dimensional version is used to test the algorithms. For this function, the global minimum of -8 occurs at (0, 0, 0, 0, 0). A result is said to be satisfactory for the two functions if all of the variables are within 0.1 of the global minimum and the objective functions are within 0.1 of the minimum.

Table 1: Comparison of the four optimization algorithms

Function / interval	Number of successful results for each algorithm		
	Algorithm 1	Algorithm 2	Algorithm 3
Rosenbrock4 / [-2,2]	6	19	50
Himmelblau2 / [-10,10]	50	50	20
Himmelblau3 / [-5,5]	7	25	24
Freudenstein-Roth2 / [-100,100]	10	37	20
Griewank4 / [-100,100]	38	50	0

It may be seen from table 1, that the second algorithm outperforms the two others algorithms, except for the first function where the BSA works better than the MARS. The MARS algorithm has two advantages; that it combines the strength of the ARS algorithm and the force of the modification given by the introduction of the  $N_{restart}$  part on the MARS algorithm. This algorithm has another advantage compared to others; it can find more than one global minimum at a time (e.g. Himmelblau2), this is advantaged by the introduction of the number  $N_{restart}$  of times finite descent ARS restarts. This distinctiveness favors more the application of this algorithm. The dimension of the search interval has a great effect on influencing the convergence of the algorithms, but MARS algorithm remains very robust and shrinks the space search very fast and ultimately sample only in neighborhoods of the local optima (Freudenstein-Roth2 and Griewank4). The time consuming varies from

algorithm to other. This can be remarked on the table 2, where we compare the number of iterations needed to reach a threshold previously fixed for each function. For the second table, and for running the three algorithms, we set the parameters of each algorithm as follows:

For the ARS algorithms:

- The contraction factor  $c = 2^{1/2}$ ,
- The precision threshold  $\rho = 1e-04$ ,
- Start point is generated randomly,
- Number  $N_{restart} = 5$ ,
- The threshold for each function (Table II).

For the BSA algorithm:

- The start temperatures  $T1 = 100000$ , (maximize the temperature),
- $N_{sa} = 100*d$ , (d dimension of the problem),
- Start point is generated randomly,
- The parameter  $\delta = 0.95$ .

Table 2: Number of iterations test of the four optimization algorithms for each algorithm

Function / interval / threshold	Algorithm 1	Algorithm 2	Algorithm 4
Rosenbrock4 / [-2,2] / < 0.1	divergence	31460	75418
Himmelblau2 / [-10,10] / < 5e-5	divergence	160	95700
Himmelblau3 / [-5,5] / < 0.3049	divergence	3712	81200
Freudenstein-Roth2 / [-100,100] / < 5e-4	divergence	31460	121800
Griewank4 / [-100,100] / < 1e-5	divergence	2498	divergence

Consulting the table 2, we remark that the results obtained by the first algorithm are too far to be accepted and it cannot reach the threshold, since it finds the functions very hard to optimize and the threshold very small to be achieved. The same thing can be said for the BSA; the number of iteration required to reach the threshold of each function is extremely high compared to the MARS algorithm, and sometimes diverges of the aim and cannot be able to minimize some functions (e.g. Griewank4). On the other hand, the MARS algorithm gives good results, with a number of iterations too small. The MARS algorithm outperforms the two others algorithms for all function. The usage of the MARS algorithm will hopefully improve and optimize numerous objective functions, and can be applied for model

updating, where their parameters tend to be highly coupled.

### 3. Model Updating

To judge the effects of employing the Modified ARS algorithm for dynamic FE model updating, it is necessary to have two simple test models. The first model used is an undamped four element free-free bar. This model has five updating parameters "p-values" for the lumped mass matrix, and nine p-values for the stiffness matrix; thus the model has, on the whole, 14 p-values to update. The second model is an undamped eight element free-free bar. It is presented to study the effect of the super element on the convergence of results, and the robustness of each algorithm to update large models. The second model has 16 p-values to be updated; each element has two

parameters to be updated the stiffness and mass, thus, eight parameters correspond to the eight elements of stiffness matrix, and eight parameters correspond to the eight element of mass matrix. The two models are presented to compare two type of updating method; (i) updating of all components of stiffness and mass matrices, (ii) updating of the stiffness and mass matrices of each element. The second type requires less p-values to be updated compared to the first one.

It is necessary to decide the domain in which the updating will occur, i.e. the modal or frequency domain. In this section, we decide the two domains by introducing several sorts of objective functions. The two objective functions will be compared and tested to choose the best one will be used in section 4 for updating a real structure using experimental data.

### 3.1. Modal Domain

Relating to the modal domain, several objective functions have been proposed [1, 2]. Before starting, it is necessary to give a previous description of several parameters which will be used for deciding the form of the objective function. The parameters are:

– The mass matrix *Self-Orthogonality test* [13]: This matrix is given by the following equation:

$$Mort = \phi^m M_A \phi^m, \quad (9)$$

– The mass matrix *Cross-Orthogonality test* [13]: given by the following:

$$Moc = \phi^m M_A \phi^a, \quad (10)$$

– The stiffness matrix *Self-Orthogonality test*: given by:

$$Kort = \phi^m K_A \phi^m, \quad (11)$$

– The stiffness matrix *Cross-Orthogonality test*:

$$Koc = \phi^m K_A \phi^a. \quad (12)$$

Where:

$M_A, K_A$ : Analytical mass and stiffness matrices,

$\phi$ : Analytical modal shapes  $k \times n$  ( $k$ : number of measured modes),

$\phi_m$ : Measured modal shapes  $k \times n$  ( $n$ : length of the matrix  $M_A$ )

For an ideal case, the two first test matrices must be equal to the identity matrix and the stiffness test matrices equal to the  $\omega_i^2$  diagonal matrix. Considering this case, the objective function may be formulated as follows [10]:

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| (Mort + Moc)_{ij} \right| - \left| \Gamma(Mort + Moc) \right| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| (Kort + Koc)_{ij} \right| - \left| \Gamma(Kort + Koc) \right| \quad (13)$$

Where,

$\Gamma$ : Matrix trace symbol,

$|\cdot|$ : Absolute value symbol,

The optimization problem presented here is the minimization of the objective function  $\Psi_1$ . This function is given by the difference between the sum of elements of the two orthogonality tests and the sum of their traces. Berman [4] has taken only the *self-Orthogonality tests* as constraints. In this paper, the *cross-Orthogonality tests* have been added to increase the convergence and the sensibility of the objective function to small changes introduced on the two tests through the analytical matrices.

Another part is added to the objective function; the difference between the absolute values of the two tests traces. This constraint concerns the two analytical matrices, and it contributes more on the increasing of the objective function sensibility. In model updating process, one requires not only satisfactory correlation between analytical and experimental results, but also maintaining physical significance of updated parameters. For this reason, a last part will be inserted which concerns the physical constraints. It is about the total mass constraint of the structure and structure frequencies constraints. The two constraints are presented by the difference between the two parameters (mass and frequencies) of the analytical model and the real physical structure over the total mass (*mass*) and measured natural frequencies ( $f_m$ ) respectively. These two constraints have shown a great effect on the variation of the objective function and improve remarkably the analytical model and give a physical meaningfulness to the results.

The following equation groups the whole parts of the objective function presented by the two parameters: the mass and stiffness matrices [10]:

$$\Psi_2 = \Psi_M + \Psi_K \quad (14)$$

where,

$$\Psi_M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| (Mort + Moc)_{ij} \right| - \left| \Gamma(Mort + Moc) \right| + \left| \Gamma(Mort) - \Gamma(Moc) \right| + \left| \left( \sum_{i=1}^m (m_a - m_m)_i / mass \right) \right| \quad (14a)$$

and,

$$\Psi_K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| (Kort + Koc)_{ij} \right| - \left| \Gamma(Kort + Koc) \right| + \left| \Gamma(Kort) - \Gamma(Koc) \right| + \left| \left( \sum_{i=1}^m ((f_a - f_m) / f_m)_i \right) \right| \quad (14b)$$

The first element represents the mass objective function part and the second the stiffness objective function part.

Another modal domain cost function is presented [13]. This function is given by the following:

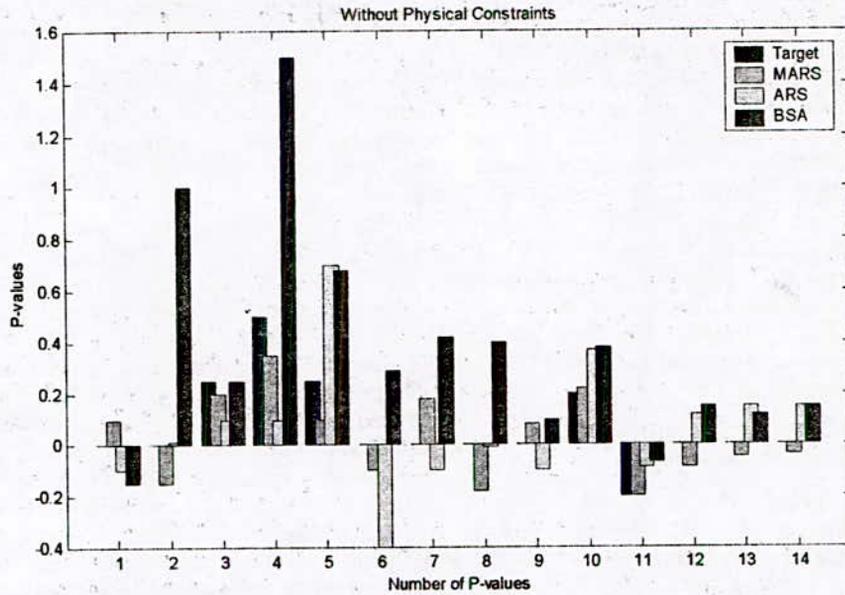


Fig. 1: Updated an target p-values using the four algorithms : the first objective function  $\Psi_1$  without considering the physical constraints (first model)

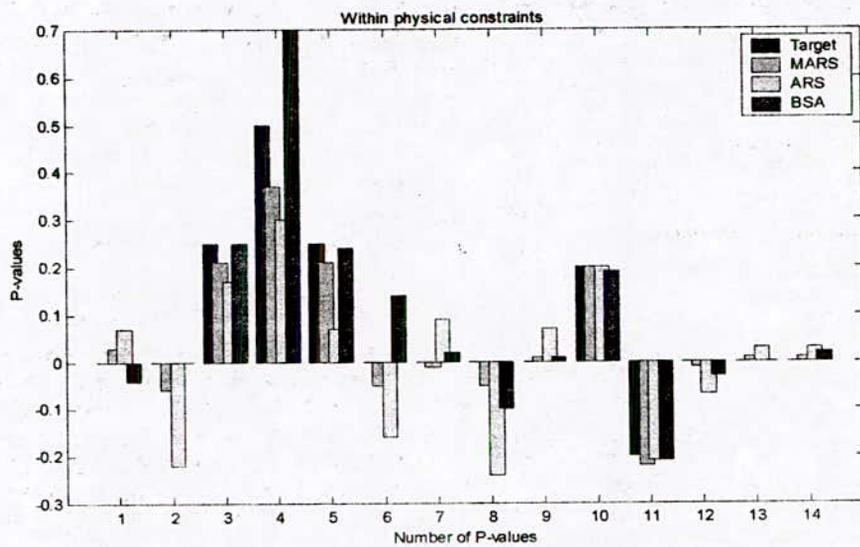


Fig. 2: Updated an target p-values using the four algorithms : the first objective function  $\Psi_2$  within considering the physical constraints (first model)

Table 3: Modal properties of first and second models

First Model			Second Model		
measured frequencies	Analytical frequencies	Mac	measured frequencies	Analytical frequencies	Mac
1860.3	1787.7	0.95	932.65	911.37	0.9381
3325.5	3303.3	1.20	1823.8	1787.7	0.9261
4283.3	4315.9	0.575	2672.9	2595.4	1.0575
4908.1	4671.5	0.65	3396.7	3303.3	1.1361
---	---	---	3970.6	3884.2	0.8086
---	---	---	4413.7	4315.9	0.5006
---	---	---	4667.1	4581.8	0.3676

$$\Psi_3 = W_\omega J_\omega + W_\varphi J_\varphi \quad (15)$$

where  $J_\omega$  and  $J_\varphi$  are cost functions related with natural frequency data and mode shape data respectively.  $W_\omega$  and  $W_\varphi$  are weighting factor for each cost function respectively. Following the advice of Kwon and Lin [13], we take  $W_\omega = 10$ , and  $W_\varphi = 1$ .  $J_\omega$  and  $J_\varphi$  can be written as

$$J_\omega = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\omega_k^m - \omega_k^a}{\omega_k^m} \right)^2 \quad \text{and}$$

$$J_\varphi = \sum_{k=1}^n (MSF \cdot \phi_k^m - \phi_k^a)^T (MSF \cdot \phi_k^m - \phi_k^a) \quad (15a)$$

where  $\omega_k$  and  $\phi_k$  are natural frequency and mode shape vector, respectively, and superscripts  $m$ ;  $a$  and  $T$  represent measured data, analytical data and transpose of a vector, respectively.  $MSF$  is the modal scale factor, it is given by the following

$$MSF = \frac{(\phi_k^a)^T \phi_k^m}{(\phi_k^m)^T \phi_k^m} \quad (15b)$$

The modal assurance criterion (MAC) should be used in order to pair analytical data and experimental data properly; it is given by the following equation:

$$MAC = \frac{|(\phi^m)^T \phi^a|^2}{((\phi^m)^T \phi^m)((\phi^a)^T \phi^a)} \quad (16)$$

The MAC has its value between 0 and 1 according to the closeness between eigenvectors of analytical and experimental modes. If the modes pair in order, then the MAC matrix will have values close to 1 on the diagonal and close to 0 elsewhere.

### 3.2. Frequency Domain

In the frequency domain numerous approaches have been developed. In this work, we considered the approach which uses stochastic search algorithms given by [11]. This method is presented to compare the results obtained by the *BSA algorithm* [11] and those obtained by the two types of *ARS algorithms*.

It is necessary to speak about the objective functions used to compare the results. [11] have presented and compared several objective functions to decide the finest one will be used in model updating. They start by choosing the sum-squared difference between the magnitude of the experimental and analytical FRFs, summed over every available frequency point and FRF. This function is an excessive hard function to optimize for the reason that the function being dominated by the contributions made at the FRF resonant peaks. [11] proposed another objective function to improve the first one by considering the sum- $q$ -power difference between the natural logarithm of the FRF magnitudes, i.e.

$$\Psi_4 = \sum_j \sum_\omega \left| \log \left( \left\| \alpha_{jk}(\omega) \right\|_2 \right) - \log \left( \left\| \alpha_{jk}^U(\omega) \right\|_2 \right) \right|^q \quad (17)$$

After several runs on the BSA algorithm in model updating, [11] have end to take the most effective value of  $q$  equal to 1. This value is used to reduce the effect of the resonant peaks and increase the contribution made by the anti-resonances.

This objective function will be used to be compared with the first presented in the modal domain.

The two first objective functions  $\Psi_1$  and  $\Psi_2$  and the objective function of the frequency domain  $\Psi_4$  are tested on two simple models to choose the best.

### 3.3. Testing the Objective functions

To test the strength of the objective functions presented bellow, we consider the two simple test models given in section 2.1. The natural frequencies of the analytical and real models for the two models are shown in Table 3. For the frequency domain, the simulated experimental data consists of 09 frequency response functions "FRFs". Each FRF has 801 frequency points distributed evenly between 0 and 5000 Hz. The objective function of the frequency domain is applied just for the second model

In Table 5, we apply the three algorithms for the first objective function (equ. 11), within taking into consideration the physical constraints (i.e. total mass and the natural frequencies of the structure).

It can be seen from figures 1 and 2 that the MARS algorithm, compared to the other algorithms, has improved significantly the first analytical model and have matched the target  $p$ -values of the first FE model. It can also be seen that the first objective function  $\Psi_2$  within physical constraints has performed better than the second one i.e. without physical constraints (for the MARS algorithm). This remark strengthens the usage of the second function  $\Psi_2$  as the objective function for model updating.

To compare the strength of the modal and the frequency domains objective functions and the powerful of the MARS algorithm, we consider the second model.

We can see clearly from table 5 that the MARS algorithm has improved significantly the modal properties of the second model, and the BSA algorithm has not be able to update the initial model, a thing which confirms the utility of use the MARS algorithm for model updating.

In table 6, the MARS algorithm works well using the two types of objective function, but the modal objective function performs better than the frequency one, and its usage improve remarkably the modal properties of the initial finite element model. The same remark can be seen in figure 2 and 3, where the target  $p$ -values are very well matched when we use the first objective function  $\Psi_2$ .

The target  $p$ -values to be obtained are given in Table 4.

Table 4: Target p-values for first and second models

First Model		Second Model	
Stiffness	Mass	Stiffness	Mass
0	0.2	0	0.2
0.25	-0.2	0.2	0
0.5	0	0	0
0.25	0	0	0
0	0	0	0
0	---	0	0
0	---	0	-0.4
0	---	0.3	0
0	---	---	---

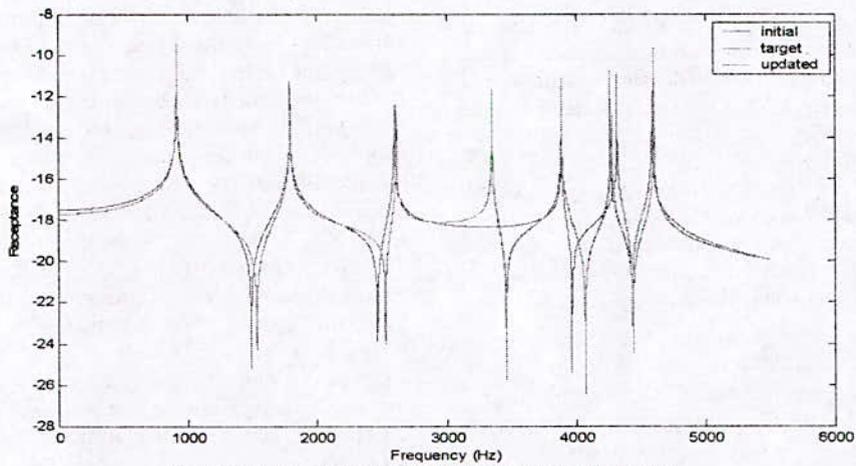


Fig. 3: Original, target and MARS updated FRFs for  $\psi_2$

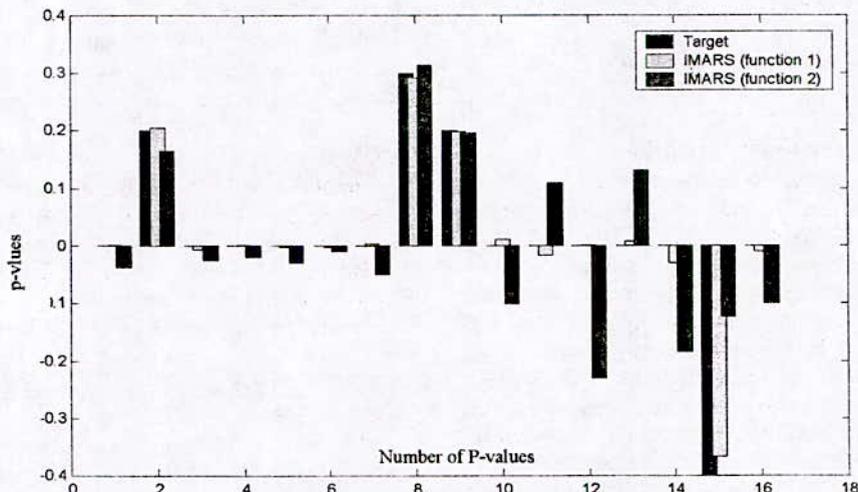


Fig. 4: updated P-values using the MARS algorithm for modal and frequency objective functions (second model)

Table 5: Modal properties of updated model using first objective function  
Within physical constraints  $\Psi_2$  (Model two)

Mode n°	Diagonal MAC values				Natural frequencies (Hz)				
	initial	BSA	ARS	MARS	initial	BSA	ARS	MARS	Target
1	0.938	0.938	1.000	0.988	911.37	911.37	919.17	912.58	932.65
2	0.926	0.926	1.018	0.992	1787.7	1787.7	1803.0	1794.9	1823.8
3	1.057	1.057	1.002	0.978	2595.4	2595.4	2681.4	2647.4	2672.9
4	1.136	1.136	0.980	1.014	3303.3	3303.3	3362.7	3338.5	3396.7
5	0.808	0.808	0.962	1.010	3884.2	3884.2	3923.6	3917.9	3970.6
6	0.500	0.500	1.014	1.007	4315.9	4315.9	4371.1	4354.5	4413.7
7	0.367	0.367	1.011	1.008	4581.8	4581.8	4925.5	4604.2	4667.1

To compare the strength of the modal and the frequency domains objective functions and the powerful of the MARS algorithm, we consider the second model.

We can see clearly from table 5 that the MARS algorithm has improved significantly the modal properties of the second model, and the BSA algorithm has not been able to update the initial model, a thing which confirms the utility of use the MARS algorithm for model updating.

In table 6, the MARS algorithm works well using the two types of objective function, but the modal objective function performs better than the frequency one, and its usage improve remarkably the modal properties of the initial finite element model. The same remark can be seen in figure 2 and 3, where the target p-values are very well matched when we use the first objective function  $\Psi_2$ .

Table 6: Modal properties for the modal and frequency objective functions

Mode	Target frequencies	Initial MAC	MARS for function 1			MARS for function 2		
			Updated frequencies	Error%	MAC	Updated frequencies	Error%	MAC
1	932.65	0.938	931.54	0.12	1.000	919.09	1.45	1.005
2	1823.8	0.926	1823.6	0.01	1.004	1795.7	1.54	1.009
3	2672.9	1.057	2681.7	-0.33	1.001	2627.5	1.70	1.013
4	3396.7	1.136	3396.7	0	0.999	3345.9	1.50	0.980
5	3970.6	0.808	3972.7	-0.05	0.994	3899.0	1.80	0.985
6	4413.7	0.500	4416.2	-0.06	1.001	4341.7	1.63	1.002
7	4667.1	0.367	4670.1	-0.06	1.000	4593.2	1.58	1.005

#### 4. Concluding remarks

Three algorithms have been proposed to update two finite element test models. Two of the three algorithms are derived from the ARS algorithm and compared with the BSA algorithm to choose the best one will be used to update other structure real physical structure.

The MARS algorithm is a powerful algorithm for model updating. It has shown a high performance to improve and optimize mathematical and physical (model updating) objective functions. This algorithm improves the ARS algorithm and gives good results compared to the other algorithms. The MARS algorithm has successfully updated the two simulated structures by improvement the correlation between the analytical parameters and the simulated experimental data.

Three objective functions have been presented and compared to choose the more efficient to be used for updating other structure. In the modal domain, the objective functions require natural frequencies and modal shapes as measured experimental data, and in the frequency domain, the frequency response functions FRFs as experimental data. The application of the first

objective function  $\Psi_2$  with physical constraints has given good results compared to the function  $\Psi_1$  without physical constraints and the function  $\Psi_4$  of the frequency domain. In the rest of this work, we decide the first objective function for the updating of a real physical structure with considering a set of measured mode shapes and natural frequencies as reference for the real structure.

#### 5. REFERENCES

- [1] Mottershead, J. E. and Friswell, M. I., "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics", Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [2] Mottershead, J. E. and Friswell, M. I., "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey", Journal of sound and vibration, 167(2), (1993), p.347-375.
- [3] Baruch, M. and Bar Itzack, I. V., "Optimal weighted orthogonalization of measured modes", AIAA journal, Vol.17, August (1979), p. 346-351.

- [4] Berman, A. and Nagy, E. J., "Improvement of a large analytical model using test data", AIAA journal, Vol.21, Na 8, August (1983), p. 1168-1173.
- [5] Caesar, B. and Peter, V., "Direct Update of Dynamic Mathematical Models from Modal Test Data", AIAA Journal, Vol. 25, N° II, Fev. (1987), p. 1494-1499.
- [6] Wei, T. S., "Structural Dynamic Model Improvement using Vibration Test Data", AIAA Journal, Vol. 28, N° 1, 1990, pp. 175-177.
- [7] Wei, T. S., "Mass and Stiffness Interaction Effects in Analytical models of Damping Matrix", AIAA Journal, Vol. 28, N° 9, 1990, pp. 1686-1688.
- [8] Friswell M.I., Inman D. J. and Piklely D. F., "The Direct Updating of Damping and Stiffness Matrices", AIAA Journal, Vol. 36, N° 3, March 1998, pp. 491-493.
- [9] M.I. Friswell, J. E. T. Penny and S. D. Garvey "A combined genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures", *Computers & Structures, Volume 69, Issue 5, December 1998* Pages 547-556.
- [10] N. Touat and S. Rechak, "Effet de la Fonction Objective sur la Convergence des Modèles d'Eléments Finis en utilisant les Algorithmes Génétiques", Congrès Français de la Mécanique CFM 2003, Nice, 1-5 septembre 2003.
- [11] R. I. Levin and N. A. J. Lieven, 'Dynamic Finite Element Model Updating using Simulated Annealing and Genetic Algorithms', *Mechanical systems and Signal Processing*, 1998, 12(1), 91-120.
- [12] M. J. Appel, R. Labarre and D. Radulovic, 'On Accelerated Random Search', *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 14, No. 3, pp. 708-731.
- [13] Kodiyalam, S., Kao, P. J. and Wang, G., "Analysis and Test Correlation of Space craft Structures Using Dynamic Parameter Sensitivities", AIAA journal, Vol. 32, Na II, Nov. (1994), P. 2286-2292.
- [14] K. S. Kwon, R. M. Lin, 'Robust Finite element model updating using Taguchi method', *Journal of Sound and Vibration*, In press.
- [15] M. PYRZ, 'Evolutionary Algorithm Integrating Stress Heuristic for Truss Optimization', *Optimization and engineering*, 5, 45-57, 2004.
- [16] Goldberg D. E., "Genetic algorithms", Addison-Wesley USA, 1991.

# INFLUENCE DE LA SEQUENCE D'EMPILEMENT SUR LE COMPORTEMENT EN STATIQUE DES STRATIFIES VERRE E-POLYESTER

Rokbi M<sup>(a)</sup>, Bezazi A<sup>(b)</sup>, Osmani H<sup>(c)</sup>

- <sup>(a)</sup> Université Med Boudiaf M'sila 28000, Algérie. E-mail : [rokbiman@yahoo.fr](mailto:rokbiman@yahoo.fr)  
<sup>(b)</sup> Dynamics Research Group (DRG), Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield, Mappin Street, S1 3JD UK. E-mail : [a.bezazi@sheffield.ac.uk](mailto:a.bezazi@sheffield.ac.uk)  
<sup>(c)</sup> Laboratoire de matériaux Non Métalliques, OMP, UFAS, Sétif 19000, Algérie  
 E-mail : [Hocincosmani@yahoo.fr](mailto:Hocincosmani@yahoo.fr)

## I. RESUME

Ce travail a pour but d'étudier les différents modes d'endommagements des stratifiés croisés, ainsi que les stratifiés quasi-isotropes. Les tests en statique ont permis de voir les effets de la séquence d'empilement, de l'emplacement et de l'orientation des plis sur le comportement à la rupture. Ainsi, les différents modes d'endommagements qui peuvent se manifester lors d'un chargement en flexion trois points sont mis en évidence.

**Mots clés :** stratifié croisé, quasi-isotrope, fissuration transverse, délaminage, endommagement.

## II. INTRODUCTION

L'étude de la microfissuration a débuté dans les années 70, et ce, à la suite de l'observation de l'initiation des microfissures [1]. Depuis, la prédiction du processus d'endommagement est devenu le souci commun de plusieurs auteurs. Expérimentalement, les auteurs suivants, Garrett et Bailey [1], Naim et Talreja [2], Berthelot et Le Corre [3], A. Bezazi et al. [4-5], Walrick et al. [6], Joffe [7], ont observé que le premier mode d'endommagement est la fissuration transverse. Par la suite, apparaissent des endommagements transverses, il a été observé l'amorçage d'endommagements plus graves tels que la fissuration longitudinale ou/et le délaminage. Quant à la rupture finale du composite stratifié, elle résulte de la propagation et de l'accumulation de ces trois dommages aux quels s'ajoutent la rupture des fibres.

J. A. Naim et Talreja [2], confirment que le premier phénomène d'endommagement des stratifiés n'est que les microfissurations matricielles, qui sont des décohésions interlaminaires. Ces dernières traversent l'épaisseur du pli et s'enfoncent parallèlement aux fibres. Les auteurs Berthelot et Le Corre [3] constatent que les fissures transverses induisent des concentrations de contraintes localisées en pointes des fissures et ces concentrations provoquent un délaminage entre les couches à 0° et à 90°. Ce dernier peut alors se développer

à partir des extrémités des fissures permettant ainsi de transférer, de la couche à 90° à la couche à 0°, l'augmentation de la charge exercée sur le stratifié sans création notable de nouvelles fissures transverses.

Bezazi et al. [4-5], ont étudié le comportement mécanique en flexion 3-points de différents stratifiés croisés verre/époxyde. Les auteurs déduisent que la rupture des stratifiés du type  $[0_m/90_n]_s$  est de nature fragile. L'endommagement de cette classe des stratifiés est marqué par le délaminage entre les plis orientés à 0° et à 90° avec ou sans rupture de la face comprimée, alors que les fissurations transverses sont faibles. Pour les stratifiés  $[90_m/0_n]_s$ , l'endommagement est dû principalement à des fissurations transverses dans les plis à 90° conduisant à la rupture des fibres dans la face comprimée. Ce type d'endommagement a conduit à une rupture non fragile.

Walrick et al. [6], ont testé une configuration  $[90_2/0_4/90_2]$  des stratifiés verre E / époxyde en statique. Ces auteurs ont constaté que durant la flexion, des fissures transverses de la matrice apparaissent dans les plis à 90° inférieurs.

Joffe [7], pense que le phénomène de décohésions multiples entre fibre/matrice peut être mal interprété, du fait que, dans certains cas, la rupture de la matrice peut se produire juste près de l'interface (fissure longitudinale). Afin de vérifier cette dernière constatation, Joffe [7], suggère le suivi intense du processus de rupture. Un ensemble de six critères de prédiction de la rupture des plastiques renforcés par fibres est proposé [8].

Les travaux [9-11] concernent l'étude de la rupture des stratifiés quasi-isotropes. L'initiation de l'endommagement se localise dans les empilements  $\pm\theta^\circ$  [9] dans le cas des stratifiés  $[\pm\theta_n/0_n/\mp\theta_n]_s$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ). Pour différentes valeurs de l'orientation  $\theta$ , les stratifiés du type  $[\pm\theta_n/\mp\theta_n/90_{2n}]_s$  ont été étudiés pour déterminer l'influence du facteur  $n$  sur la rigidité maximale [10-11]. Il s'avère que la rigidité diminue lorsque  $n$  augmente. Le mode de rupture des plis est fortement lié à l'orientation  $\pm\theta^\circ$ .

Notre contribution s'intéresse à l'étude des différents composites constitués de fibres de verre et de résine polyester. Une étude statique a été menée sur quatre types de stratifiés croisés afin de voir l'effet de l'empilement et de l'emplacement des plis orientés à 90° par rapport à la

direction des éprouvettes. L'effet de l'orientation des plis suivant un angle  $\theta$  est également interprété par l'analyse du comportement des stratifiés quasi-isotropes pour les valeurs d'inclinaisons des plis suivantes  $\theta=30^\circ, 45^\circ$  et  $60^\circ$ .

### III. TECHNIQUES EXPERIMENTALES

#### 1. Choix des stratifiés

On s'intéresse à l'étude en flexion 3-points des différents types de stratifiés constitués de fibres de verre et de résine polyester. Selon les cas envisagés, nous avons associé à chaque stratifié un empilement soigneusement choisi dans le but de mettre en évidence l'effet de l'emplacement des plis et l'effet d'empilement. Pour refléter l'effet de l'orientation des plis, nous avons élaboré trois types de stratifiés dont la séquence d'empilement répond à celle proposée par Jackson et Kellas [10], soit  $[+0_n/-\theta_n/90_{2n}]_s$ . L'angle de l'orientation des plis,  $\theta$ , est de  $30^\circ, 45^\circ$  et  $60^\circ$ . Pour pouvoir comparer ces derniers stratifiés aux stratifiés croisés, le nombre entier  $n$  est égal à 2.

Les différents stratifiés étudiés sont présentés sur le tableau 1.

TABLE 1  
DIFFERENTS STRATIFIES ETUDIES

Appellation	Structure (empilements)	
A	$[0_4/90_4]_s$	
B	$[90_4/0_4]_s$	
C	$[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$	
D	$[(0_2/90_2)_2]_s$	
E	$\theta=30^\circ$ $[+30_2/-30_2/90_4]_s$	n = 2
F	$\theta=45^\circ$ $[+45_2/-45_2/90_4]_s$	
G	$\theta=60^\circ$ $[+60_2/-60_2/90_4]_s$	

#### 2. Elaboration des matériaux

La mise en œuvre des stratifiés est réalisée par moulage au contact. Les stratifiés considérés possèdent tous 16 plis. Les plis sont soigneusement coupés suivant l'orientation associée puis imprégnés, à température ambiante, tout en respectant les séquences d'empilement du tableau 1. Les matériaux ainsi obtenus, sont sous forme de plaques  $200 \times 200 \text{ mm}^2$  d'une épaisseur moyenne de 4 mm. Un étuvage à  $50^\circ\text{C}$  pendant 4 h des plaques est effectué afin d'assurer une polymérisation complète des stratifiés.

Les éprouvettes ont été découpées à l'aide d'une tronçonneuse à disque diamanté, à partir des plaques citées précédemment. Les éprouvettes ont les dimensions :  $L = 20 \text{ h}$ ,  $l = 16 \text{ h}$  et  $b = 15 \text{ mm}$  selon la norme AFNOR NF T 57-105 [4]. Où  $L$ ,  $l$ ,  $b$  et  $h$  sont respectivement la longueur totale, la distance entre appuis, la largeur et l'épaisseur des éprouvettes.

#### 3. Essais mécaniques

Les essais mécaniques, menés sur les différents types d'éprouvettes sont réalisés à température ambiante sur

une machine de traction/compression type ZWICK dotée d'une cellule de charge de 10 KN. La vitesse de la traverse est fixée selon la norme AFNOR NF T 57-105 à  $2 \text{ mm/min}$ . On associe un dispositif appelé inverseur de sens, ce dernier est conçu spécialement pour ce type d'essai. Le pilotage de la machine et l'acquisition des différentes données sont assistés par ordinateur.

### IV. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Pour s'affranchir des dispersions des dimensions des éprouvettes, nous avons transformé les courbes charge-déplacement en contrainte-déplacement où la contrainte est déterminée par l'expression [4,11]:

$$\sigma = \frac{3 \cdot P \cdot l}{2 \cdot b \cdot h^2} \quad (1)$$

Avec :

$P$  : Charge appliquée ;  
 $l$  : Distance entre appuis ;  
 $b$  : Largeur de l'éprouvette ;  
 $h$  : Epaisseur de éprouvette.

Les résultats ont été analysés en groupant à chaque fois un nombre de stratifiés, ce qui nous permet de mettre en évidence l'effet de l'emplacement des plis, de l'empilement, ainsi que l'effet de l'orientation des plis,  $\theta$ .

#### 1. Analyse des stratifiés croisés

##### 1.1. Effet de l'emplacement des plis

Les matériaux A  $[0_4/90_4]_s$  et B  $[90_4/0_4]_s$ , possèdent 8 plis à  $0^\circ$  et 8 plis à  $90^\circ$ . On constate que le matériau A  $[0_4/90_4]_s$  dont les plis à  $0^\circ$  sont à l'extérieur, est plus rigide et possède une grande contrainte à la rupture que le matériau B  $[90_4/0_4]_s$ . par contre, Ce dernier a un déplacement à la rupture plus important que celui du matériau A (Fig. 1).

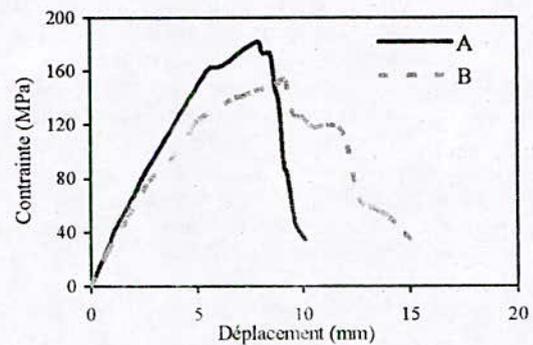


Fig. 1. Effet de l'emplacement des plis.

Bezazi et al. [4,5] ont observé le même phénomène dans le cas de stratifiés verre/epoxy.

### 1.2. Effet de la séquence d'empilement

Les stratifiés A  $[0_4/90_4]_s$ , C  $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$  et D  $[(0_2/90_2)_s]_s$  ont le même nombre de plis à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ . Par contre, leurs empilements sont distincts d'un matériau à un autre. L'analyse des courbes contrainte-déplacement, (Fig. 2), montre que l'alternance des plis à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , (cas du stratifié C), permet d'avoir un important déplacement à la rupture. En revanche, la contrainte à la rupture du stratifié C est légèrement inférieure à celle des stratifiés A et D ; ces derniers possèdent une bonne rigidité est une meilleure résistance à la rupture.

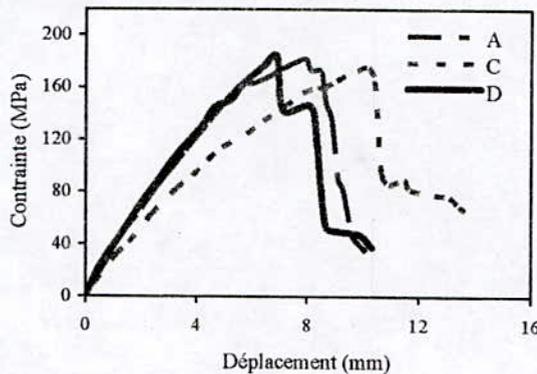


Fig. 2. Effet de la séquence d'empilement

### 2. Analyse des stratifiés quasi-isotropes

Afin de prédire l'effet de l'orientation des plis sur le comportement des stratifiés, une série de tests est menée sur des stratifiés dont l'empilement est conforme à la configuration  $[\theta_n/\theta_n/90_{2n}]_s$ . L'angle d'inclinaison des plis,  $\theta$ , est de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .

#### 2.1. Effet de l'orientation des plis

Pour  $n = 2$  et  $\theta = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  puis  $60^\circ$ , nous présentons les courbes contrainte-déplacement des trois matériaux envisagés, soit E  $[+30_2/-30_2/90_4]_s$ , F  $[+45_2/-45_2/90_4]_s$  et G  $[+60_2/-60_2/90_4]_s$ , (Fig. 3).

L'analyse des résultats obtenus montre que :

- les 3 stratifiés ont un comportement non linéaire jusqu'à une rupture fragile ;
- l'orientation à  $45^\circ$  permet d'avoir le maximum de rigidité (stratifié F), l'orientation à  $60^\circ$  possède le déplacement à la rupture le plus important (stratifié G), alors que le stratifié E ayant  $\theta = 30^\circ$  est caractérisé par la plus importante contrainte ;
- l'endommagement des stratifiés est initié par fissuration transverse, suivi d'un délaminage au niveau des couches tendues. La rupture totale n'a lieu qu'après rupture des faces tendues. Notons que les faces comprimées sont peu endommagées.

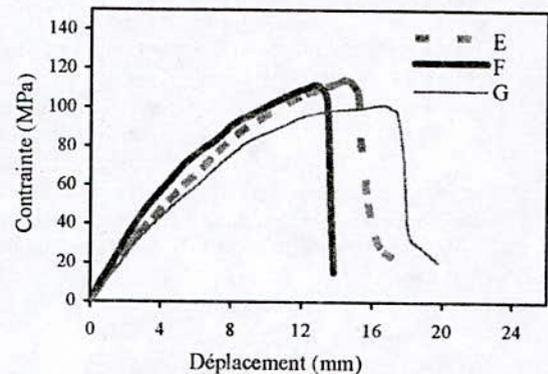


Fig. 3. Effet de l'angle de l'orientation  $\pm\theta$ .

### 3. Comparaison des deux classes de stratifiés

Pour comparer les différents comportements à la rupture des deux classes des stratifiés étudiés (croisés et quasi-isotropes), nous avons tracé, pour illustration, les courbes contrainte-déplacement des matériaux C  $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$  et G  $[+60_2/-60_2/90_4]_s$ , (Fig. 4). Ces deux matériaux ont le même nombre de plis (16 plis) mais les arrangements locaux des renforts sont nettement différents. L'analyse des résultats obtenus montre que : le stratifié croisé C est beaucoup plus rigide ; sa contrainte maximale est 2 fois plus importante que celle du stratifié quasi-isotrope G. Par contre, ce dernier possède un déplacement à la rupture environ 70 % plus importante que celui du stratifié C.

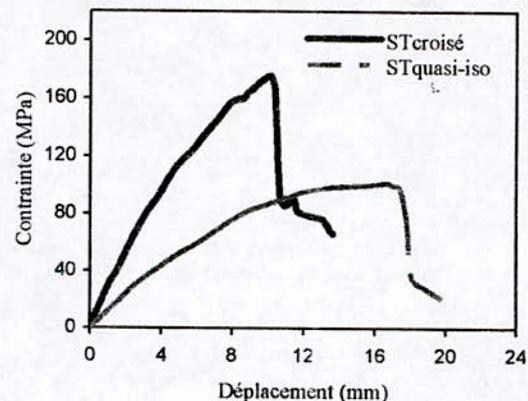


Fig. 4. Comparaison des deux classes des stratifiés

### 4. Analyse des faciès de rupture

L'observation des faciès de rupture des différents stratifiés mis en œuvre, permet de dégager quatre types d'endommagements :

- Fissuration transversale des plis  $90^\circ$  ;
- Délaminage entre les plis à  $90^\circ$  et ceux à  $0^\circ$  ;
- Délaminage entre les plis à  $90^\circ$  et ceux à  $\theta^\circ$  ;
- Rupture des fibres.

La rupture en statique des différents matériaux étudiés peut être classée en quatre groupes :

a) Les matériaux B  $[90_4/0_4]_s$  et C  $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$ , dont les plis à  $90^\circ$  sont à l'extérieur, sont fortement endommagés par fissurations transverses. A travers les faciès de rupture (Fig. 5, Fig. 6), nous pouvons conclure que la ruine de ces matériaux est favorisée par la forte présence des fissurations transverses. A la suite de ces fissurations, apparaît le délaminage entre les plis orientés à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  et finalement la rupture des fibres dans la face comprimée.

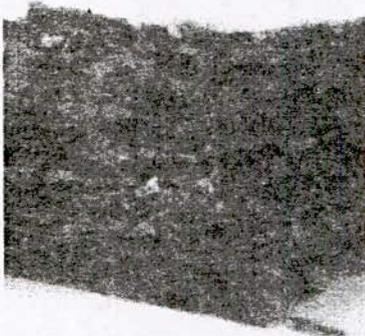


Fig. 5. Faciès de rupture après endommagement du stratifié B  $[90_4/0_4]_s$

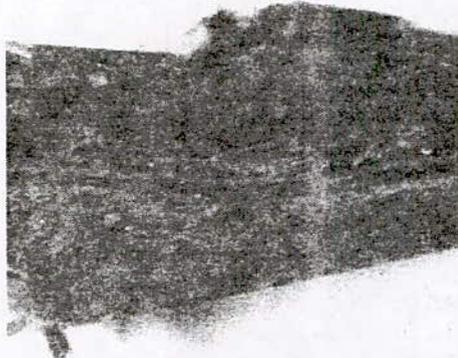


Fig. 6. Faciès de rupture après endommagement du stratifié C  $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$

b) Les matériaux A  $[0_4/90_4]_s$  et D  $[(0_2/90_2)]_s$ , dont les plis à  $90^\circ$  sont confinés à l'intérieur par des plis à  $0^\circ$ , sont peu endommagés par fissurations transverses, (Fig. 7, Fig. 8).

Bien que la fissuration transverse soit le premier phénomène d'endommagement qui apparaît, il s'avère que : le stratifié A s'endommage essentiellement par délaminage et rupture de la face tendue. Alors que le stratifié D s'endommage par délaminage au niveau des couches externes suivi d'une rupture aussi bien de la face tendue que de la face comprimée (par flambement). Notons que pour le stratifié  $(0_4/90_4)$  verre/époxy [4,5] la rupture apparaît sur la face comprimée alors que la face tendue reste sans endommagement significatif.

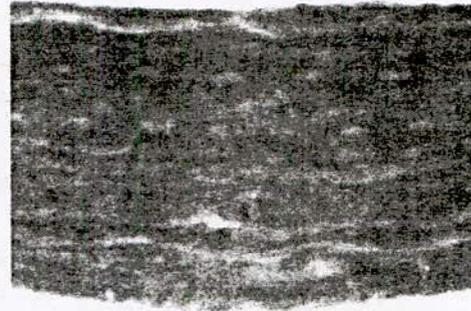


Fig. 7. Faciès de rupture après endommagement du stratifié A  $[0_4/90_4]_s$

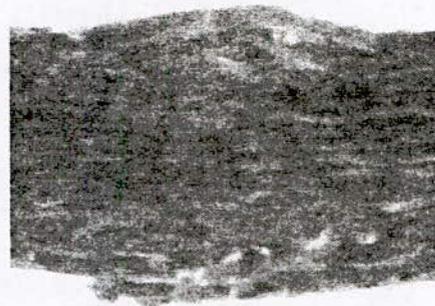


Fig. 8. Faciès de rupture après endommagement du stratifié D  $[(0_2/90_2)]_s$

c) Les stratifiés E  $[+30_2/-30_2/90_4]_s$  et F  $[+45_2/-45_2/90_4]_s$  sont fortement endommagés par fissuration transverse. Après la formation de graves fissurations au niveau des plis  $90^\circ$ , il y a eu délaminage des interfaces  $-0/90$  ( $\theta=30^\circ$  ou  $45^\circ$ ). Des fissurations inclinées s'étendent dans diverses directions de la partie inférieure des stratifiés, et donnent naissance à des cavités toutes en favorisant la rupture des fibres de la face tendue, (Fig. 9, Fig. 10). Il est à signaler que la ruine de ces deux matériaux est due à l'accumulation de l'ensemble des mécanismes d'endommagements.

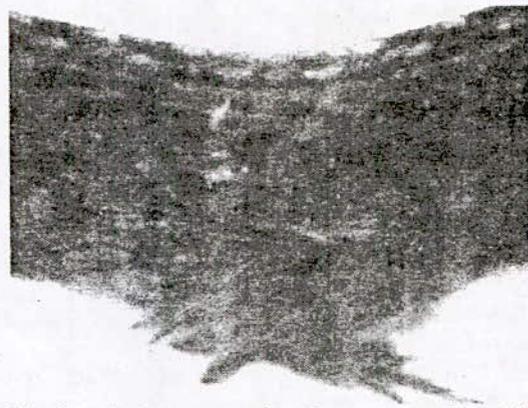


Fig. 9. Faciès de rupture après endommagement du stratifié E  $[+30_2/-30_2/90_4]_s$



Fig. 10. Faciès de rupture après endommagement du stratifié F [+45<sub>2</sub>/-45<sub>2</sub>/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub>

d) Pour le stratifié G [+60<sub>2</sub>/-60<sub>2</sub>/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub>, un délaminage important s'est formé à l'interface -60°/90°. Il tend à se propager le long de l'éprouvette. La fissuration transverse est fortement présente en raison de la souplesse du matériau caractérisé par un déplacement à la rupture beaucoup plus important que celui des stratifiés E et F. Des cavités sont visibles dans les plis 90°, ainsi que dans les plis à +60°/-60° de la partie inférieure. Ce qui favorise une destruction du matériau par délaminage. De plus, il semblerait que les fibres de la partie comprimée sont purement cisailées, (Fig. 11).

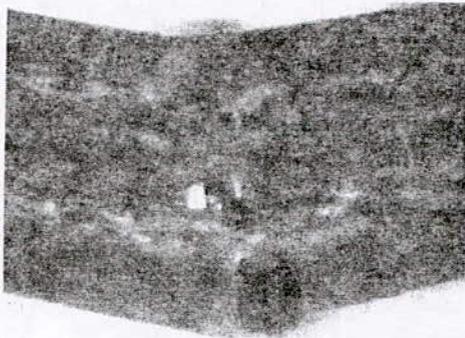


Fig. 11. Faciès de rupture après endommagement du stratifié G [+60<sub>2</sub>/-60<sub>2</sub>/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub>

## V. CONCLUSION

L'étude statique présentée dans cet article a permis de mettre en évidence l'influence de l'emplacement, de la séquence d'empilement des plis, et de l'effet de l'orientation des plis des stratifiés quasi-isotropes sur le mode d'endommagement des stratifiés. L'analyse des faciès de rupture, des éprouvettes rompues, montre que le délaminage est le phénomène le plus prépondérant. L'endommagement des stratifiés peuvent être séparés en trois classes : la fissuration transversale des plis à 90°, ensuite et durant le prolongement du chargement, il y a un amorçage de nouveaux modes d'endommagements qui sont soit le délaminage local à l'interface des couches

0/90 ou -0/90, soit la rupture des fibres notamment dans les faces tendue ou/et comprimée. L'accumulation de ces modes tend à accélérer la ruine du matériau.

Vu la diversité des séquences d'empilement qui peuvent se présenter, on ne peut donner des prédictions spécifiques concernant les mécanismes de ruptures. Une campagne d'essais appropriée doit être soigneusement menée pour améliorer les approches expérimentales, afin d'établir un scénario assez proche des modes complexes d'endommagements des stratifiés.

## VI. REFERENCES

- [1] K. W. Garrett and J. E. Bailey, "Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of glass fibre-reinforced polyester," *Journal of Materials Science* 12, pp. 157-168, 1977.
- [2] J. A. Nairn and R. Talreja, *Polymer Matrix Composites*, Chap13, Matrix Microcracking in Composites, Ed. Masson, Paris, in press.
- [3] J. M. Berthelot and J. F. Le Corre, "Statistical analysis of the progression of transverse cracking and delamination in cross-ply laminates," *Composites Science and Technology*, 60, pp. 2659-2669, 2000.
- [4] A. Bezazi, A. El Mahi, J. M. Berthelot et B. Bezzazi, "Analyse de l'endommagement des stratifiés en flexion 3-points, influence de la séquence d'empilement," XV<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3-7 septembre, 2001.
- [5] A. Bezazi, A. El Mahi, J. M. Berthelot and B. Bezzazi, "Flexural fatigue behavior of cross-ply laminates: an experimental approach," *Strength of Materials*, vol. 35, N 2, pp. 149-161, 2003.
- [6] J. C. Walrick, D. Coutellier et P. Geoffroy, "Méthodologie pour une prévision du délaminage dans la modélisation de structures stratifiées composites," Eds. scientifiques et médicales Elsevier SAS, pp. 259-265, 2000.
- [7] R. Joffe, *Damage accumulation and stiffness degradation in composite laminates*, Doctoral Thesis, Department of Materials and Manufacturing Engineering, 1999, ISSN: 1402-1544-ISR: LTU-DT-99/27-SE.
- [8] C. G. Davila and P. P. Camanho, *Failure criteria for FRP Laminates in Plane Stress*, NASA/TM-2003-212663, 2003, NASA Langley Research Center.
- [9] S. Tolson and N. Zabaras, "Finite element analysis of progressive failure," *Computers and structures*, vol. 38, No. 3, pp. 361-376, 1991.
- [10] K. E. Jackson and S. Kellas, *Effect of Specimen Size on the Tensile Strength of geometrically Scaled Composite Laminates*, Army Symposium on Solid Mechanics, Plymouth, 1993.
- [11] J. A. Lavoie, *Scaling effects on damage development, strength, and stress-rupture life of laminate composites in tension*, Blacksburg, Virginia, 1997, pp. 1-48.

# The Centrifugal Force Algorithm for Optimization Problems

N. Touat (ntouat2001@yahoo.fr), A. Ahmed Ben Yahia

Mechanical department, University of sciences and technology Houari Boumediene

And

S. Rechak

Mechanical department, National polytechnic school El-Harrach

## Abstract

In this paper, a new stochastic search algorithm is presented. The principle of this algorithm is inspired from the functioning principle of a centrifugal device. The centrifugal force algorithm is a powerful algorithm and can be applied for all optimization problems. Five versions of this algorithm are proposed. The five versions are tested and compared to optimize seven hard mathematical test functions to choose the best and the powerful ones. A simple mechanical optimization problem has been applied to test and compare the FTSA1 algorithm with a simulated annealing algorithm. The FTSA1 has outperformed the simulated annealing algorithm and has given good results in reduced time.

## Key words

Centrifugal force algorithm, Optimization problems, neighborhood functions, mathematical functions.

## 1. Introduction

The solving of multi-objective problems (MOPs) has been a continuing effort by humans in many diverse areas including computer science, engineering, economics, finance, industry, physics, chemistry, and ecology, among others. Many powerful deterministic and stochastic techniques for solving these large dimensional optimization problems have risen out of operations research, decision science, engineering, computer science and other related disciplines. In some cases, the usage of classical deterministic techniques (linear and nonlinear programming, etc.) is inappropriate. Stochastic methods, including genetic algorithms [1-4] simulated annealing [4-5], and evolutionary programs [6] and other [7] are being used for many types of practical global optimization problems. These problems include discrete and continuous variables, and the functions have many local optima. Stochastic search algorithms play an increasing role in the analysis and control of modern systems as a way of providing powerful and robust algorithms that are able to find a global solution from among multiple local solutions.

In this paper, a new stochastic search algorithm is developed. The principle of this algorithm is inspired from the functioning principle of a centrifugal device. The centrifugal force algorithm is a powerful algorithm and can be applied for all optimization problems. Five versions of this algorithm are proposed. The five versions are tested and compared to optimize seven hard mathematical test functions to choose the best and the powerful ones.

## 2. Centrifugal force algorithm

The centrifugal force algorithm (CFA) is derived from an analogy with the functioning principal of simple

mechanical machine. A simple machine is any device which transmits the application of force or energy to useful work. Electrical energy can be considered as an input work (force or energy) applied to perform output work (linear, rotational). In our case, the electrical source of energy is used to develop a rotational work or motion. The structure of the machine is very simple. It is composed of simple pieces (fig. 1):

1. An electrical motor to develop input energy,
2. A rotational axis,
3. A conical tube with an variable angle  $\alpha$ ,
4. A set of colored balls.

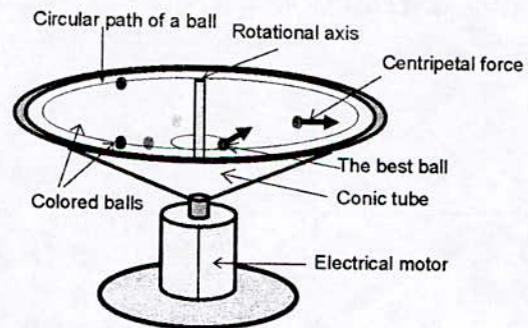


Fig. 1: Centrifugal force machine

### 2.1 functioning principle of the machine

We start the process by setting the angle  $\alpha$  at a value  $\alpha_0$ . Then, we turn on the electrical motor with an angular velocity  $\omega_0$ . A number of colored balls are put then into the conical tube. Under the effect of the angular velocity  $\omega_0$ , a centrifugal force ( $F_g$ ) of each ball is developed, and

a part of balls tend to go out of the conical tube. This process is repeated several times by varying the angle  $\alpha$  and the angular velocity  $\omega$ . This process is done to select the good balls chosen for further test. For each variation of  $\omega$  and  $\alpha$ , we add an other set of balls to be tested. By increasing the velocity  $\omega$  of the motor, the centrifugal force of each ball augments and a number of ball overflow the tube. While arriving at the max speed of the motor and the max angle of conical tube, a set of balls remain in the conical tube and those balls will be considered as the good balls and classified according to their centrifugal force value. The minimal value of the centrifugal force corresponds to the desired ball. This procedure is a mechanical optimization process, and it is this process that is simulated.

## 2.2. Simulating the process

To simulate this process, it is necessary to study this mechanical process by considering the effect of each part of the machine on the behavior of the system. Also, it is de rigueur to analyze the physical behavior of the machine by introducing the Newton's lows, rotational motion and varying the angle of the conical tube.

To begin, we study the type of electrical motor used to develop the input energy ( $\omega(t)$ ). Among electrical motors, we choose an asynchronous motor powered by a  $v/f$  ( $v$  over  $f$ ) command. This command is used to develop a linear varied rotational speed  $\omega$ .

The second part of the machine is the conical tube. This tube is used to vary the angle  $\alpha$  between the rotational axis and the generatrix of the conical tube (figure 2). This angle  $\alpha$  has effect on the centrifugal force. If the angle increases the centrifugal force increases, and vice versa.

The last element is the colored balls which represents one of the important parts of the mechanism. Each color represents a mass  $m_i$  of a ball. In the simulated algorithm,

we refer to the colored ball as the sequence of the record generators, and the centrifugal force  $F_g$  as the record sequence (objective function). The colored balls are put in the conical tube each time we vary the rotational speed of the motor, and, when we vary the angle of the conical tube. The choice of the color of a ball to be inserted depends of the value of the centrifugal force of the balls remaining in the conical tube for each state. For the simulated algorithm, a new color is selected by respecting to a problem-dependent neighborhood function that returns a random new color of a ball in the neighborhood of the color of the remained ball (or the lowest centrifugal force ball) in the conical tube.

## 2.2 The acceleration

The figures 2 and 3 give a representation of forces applied on a ball traveling in a rotational path. Newton's second law of motion states that a resultant force must produce an acceleration in the direction of the force. In uniform circular motion a central force changes the velocity of the ball by continually changing in its direction. Thus, it is possible for the ball to undergo an acceleration (a change in velocity) even though it is moving with a constant circular speed. For the ball which is caused to move in a circular path of radius  $R$  (figure 3), the magnitude of the centripetal acceleration  $a_c$  is given by:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

With  $v$  is the linear speed of the ball.

The linear speed can be written as following:

$$v = \omega \times R \quad (2)$$

With  $\omega$  is the rotational speed of the ball.

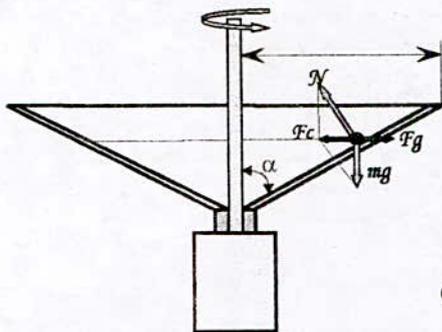


Fig. 2: Representation of forces applied on a ball.

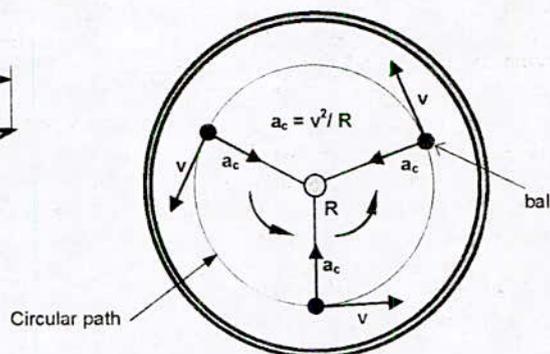


Fig. 3: The centripetal acceleration  $a_c$  and the linear speed  $v$

## 2.4 Centripetal and centrifugal forces:

The inward force necessary to maintain uniform circular motion is defined as the centripetal force. From Newton's second law of motion, the magnitude of this

force (figure 2) is equal to the sum of the weight  $m \cdot g$  and the normal force  $N$ , which also equal to the product of mass and centripetal force. Thus:

$$F_c = \vec{N} + m\vec{g} = ma_c = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

Where,  $m$  is the mass of the ball. The mass corresponds at a color (figure 1).

According to Newton's third laws of motion, the ball exerts an equal and opposite reaction force called the *centrifugal force* ( $F_g$ ). We can then write the following:

$$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_c| = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \quad (4)$$

An inspection of eq. 4 reveals that the inward force  $F_c$  or the centrifugal force  $F_g$  are directly proportional to the square of the linear speed  $v$  of the ball. This means that increasing the linear speed to twice for its original value will require 4 times the original force. This parameter (i.e. changing the angular speed) has a great effect on changing the value of centrifugal force  $F_g$ . Similar reasoning will show that doubling the mass will require twice the original centrifugal force.

By considering the length  $L_R$ , the radius  $R$  can be written as:

$$R = L_R \sin(\alpha) \quad (5)$$

Thus, the centrifugal force becomes:

$$|\vec{F}_g| = m \frac{v^2}{L_R \sin(\alpha)} \quad (6)$$

The eq. 6 introduces a new parameter which can influence on varying the centrifugal force. This parameter is the angle  $\alpha$ . Thus, increasing the angle  $\alpha$  will increase the value of the force  $F_g$ .

The variation of the radius  $R$ , consequently the length  $L_R$ , is allied directly to the variation of the rotational speed and the angle of the conical tube. Thus, for studying the variation of the centrifugal force comes down in studying the effect of the rotational speed and the angle of the conical tube and sometimes the effect of the mass (color of a ball).

In conclusion, we can say that two parameters have a great effect on varying the centrifugal force: the linear speed (depends of the rotational speed) and the angle of the conical tube.

The length  $L_R$  or the radius  $R$  are directly allied to the variation of rotational speed and the angle of conical tube (principle of rotational motion). Thus, to control the evolution of the process of optimization, we can easily control the radius of the curvature of each ball. The minimal radius corresponds to the best ball to choose.

The aim of this work is to develop a new algorithm based on the principle of the centrifugal force. The

algorithm can be applied for all problems of optimization by considering numerous objective functions. This algorithm minimizes the centrifugal force  $F_g$  to choose the best balls (sequences of the record generators) to be accepted or considered as the solution of the optimization problem. The analogy between optimization and the physical behavior of the mechanism was defined as follows: the state of the system becomes the choice of the colored balls, the centrifugal force becomes the objective (or cost) function, the rotational speed and the angle of the conical tube become the control parameters, and finding the lowest centrifugal force of a ball, in other words the lowest radius of curvature, becomes finding the global minimum.

### 3. Implementation details

The above description of the simulated algorithm has left many of the implementation details undecided, such as, the variation of the rotational speed, the variation of the angle of the conical tube and the manner of insertion of the colored balls into the conical tube (choice of neighborhood functions and ball insertion functions). In this work, we present five CF algorithms. These algorithms are compared between them to choose the best one.

Let  $\omega_0$ ,  $\omega_{max}$ ,  $\alpha_0$  and  $\alpha_{max}$  the characteristics of the machine be given.

Step 0: set  $\alpha_0$ ,  $n=1$  and  $m=1$ ;

- Calculate the extra parameter  $\Delta\omega\alpha$ ,
- Insert ten balls into the conical tube,
- Evaluate and classify the centrifugal force of each ball,
- Choose the best five ones,

Step 1: vary  $\alpha_m$  by  $\Delta\alpha$  to  $\Delta\omega\alpha + \alpha_m$ ,  
Insert a new ten ball,

Step 2: Evaluate and classify and choose the best five balls,

Increment  $m = m + 1$  and go to step 1,

Step 3: vary  $\omega_n$  by  $\Delta\omega$  to  $\omega_{max}$ ,

Increment  $n = n + 1$  and go to step 1.

To define a particular CF algorithm fully, it is necessary to define variation schedules of the rotational speed and the angle of the conical tube, also, define the ball insertion and the neighborhood functions. The methods for the ball insertion are given in table 1. A selection of neighborhood functions is presented in table 2. The selection of the neighborhood and the insertion ball functions is done in step2 of the algorithm.

TABLE 1. Centrifugal force neighborhood functions

Function	Description
Random adjustment	substitute one parameter (colored ball) at random, and then change its value to a new random value,
Fixed radius adjustment	Generate a new point on a hypersphere that is a fixed radius from the old point, requires an extra parameter - the radius

TABLE 2. Cases of insertion balls

case	Description
The poor one by one insertion	Substitute the ball presented in the conical tube, by another one for each state.
Ten by ten insertion	A set of ten balls is put into the conical tube for each state; the centrifugal force is evaluated for each ball. In this case, we apply the second neighborhood function as follows: <ol style="list-style-type: none"> <li>1- For the lowest centrifugal force ball, and substitute others randomly</li> <li>2- For the five lowest centrifugal force balls, and substitute the last five by other five ball randomly.</li> </ol>

The ten by ten insertion case gives a great contribution in the convergence of results.

For the variation schedules of the rotational speed and the angle of the conical tube; four cases can be considered:

- 1- The first consists on fixing the angle at a value  $\alpha_0$ , and turning on the electrical motor by choosing the start rotational speed  $\omega_0$ ; the second speed is derived from the first by adding a variation  $\Delta\omega$ , and so on, until arriving to the maximal speed of the motor.
- 2- The second consists on fixing the rotational speed at a value  $\omega_0$ , and varying the angle by choosing the start value  $\alpha_0$ ; the second value is derived from the first by adding a variation  $\Delta\alpha$ , and so on, until reaching the maximal value  $\alpha_{max}$ .
- 3- The third consists on varying the rotational speed, then the angle, and so on, respectively between the intervals  $[\omega_0, \omega_{max}]$  and  $[\alpha_0, \alpha_{max}]$  with a variation of  $\Delta\omega$  and  $\Delta\alpha$ . In this case, the number of elements between each interval must be equal.
- 4- The last is the best case to be used and the most general one. It is given by the following algorithm:  
Set  $\omega = \omega_0$ ; vary  $\alpha = [\alpha_0 : \Delta\alpha : \alpha_1]$ , set  $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ , vary  $\alpha = [\alpha_1 : \Delta\alpha : \alpha_2]$  and so on, until  $\omega = \omega_{max}$  and  $\alpha = \alpha_{max}$ .

Using the four cases, the problem specific parameters are  $\omega_0, \Delta\omega, \omega_{max}, \alpha_0, \Delta\alpha, \alpha_{max}$ . The values  $\omega_0, \omega_{max}$  are characteristics of the electrical motor. The value of  $\Delta\omega$  is 10 rd/s.  $\alpha_0, \alpha_{max}$  are fixed respectively at  $15^\circ$  and  $80^\circ$ , and  $\Delta\alpha$  is fixed to  $1^\circ$ . For the last case, we must add an extra parameter  $\Delta\omega\alpha$  which characterizes the variation of the angle for each rotational speed. The value of this parameter is given by the following formula:

$$\Delta\omega\alpha = (\alpha_{max} - \alpha_0) \left( \frac{\omega_{max} - \omega_0}{\Delta\omega} \right) \quad (7)$$

The values of  $\omega_0, \Delta\omega, \omega_{max}, \alpha_0, \Delta\alpha, \alpha_{max}$  used depend both on the particular function to be optimized and the neighborhood function used in the algorithm. Since there is no intuitive way of deciding what the values of  $\omega_0, \Delta\omega, \omega_{max}, \alpha_0, \Delta\alpha, \alpha_{max}$  should be. It is necessary to set the values to appropriate values automatically before commencing the CF algorithm run. For testing the five algorithms, we consider just the last case of variation schedules.

The five type of CF algorithm tested are:

1. Using the last case of variation schedules with the first case of ball insertion, and applying the random adjustment neighborhood function to generate the next state. This method is called: the poor centrifugal force search algorithm PCFSA, for the reason that one ball is used in each state, and a random adjustment neighborhood function is employed.
2. Using the last case of variation schedules with the fixed case of ball insertion, and applying the fixed radius adjustment neighborhood function to generate the next state. This method is called: the fixed centrifugal force search algorithm FCFSA.
3. Using the last case of variation schedules with the second case of ball insertion, and applying the random adjustment neighborhood function to generate the next state. This method is called: the random ten by ten search algorithm RTTSA.
4. Using the last case of variation schedules with the ten by ten insertion (case1). This method is called: the fixed ten by ten search algorithm FTTSA.

5. Using the last case of variation schedules with the ten by ten insertion (case2). This method is called: the fixed ten by ten search algorithm FT TSA2.

#### 4. Testing the algorithms

The ideal algorithm should be efficient and highly robust. To aid in this choice, seven mathematical test functions are used. Each function has its characteristic. Since the algorithms are presented for the first time, it is suitable to examine the robustness and efficiency of each one. For this reason, we have chosen seven functions for test, including the followings distinctive:

- The search space dimension of each function,
- The number of local minima for each function,
- The number of variables used to optimize (problem dimension),
- The number of global minima found for each state.

(1) *Rosenbrock's banana function:*

$$f(x_1, x_2) = 100(x_1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$$

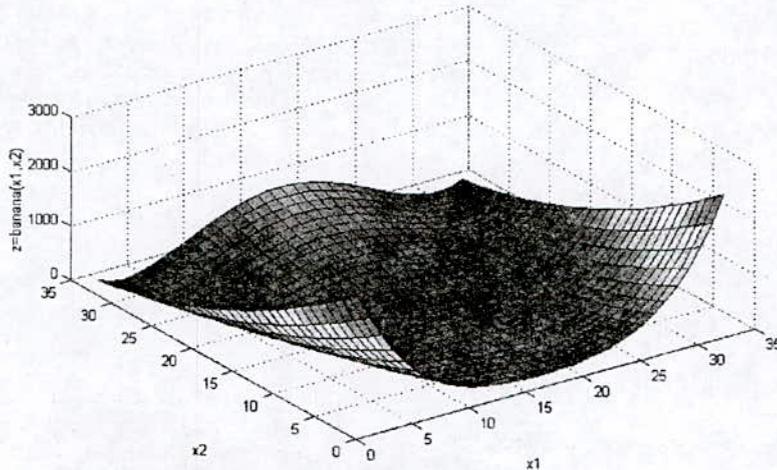


Figure 4: The Banana function

(2) *Hemmelblau's function*

$$f(x, y) = 100(x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

For the second function the variables  $x, y \in [-5, 5]$ . The function takes its minimum value of 0 at four points, given by the intersection of the two conic sections  $y = x^2 + 11$  and  $x = -y^2 + 7$ . The problematic of this function is how to find the four points in the same time.

This standard test function was designed specifically to be hard to optimize. It has only one minimum,  $x_{opt} = (1, 1)$ ,  $f(x_{opt}) = 0$ , located in a steep flat-bottomed parabolic valley (Fig). It is difficult to optimize by non-gradient methods because the direction must be changed continuously to travel around the valley, i.e. changes in the different parameter values are highly coupled. The generalization to higher dimensions is given below:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n f(x_{i-1}, x_i)$$

The global minimum of the generalized function is at  $x_{opt} = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $f(x_{opt}) = 0$ . The starting position used for all functions is given by two ways: (i) by choosing the opening point, for this case  $(2, 2, \dots, 2)$ , (ii) by introducing a point randomly. Each variable is bounded between -2 and 2. A five-dimensional version is used to test the algorithms. A result is said to be acceptable for this function if all of the variables are within 0.1 of the global minimum. A plot of the two-dimensional function is shown in Fig(4).

This difficult can be solved using the ten by ten insertion method.

The three variables Hemmelblau's function is also used to test the algorithms. This function has a global minimum of 0.3039 at point  $(-2.804, 3.072, 1.956)$ . A result is said to be acceptable for the two functions if all of the variables are within 0.1 of the global minimum and the functions are within 0.1 of the minimum.

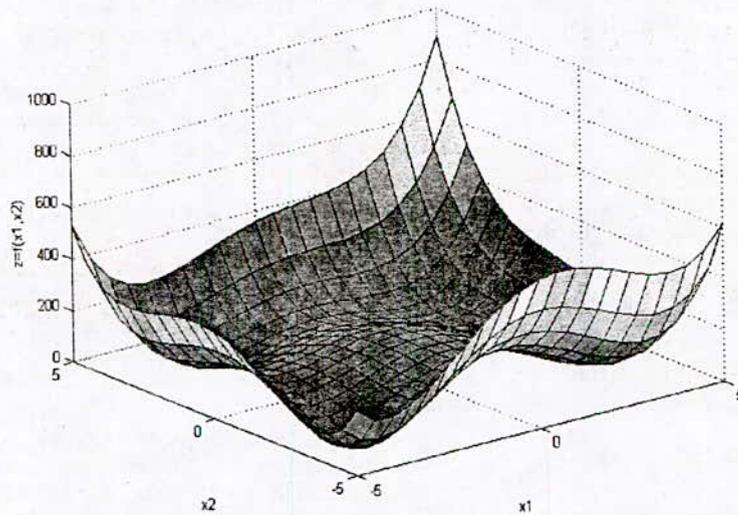


Figure 5: Hemmelblau's function

(3) The freudenstein-roth function:

$$f(x,y) = ((x-13) + ((5-y)y-2)y)^2 + ((x-29) + ((y+1)y-14)y)^2$$

Where,  $x, y \in [-10, 10]$ . The global minimum of 0 occurs at (5,4). This function is selected for test to study the

effect of the search space dimension on the convergence of each algorithm. In this case, we use a two dimension version of the function. A result is said to be tolerable for this function if all of the variables are within 0.05 of the global minimum.

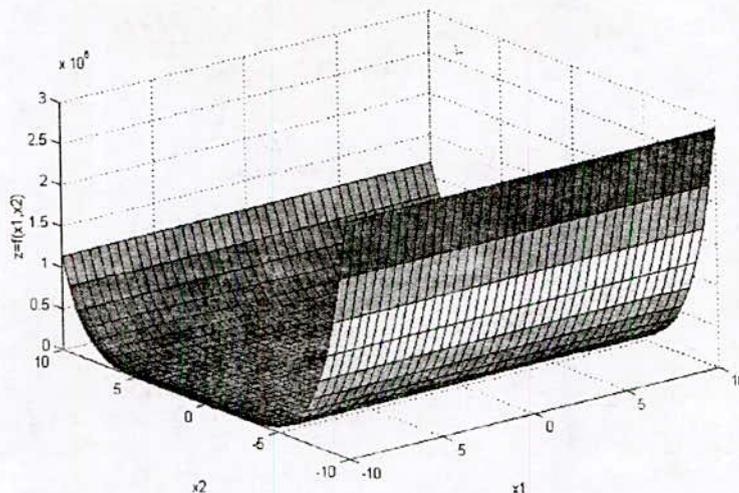


Figure 6: The Freudenstein-Roth function

(4) Griewank's function :

This function is given by the following equation:

$$f(x,y) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{d} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$$

Where  $x,y \in [-5,5]$ , with  $n = 2$  and  $d = 10$ . The global minimum of 0 occurs at (0,0). A five-dimensional version is used to test the algorithms. A result is said to be good enough if all of the variables are within 0.1 of the global minimum and the function is within 0.1 of the minimum.

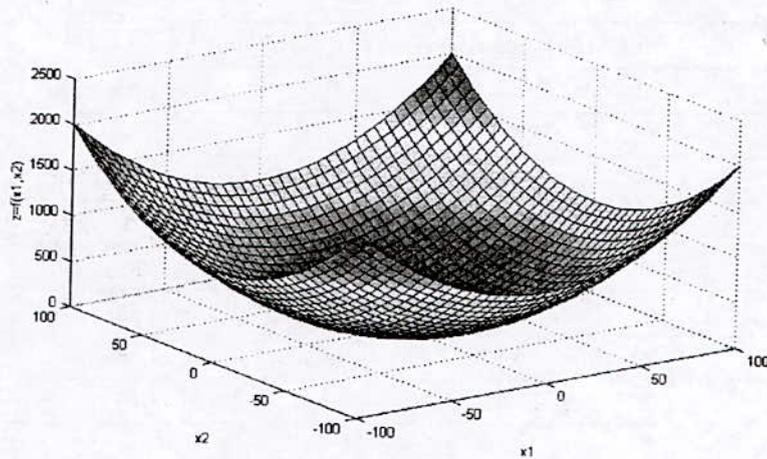


Figure 7 : The Griewank's function

(5) *Rastrigin's function:*

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) - \cos(18x) - \cos(18y),$$

Where  $x, y \in [-1, 1]$ . The global minimum of -2 occurs at (0,0). This function has a set of local minima; it becomes then hard to be optimized. To augment the difficulty of optimization, a five-dimensional version is used to test

the algorithms. For this function, the global minimum of -8 occurs at (0,0,0,0,0). A result is said to be satisfactory for the two functions if all of the variables are within 0.1 of the global minimum and the functions are within 0.1 of the minimum.

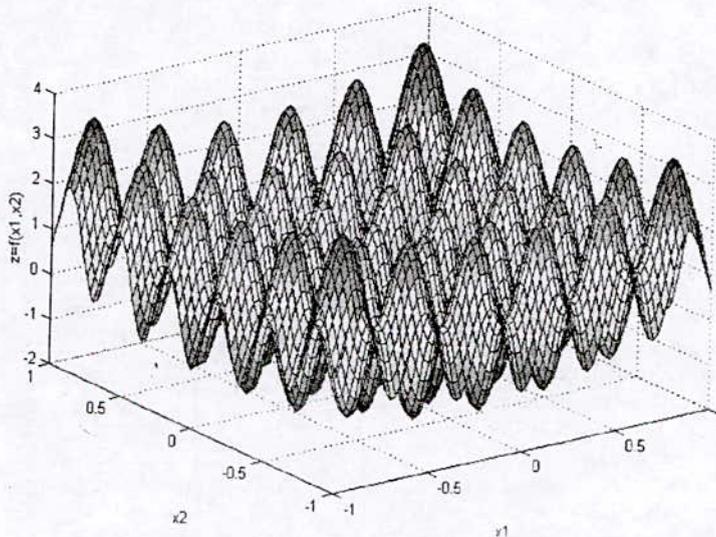


Figure 8 : Rastrigin's function

Table III: Comparison of the five optimization algorithms

Function	Number of successful results for each algorithm				
	Algorithm 1	Algorithm 2	Algorithm 3	Algorithm 4	Algorithm 5
Rosenbrock4	6	13	44	<b>52</b>	31
Himmelblau2	48	99	100 (28)	<b>100 (36)</b>	100 (20)
Himmelblau3	0	4	25	<b>30</b>	9
Freudenstein-Roth2	17	8	53	<b>68</b>	46
Griewank4	0	50	24	<b>50</b>	20
Rastrigin2	47	58	100	<b>100</b>	100
Rastrigin4	0	1	21	<b>55</b>	50

Table IV: Results of optimization of the objective function for the two algorithms

Mode	Target frequencies	Initial MAC	FTTSA1		Simulated annealing	
			frequencies	MAC	frequencies	MAC
1	7.60	0.938	7.58	1.000	7.01	1.1
2	21.0	0.926	20.8	1.004	18.0	0.9
3	46.4	1.057	46.5	1.001	40.2	1.15

Each algorithm is run 100 times on each function, for the following settings of the parameters of the mechanical machine:

$$\omega_0 = 10 \text{rd/s} \quad \Delta\omega = 10 \text{rd/s} \quad \omega_{\max} = 100 \text{rd/s} \quad \alpha_0 = 15^\circ \quad \alpha_{\max} = 80^\circ$$

The value of  $\Delta\alpha$  is given by the following equation:

$$\Delta\alpha = \Delta\omega\alpha / 100$$

$\Delta\omega\alpha$  is calculated from the equation (7).

It may be seen from table 3, that only the fourth algorithm, the fixed ten by ten search algorithm (FTTSA1), is capable of minimizing the seven test functions. This algorithm has two advantages: the first one that it blends the two neighborhood function; and the second advantage is the use of the ten by ten balls insertion, which increases the probability of convergence of the algorithm. This algorithm has another advantage compared to others; it can find more than one global minimum at a time (e.g. Himmelblau2). This distinctiveness favors more the application of the algorithm. The dimension of the search interval has effect on the convergence of the algorithms, but the FTTSA1 algorithm remains very robust and gives good results (Freudenstein-Roth2). For the others algorithms, we can remark that their results are very discordant; sometimes, there is convergence (good results) and sometimes, the results diverge. These remarks confirm the choice of the FTTSA1 algorithm. For the case of Griewank4, the second algorithm (FCFSA) converges and shrinks the search space very fast, this situation is valid just for concave functions which isn't the case for all functions.

### Application

To test the strength of the objective FTTSA1 presented below, we compare it to a version of simulated annealing algorithm to optimize a simple mechanical optimization problem.

Let consider the mechanical system presented by fig. 9.

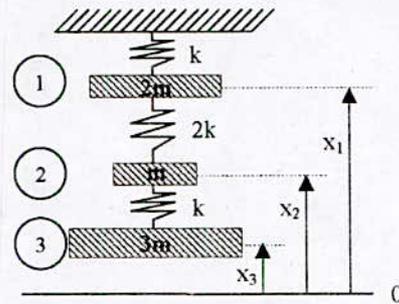


Figure 9: Mechanical system

The differential equation of the system can be formulated as follows:

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

The aim of the optimization problem is to find a model given by the stiffness and masse matrices (the

values of  $m$  and  $k$ ) which produce the experimental data (simulated natural frequencies and mode shapes). The simulated data are given in table IV.

The objective function to be optimized is given by the following equation:

$$\Psi = W_{\omega} J_{\omega} + W_{\phi} J_{\phi} \quad (9)$$

where  $J_{\omega}$  and  $J_{\phi}$  are cost functions related with natural frequency data and mode shape data respectively.  $W_{\omega}$  and  $W_{\phi}$  are weighting factor for each cost function respectively. Following the advice of Kwon and Lin [8], we take  $W_{\omega} = 10$ , and  $W_{\phi} = 1$ .  $J_{\omega}$  and  $J_{\phi}$  can be written as

$$J_{\omega} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\omega_k^m - \omega_k^a}{\omega_k^m} \right)^2 \quad \text{and}$$

$$J_{\phi} = \sum_{k=1}^n (MSF \cdot \phi_k^m - \phi_k^a)^T (MSF \cdot \phi_k^m - \phi_k^a) \quad (10a)$$

where  $\omega_k$  and  $\phi_k$  are natural frequency and mode shape vector, respectively, and superscripts  $m$ ;  $a$  and  $T$  represent measured data, analytical data and transpose of a vector, respectively.  $MSF$  is the modal scale factor, it is given by the following

$$MSF = \frac{(\phi_k^a)^T \phi_k^m}{(\phi_k^m)^T \phi_k^m} \quad (10b)$$

The modal assurance criterion (MAC) should be used in order to pair analytical data and experimental data properly; it is given by the following equation:

$$MAC = \frac{|(\phi_k^m)^T \phi_k^a|^2}{((\phi_k^m)^T \phi_k^m)((\phi_k^a)^T \phi_k^a)} \quad (11)$$

The MAC has its value between 0 and 1 according to the closeness between eigenvectors of analytical and experimental modes. If the modes pair in order, then the MAC matrix will have values close to 1 on the diagonal and close to 0 elsewhere.

In table IV, the presented results confirm the robustness of the FTSA1 algorithm to optimize physical optimization problem. The FTSA1 outperforms the simulated annealing algorithm, since the updated results obtained are more significant than those obtained by the second algorithm. The updated frequencies of the first algorithm are matched very well the target ones. The same thing can be said for the MAC values. In the other hand, the second algorithm improves the results but it remains less efficient than the first algorithm. Another remark concerns the time of execution is noted; the second algorithm requires 30 times of execution time than the first one, a thing which favors the usage of the first algorithm.

### Conclusion

A new stochastic search algorithm called the centrifugal force algorithm has been developed. The algorithm is applied to optimize seven hard mathematical

test functions and can be applied for all optimization problems. The five versions of the algorithm have shown a great disparity on the optimization of the seven functions. The FTSA1 has outperformed the other algorithms, and has given good results for all optimization functions. A simple mechanical optimization problem has been applied to test and compare the FTSA1 algorithm with a simulated annealing algorithm. The FTSA1 has outperformed the simulated annealing algorithm and has given good results in reduced time.

### References

- [1] M.I. Friswell, J. E. T. Penny and S. D. Garvey 'A combined genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures', *Computers & Structures, Volume 69, Issue 5, December 1998* Pages 547-556.
- [2] N. Touat and S. Rechak, 'Effet de la Fonction Objective sur la Convergence des Modèles d'Eléments Finis en utilisant les Algorithmes Génétiques', Congrès Français de la Mécanique CFM 2003, Nice, 1-5 septembre 2003.
- [3] R. I. Levin and N. A. J. Lieven, 'Dynamic Finite Element Model Updating using Simulated Annealing and Genetic Algorithms', *Mechanical systems and Signal Processing*, 1998, 12(1), 91-120.
- [4] Goldberg D. E., "Genetic algorithms", Addison-Wesley USA, 1991.
- [5] M. PYRZ, 'Evolutionary Algorithm Integrating Stress Heuristic for Truss Optimization', *Optimization and engineering*, 5, 45-57, 2004.
- [6] P. J. M. VAN LAARHOVEN and E. H. L. AARTS 1987. *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Dordrecht Kluwer Academic Publishers.
- [7] M. J. Appel, R. Labarre and D. Radulovic, 'On Accelerated Random Search', *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 14, No. 3, pp. 708-731.
- [8] K. S. Kwon, R. M. Lin, 'Robust Finite element model updating using Taguchi method', *Journal of Sound and Vibration*, In press.

## INFLUENCE DE LA TEMPERATURE SUR LES PARAMETRES DE FLUAGE D'UN MATERIAU COMPOSITE

A.KOUADRI-BOUDJELTHIA \*, A.BOUABDALLAH \*\*, A.GHOUL

\* Département de mécanique, Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur,  
Université Hassiba Ben Bouali BP151. CHLEF 02000

\*\* Faculté de Physique, Université des Sciences et Technologie Houari Boumediene. ALGER

### RESUME

Cette étude concerne l'effet de la température sur les paramètres de fluage d'un matériau composite en polyester insaturé renforcé de fibres de verre C orientées aléatoirement pour un renforcement multidirectionnel avec une masse surfacique de 450 g/m<sup>2</sup>.

Pour mieux illustrer la complexité du phénomène de fluage qui est dépendant de la température, de la charge, de la concentration en fibres, du taux de cristallinité (polymères thermoplastiques), nous avons à déterminer les paramètres essentiels grâce aux courbes expérimentales qui montrent réellement l'influence du fluage par la température et la charge en faisant varier ces celles-ci. Nous tentons, en particulier, de modéliser le comportement du fluage par une relation phénoménologique.

Ainsi des essais de fluage en traction ont été effectués sous différentes températures et charges pour plusieurs échantillons choisis et par conséquent on en a déduit les coefficients de la relation phénoménologique

Nos résultats ont été analysés et discutés à la lumière de quelques données disponibles  
Mots clés: matériaux composites, fluage, polyester, fibre de verre, matières plastiques.

### INTRODUCTION

Les matériaux nouveaux offrent de plus en plus de performances, et satisfont à un plus grand nombre de fonctions. En effet, les matériaux composites autorisent par excellence, le développement d'une approche fonctionnelle de la matière: Ils peuvent être formulés, organisés, dimensionnés, ou tout simplement conçus comme des réponses directes à des cahiers de charges exigeants, en particulier pour la région de Chlef (Nord-Ouest de l'Algérie), le matériau est soumis à un climat qui présente une variation importante de la température (Eté=47°C, Hiver = -5°C) et une hygrométrie élevée (80%)

D'une façon générale, les matrices polymères, renforcées de fibres de verre entrant dans la fabrication de plusieurs produits tels que les citernes de stockage d'eau ou autres produits chimiques, les pare-chocs pour automobiles, donnent lieu à des applications nombreuses pour lesquelles on recherche:

- des performances mécaniques élevées pour un faible poids
- des formes, un design difficilement accessible à l'aide de moyens classiques
- une bonne tenue, une durabilité élevée tant sous des sollicitations mécaniques que sous un environnement climatique sévère.

Notre hypothèse fondamentale, la relation phénoménologique:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + B\sigma^m t^k \quad (1)$$

est que l'approche déduite des essais effectués sur des matières plastiques (en particulier les matériaux composites), communément employés en construction mécanique caractérise bien le comportement en fluage du matériau que nous étudions.

## CONDITIONS D'ESSAI

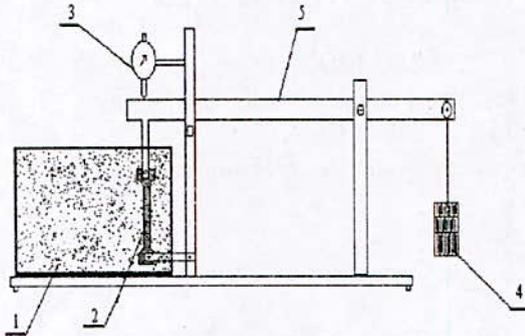


Figure 1. Schéma du dispositif d'essai.

1-Enceinte isothermique 2-Eprouvette 3-Comparateur 4-Masses 5-Bras du levier

Les essais ont été réalisés sur une machine de fluage en traction. Cet appareil est muni d'une enceinte isothermique et dans laquelle l'éprouvette flue sous différentes températures (25 à 60°C). Les allongements sont enregistrés par un comparateur au 1/100 mm près.

Pour chaque température ( 25°C, 30°C, 35°C, 40°C, 45°C, 50°C, et 55°C ), nous avons réalisé 3 essais sous 3 charges respectivement de 217,78N, 257,02N, et 296,26N.

Chaque éprouvette est placée dans l'enceinte isothermique assez de temps avant l'essai de fluage afin qu'il y ait homogénéisation de la température sur tout le volume de celle-ci.

Les éprouvettes en forme d'haltère (figure 2) ont été réalisées au laboratoire selon les normes britanniques BS (British Standard). Leurs dimensions en millimètres sont résumées dans le tableau 1.

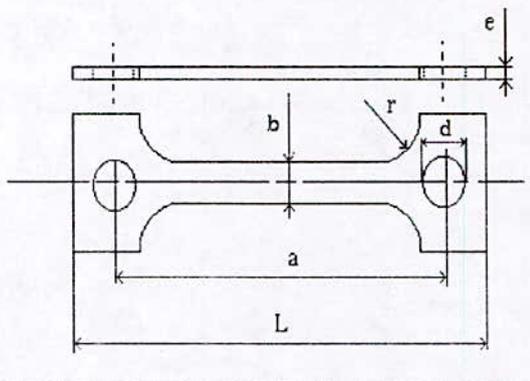


Figure 2. Epreuve

Tableau 1.  
Dimensions de l'éprouvette en mm

a	b	c	D	e	L	R
66	4.6 à 5.5	25	8	1.5 à 1.8	92	10

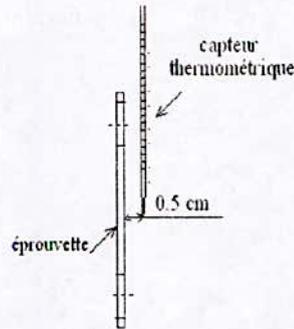


Figure 3. Dispositif de prise de température

La mesure de la température se fait à l'aide d'un capteur thermométrique de telle manière que le bulbe se trouve à mi-hauteur de l'échantillon et à environ 0,5 cm (fig.3). Ceci nous conduit à une erreur de 5% d'après les expériences préliminaires de prise de la température

La principale difficulté réside en l'apparition de microfissures pendant l'usinage des éprouvettes, ce qui a exigé l'usinage d'abord de la forme d'ébauche de l'éprouvette ensuite le ponçage avec du papier émeri à gros grains puis à grain fins afin d'éliminer les amorces de fissures éventuelles

## ANALYSE DES RESULTATS

Les résultats expérimentaux pour les trois charges sont groupés pour chaque température dans un même graphique (Fig. 4)

Dans l'intervalle de températures  $25^{\circ}\text{C} \leq \theta \leq 35^{\circ}\text{C}$ , on observe une modification remarquable de la loi d'évolution du fluage à chargement identique. Ainsi on note pour  $\theta = 35^{\circ}\text{C}$  et  $Q=296,26 \text{ N}$  l'apparition d'un seuil de transition suggérant un changement qualitatif de la loi de comportement  $\epsilon$ . Ce seuil se traduit par d'apparition du fluage tertiaire se situant à  $\theta= 35^{\circ}\text{C}$  (fig. 4b).

De même, on observe l'affinité ou similitude dans les courbes de la figure 4a, et qui se confirme avec l'apparition d'un décalage temporel (fig. 4c et 4d) lié au fluage tertiaire lui-même induit par l'influence du chargement  $Q$  croissant

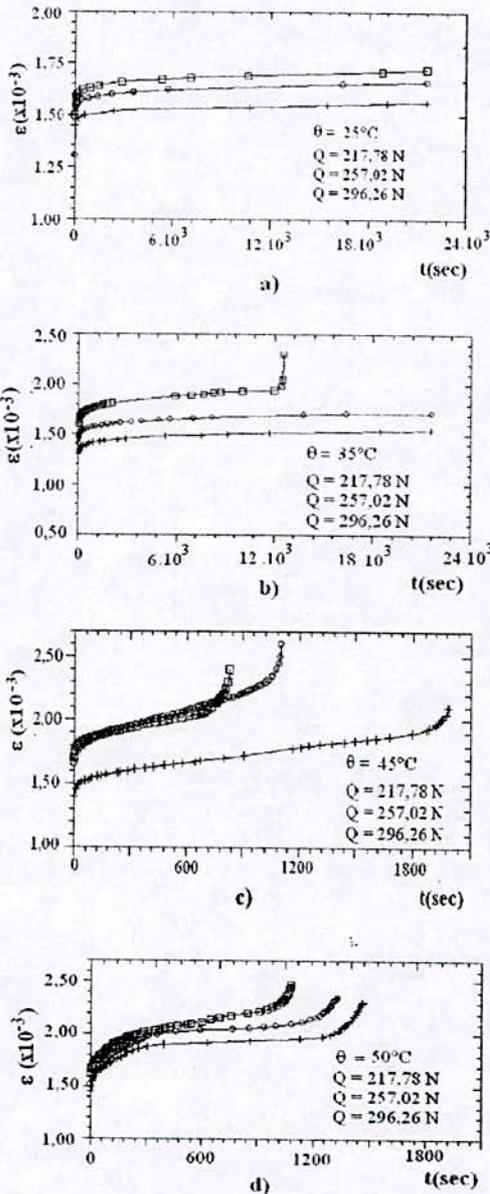


Fig. 4. a, b, c, d, Evolution du fluage  $\epsilon$  soumis à l'influence de la charge  $Q$  et de la température  $\theta$

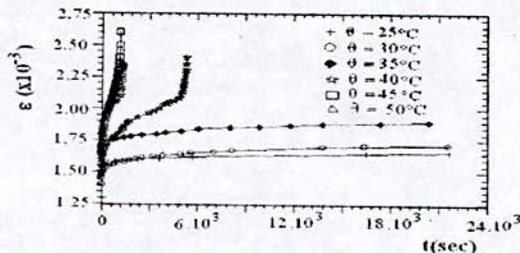


Fig. 5. Influence de la température  $\theta$  sur le fluage  $\epsilon$  sous une charge  $Q=217,78$  N

Etant donné le résultat précédent, ceci nous a conduit à analyser l'évolution du fluage  $\epsilon$  à chaque chargement constant  $Q$  soumis à l'influence de la température  $\theta$ .

La figure 5 met en évidence les deux évolutions constantes de  $\theta$  dans les deux domaines considérées  $\theta \leq 35^\circ\text{C}$  et  $40^\circ\text{C} \leq \theta \leq 60^\circ\text{C}$

Dans le 1<sup>er</sup> intervalle de températures, le fluage secondaire est largement dominant caractérisé par le palier quasi-constant dans l'intervalle de temps  $100\text{s} \leq t \leq 300\text{s}$ .

Par contre, le 2<sup>ème</sup> intervalle est caractérisé par un comportement à seuil de rupture à une évolution croissante et très rapide du fluage tertiaire en fonction du temps qui apparaît d'autant plus tôt que la température augmente.

Ainsi on évalue le seuil critique à  $t_c = 85\text{s}$  et une tendance à l'accélération suivi d'un comportement quasi-identique à  $t_c = 25\text{s}$ . très probablement ceci suggère une loi d'évolution du fluage à comportement unique pour  $\theta \geq 45^\circ\text{C}$ . on évalue en valeur moyenne  $\epsilon \approx 2,40$  mm aux incertitudes expérimentales près.

Le fluage tertiaire  $\Delta t$  s'accompagne d'un accroissement de la vitesse juste avant la rupture (Fig. 6). La principale raison est que le fluage dans cette étude se fait sous une charge de traction constante donc la diminution de la section droite fait augmenter la contrainte vraie qui elle même s'accompagne d'une augmentation de la vitesse de fluage.

Cette accélération du processus (accompagnée de l'apparition du fluage tertiaire) est plus remarquable à partir de  $40^\circ\text{C}$ , température à partir de laquelle tous les essais se terminent par des ruptures

Notons aussi que l'augmentation de la température des essais diminue la période de fluage secondaire et qu'à partir de  $45^\circ\text{C}$  cette période devient de plus en plus insignifiante (Fig. 5) et c'est aux alentours de cette température (que nous verrons plus loin) qu'apparaît la transition.

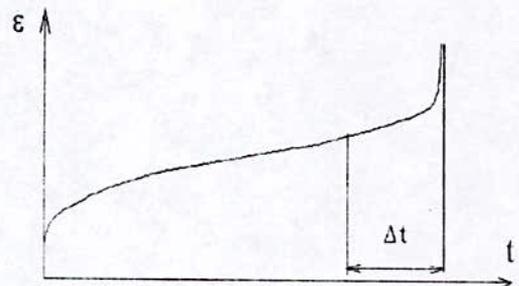


Fig. 6 Modèle d'apparition du fluage tertiaire  $\Delta t$

### DETERMINATION DE LA LOI COMPORTEMENT DU FLUAGE

Il s'agit d'établir la loi de comportement du fluage  $\varepsilon$  en fonction du temps  $t$  (s)

En se basant sur l'évolution proposé précédemment (1), on cherche à ajuster les paramètres phénoménologiques, à savoir  $B$  et  $k$  en fonction du temps  $t$  (s)

Si nous posons  $\varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon^* = B\sigma^m \cdot t^k$  entre deux points consécutifs 1 et 2 et pour une même charge, nous avons:

$$\varepsilon^*_1 = B\sigma^m \cdot t_1^k \quad (2)$$

$$\varepsilon^*_2 = B\sigma^m \cdot t_2^k \quad (3)$$

Du rapport (2) sur (3) nous avons :

$$\varepsilon^*_1 / \varepsilon^*_2 = (t_1 / t_2)^k \quad (4)$$

$$\text{d'où } k = [\text{Log}(\varepsilon^*_1 / \varepsilon^*_2)] / \text{Log}(t_1 / t_2) \quad (5)$$

$$k_i = [\text{Log}(\varepsilon^*_i / \varepsilon^*_{i+1})] / \text{Log}(t_i / t_{i+1}) \quad (6)$$

$$k_{\text{moy}} = \frac{1}{n} [\sum [\text{Log}(\varepsilon^*_i / \varepsilon^*_{i+1})] / \text{Log}(t_i / t_{i+1})] \quad (7)$$

Pour le calcul des paramètres  $m$  et  $B$ , nous utilisons la méthode des moindres carrés.

Un programme permet de calculer à partir des tableaux des valeurs expérimentales de fluage les paramètres  $k$ ,  $m$  et  $B$

Les variations des paramètres  $k$  et  $B$  en fonction de la température sont illustrées par les figures 7 et 8.

Les valeurs expérimentales du paramètre  $m$  varient faiblement par rapport à  $k$  et  $B$ , sa valeur moyenne étant 0.719

D'après les courbes expérimentales (Fig. 7 et 8), l'influence de la température sur l'évolution des paramètres de fluage  $k$  et  $B$  est perceptible. Ceci est normal vu que la température constitue un facteur important influant sur le comportement mécanique des structures en composite

La variation de  $k$  est illustrée par son évolution en moyenne. (Fig.7) en fonction de la température  $\theta$  qui révèle une modification de comportement autour de la valeur  $\theta = 47^\circ\text{C}$  coïncidant approximativement avec la température de seuil critique de rupture enregistré à  $\theta_c \approx 45^\circ\text{C}$  aux erreurs expérimentales près

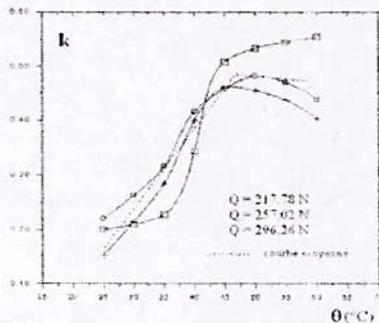


Fig. 7. Evolution du paramètre  $k$  en fonction de la température

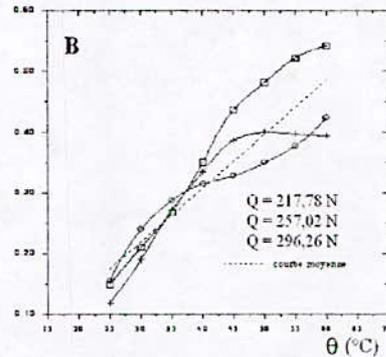


Fig. 8. Evolution du paramètre  $B$  en fonction de la température

Le paramètre  $B$  évolue de manière croissante en fonction de la température (Fig. 8) et son évolution moyenne est de la forme  $B = 0.00890 - 0.048$

L'examen des variations de  $k$  en fonction de la charge  $Q$  (Fig. 9) pour différentes températures  $\theta$  imposées dans la plage expérimentale balayée, montre globalement que l'ensemble des courbes se regroupent en deux tendances d'évolution, l'une, relativement concave pour  $25^\circ\text{C} \leq \theta \leq 40^\circ\text{C}$  et l'autre de nature convexe pour  $40^\circ\text{C} \leq \theta \leq 60^\circ\text{C}$ . La séparation entre ces deux tendances, courbe neutre, s'opère à partir de la courbe du milieu se situant autour de la valeur  $\theta_c \approx 42,5^\circ\text{C}$ , donc très proche de la valeur critique  $\theta_c = 45^\circ\text{C}$ , soit une imprécision  $r$  relative de l'ordre de 5%

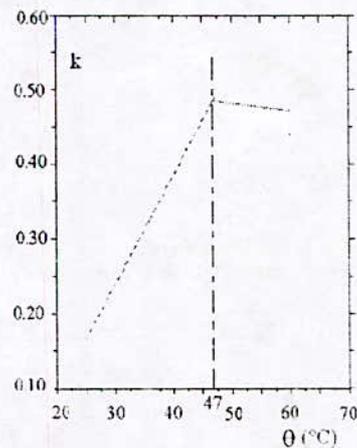


Fig. 9. Evolution moyenne du paramètre  $k$  en fonction de la température  $\theta$

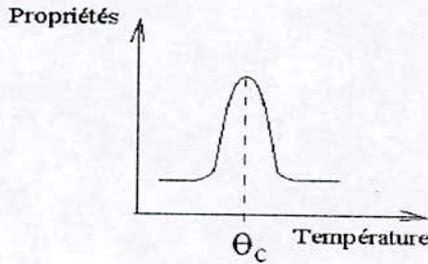


Fig. 10. Influence de la transition du 1<sup>er</sup> ordre sur les propriétés physiques d'un matériau donné

Ce changement brusque de tendance de  $k$  au voisinage de  $47^{\circ}\text{C}$  s'explique par la transition du premier ordre qui se manifeste par la rotation des groupes latéraux le long de la chaîne macromoléculaire des polymères. (Fig. 10)

Cette transition est favorisée par l'élévation de température et défavorisée par toutes sortes d'interactions comme la rigidité du squelette, l'encombrement des groupes latéraux, les liaisons covalentes ou secondaires entre ces groupements et les molécules voisines.

Par conséquent, on retrouve le comportement de la Fig 9, il semble donc que l'influence de cette transition se manifeste sur les propriétés physiques des matériaux composites qui varient plus ou moins au voisinage d'une transition vitreuse-caoutchoutique caractéristique des polymères à longues chaînes,

L'évolution moyenne de  $k$  est jusqu'à  $47^{\circ}\text{C}$   $k = 0.014640 - 0.2002$ , au delà de  $47^{\circ}\text{C}$  la valeur moyenne de  $k$  semble se stabiliser autour de  $0.478$  mais avec une faible inclinaison.

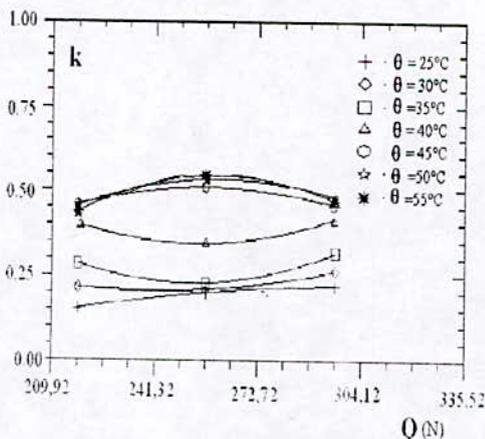


Fig. 11 Evolution du paramètre  $k$  en fonction de la charge  $Q$

## CONCLUSION :

La détermination des valeurs des paramètres de fluage à partir de nos observations expérimentales a permis de mettre en évidence une influence réelle de la température qui ont conduit à une formulation caractéristique de sa loi de comportement.

En particulier, nos essais ont révélé un meilleur comportement aux basses températures qui peut être étendu à des températures plus élevées mais avec des charges moins importantes. Ceci indique la nécessité bonne connaissance préalable de l'évolution du comportement du matériau dans un domaine précis d'utilisation.

Ceci suggère une étude technico-économique systématique sur les matériaux composites relevant des polyesters insaturés verre C multidirectionnels en jouant sur la masse surfacique des renforts en vue d'améliorer ses performances thermo-mécaniques.

## REFERENCES

- [01] A. GHOUL, A. BOUABDALLAH  
« La ténacité du polyuréthane. La température, la vitesse de sollicitation et la géométrie de l'éprouvette influencent les mesures ». Journal « La Technique Moderne », Tome LXXXVIII, N°6-7, pp 29-31, Ed La SIRPE (Paris), ISSN 0040-1250, France. 1996
- [02] A. GHOUL, A. BOUABDALLAH, A. KOUADRI-BOUDJELTHIA  
« Endommagement par fluage et vieillissement d'un matériau composite multidirectionnel Polyester-Fibre de verre » 5<sup>ème</sup> Journées de la matière condensée "SFP", 28-30 Août 1996 Orléans, FRANCE
- [03] D. VALENTIN. et I. GHORBAL. "The effect of resin flexibility on the creep behaviour filament-wound glass-reinforced resin pipes"- Fourth European Conference on Composite Materials-STUTT GART September 1990
- [04] J.P. TROTIGNON, J. VERDU, A. DOBRACZYNSKI, M. PIPERAUD  
" Matières plastiques: Structures, propriétés, mise en œuvre, normalisation". Eds NATHAN, Paris 1996

## GLOSSAIRE

$\epsilon$  = fluage en traction après un temps  $t$   
 $\epsilon_0$  = déformation instantanée.  
 $\sigma$  = contrainte appliquée sur l'éprouvette  
 $t$  = temps

# MODELISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES ULTRASONORES IMPULSIONNELLES DANS LES FLUIDES VISQUEUX

Oudina Assia (\*), Djelouah Hakim (\*\*),  
Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne  
B.P 32 , El Allia, 16111 Bab Ezzouar, Alger

(\*) Email : [hkourgli@yahoo.fr](mailto:hkourgli@yahoo.fr)  
(\*\*) Email : [djelouah\\_hakim@yahoo.fr](mailto:djelouah_hakim@yahoo.fr)

## RESUME

L'équation de propagation des ondes acoustiques dans les milieux fluides visqueux est résolue à l'aide de la transformation de Laplace qui permet d'exprimer la solution sous la forme d'un produit de convolution entre la pression à l'entrée du milieu de propagation et d'une fonction, appelée réponse impulsionnelle dont l'évaluation est réalisée par une intégration dans le plan complexe suivie d'une intégration numérique par une méthode de quadrature de Gauss. Les résultats des simulations mettent en évidence l'influence des différents paramètres : viscosité, distance de pénétration, fréquence de l'onde. Une validation expérimentale du modèle est réalisée à l'aide d'un dispositif ultrasonore large bande qui permet d'obtenir le coefficient de viscosité volumique à partir de la mesure du coefficient d'atténuation des ondes ultrasonores lors de leur propagation dans un milieu fluide (glycérine).

**Mots clés :** viscosité, atténuation, ultrasons.

## INTRODUCTION

La viscosité est une propriété des fluides qui peut avoir une grande importance dans de nombreux domaines de la science et de l'industrie. Elle peut être déterminée expérimentalement par des viscosimètres dits conventionnels ou par des méthodes ultrasonores. Les viscosimètres conventionnels incluent les viscosimètres à tube pour les faibles viscosités et les viscosimètres à rotation pour la mesure de viscosités plus élevées. Ces viscosimètres permettent la mesure du coefficient de viscosité de cisaillement. Les méthodes ultrasonores sont basées soit sur la détermination des caractéristiques de propagation (vitesse ou atténuation) soit sur la mesure du coefficient de réflexion [1].

La plupart des méthodes, aussi bien ultrasonores que conventionnelles, nécessitent l'utilisation d'un échantillon du fluide à caractériser. Pourtant dans de nombreuses situations, pour des raisons de sécurité entre autres, le liquide à caractériser et dans une enceinte close; dans ce cas les méthodes ultrasonores sont irremplaçables puisque les ondes ultrasonores peuvent être émises et reçues sur les faces extérieures des parois des enceintes ou des récipients [1].

Le développement de générateur ultrasonores émettant des impulsions de courte durée a permis d'améliorer sensiblement les performances des dispositifs ultrasonores. Lorsqu'une impulsion ultrasonore se propage dans un fluide visqueux la forme de l'onde se modifie en raison de l'atténuation et de la dispersion du milieu de propagation. A la traversée du milieu, l'onde transmise n'est pas une copie simplement retardée et atténuée de l'impulsion injectée à l'entrée.

Une modélisation du phénomène de propagation est nécessaire pour une interprétation convenable de la forme des impulsions qui seront utilisées pour la mesure de la viscosité. Les méthodes de prédiction les plus classiques du phénomène de propagation sont basées sur les modèles des systèmes linéaires dans lesquels le signal de sortie est la convolution du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle du système. La réponse impulsionnelle est obtenue par le calcul de la transformée de Fourier inverse de la réponse en fréquence, ou fonction transfert. Dans la plupart des cas, on considère que le milieu est faiblement dispersif et on suppose que la phase est une fonction linéaire de la fréquence [1]. Malheureusement la réponse de tels systèmes n'est pas causale [2]. Différentes techniques basées sur la méthode de Hilbert ou du calcul fractionnaire, ont été utilisées pour s'affranchir de cette approximation et développer des modèles théoriques respectant la causalité [1,3,4].

Dans le cas des milieux visqueux pour lesquels l'atténuation des ondes est proportionnelle au carré de la fréquence, des méthodes basées sur la transformation

de Laplace permettent le calcul de réponses impulsionnelles respectant la causalité [5].

Dans cet article, la transformation de Laplace est utilisée pour exprimer la solution sous la forme d'un produit de convolution entre la pression injectée à l'entrée du milieu de propagation et d'une fonction, dépendant du temps et de la position, que nous appelons réponse impulsionnelle du filtre de propagation. Le calcul de la réponse impulsionnelle est réalisé dans le plan complexe en utilisant les théorèmes des fonctions d'une variable complexe. Puis une méthode de quadrature de Gauss est utilisée pour l'évaluation numérique de cette réponse impulsionnelle. Les résultats des simulations numériques permettent de mettre en évidence l'influence des différents paramètres : viscosité du milieu, vitesse de propagation, distance de pénétration, fréquence de l'onde.

### FORMULATION ANALYTIQUE DE LA PROPAGATION

#### Equation de propagation

L'équation générale de la propagation d'une onde ultrasonore de pression dans un milieu visqueux est donnée par :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (1)$$

où  $p(x, t)$  est la pression acoustique.

$$\tau = \frac{\left( \eta_v + \frac{4}{3} \eta_s \right)}{\rho v_0^2} \text{ représente le temps de relaxation .}$$

$\eta_s$  et  $\eta_v$  représentent respectivement les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume.  $v_0$  est la vitesse de propagation.

On suppose que le milieu est initialement à l'équilibre et que à l'instant  $t=0$  il est soumis une surpression  $p(0, t) = f(t)$  en  $x=0$ . Dans ce cas les conditions aux limites sont:

- Conditions initiales :
  - $p(x, 0) = 0$
  - $\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0$
- Conditions aux frontières :
  - $p(0, t) = f(t)$
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = 0$

L'équation de propagation est résolue à l'aide de la transformée de Laplace qui permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle.

#### Résolution par transformation de Laplace

En tenant compte des conditions initiales homogènes, l'application de la transformée de Laplace à l'équation de propagation (1) donne:

$$\frac{\partial^2 P(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{v_0^2 (1 + \tau s)} P(x, s) = 0 \quad (2)$$

où  $P(x, s)$  est la transformée de Laplace de  $p(x, t)$ . Si l'on tient compte des conditions aux frontières, la solution doit tendre vers zéro lorsque  $x$  tend vers l'infini. Dans ces conditions, la solution de cette équation différentielle est :

$$P(x, s) = A \exp \frac{-sx}{v_0 \sqrt{1 + \tau s}} \quad (3)$$

$A$  est une constante d'intégration déterminée à partir des conditions aux frontières en  $x=0$ .

Si la pression exercée sur la face  $x=0$  est donnée par :

$$\begin{cases} p(0, t) = f(t) & \text{pour } t > 0 \\ p(0, t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (4)$$

La transformée de Laplace de  $p(0, t)$ ,  $P(0, s)$  est:

$$P(0, s) = F(s) \quad (5)$$

$F(s)$  étant la transformée de Laplace de  $f(t)$ .

L'équation (3) s'écrit alors:

$$P(x, s) = F(s) e^{\frac{-xs}{v_0 \sqrt{1 + \tau s}}} = F(s) H(x, s) \quad (6)$$

Dans l'expression (6), la fonction  $H(s)$  est définie par :

$$H(x, s) = e^{\frac{-xs}{v_0 \sqrt{1 + \tau s}}} \quad (7)$$

Le phénomène de propagation peut donc être considéré comme un filtre linéaire dont la fonction transfert est  $H(x, s)$ . La grandeur d'entrée de ce filtre est la pression  $p(x=0, t) = f(t)$  à la position  $x=0$ . La

grandeur de sortie est la pression  $p(x, t)$  à la position  $x$ .

Le calcul de la transformée inverse de Laplace, permet d'obtenir la fonction  $p(x, t)$  sous la forme d'un produit de convolution :

$$p(x, t) = f(t) \otimes h(x, t) \quad (8)$$

où  $f(t)$  est la pression en  $x=0$  ( $f(t) = p(0, t)$ ) tandis que  $h(x, t)$  est la transformée de Laplace inverse de  $H(x, s)$ , le symbole  $\otimes$  représente la convolution dans le domaine temps.

Pour utiliser la terminologie couramment utilisée dans l'étude des systèmes linéaires,  $h(x, t)$  est appelée la réponse impulsionnelle du filtre de propagation. Elle correspond à la pression mesurée à la position  $x$  et à l'instant  $t$  lorsque la pression appliquée à la position  $x=0$  est une impulsion définie par la fonction de Dirac  $p(0, t) = \delta(t)$ .

$h(x, t)$  est définie par :

$$h(x, t) = TL^{-1} \{H(x, s)\} \quad (9)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(x, s) e^{st} ds \quad (9')$$

L'intégrale est calculée dans le plan complexe sur le contour de Bromwich. En tenant compte de l'expression de  $H(x, s)$ , on obtient :

$$h(x, t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st - \frac{xs}{v_0 \sqrt{1+\tau s}}} ds \quad (10)$$

Le calcul de l'intégrale (10) est à effectuer le long de la droite  $s=c$  dans le plan complexe. Le nombre réel  $c$  est choisi de telle façon que  $c$  soit à droite de toutes les singularités (pôles, points de branchements, ou singularités essentielles)  $s=c+jy$  où  $y$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

La recherche des singularités montre que le noyau de l'intégrale (10) présente un point de branchement pour :

$$s = -\frac{1}{\tau} \quad (11)$$

Pour effectuer le calcul de l'équation (10), on procède aux changements de variable suivants :

$$p = \frac{1}{\tau} + s \quad (12)$$

$$k = \frac{x}{v_0 \sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad m = \frac{x}{v_0 \tau^{3/2}} \quad (13)$$

En introduisant les fonctions suivantes :

$$H_1(p) = e^{-k\sqrt{p}} \quad (14)$$

$$H_2(p) = e^{-\frac{m}{\sqrt{p}}}$$

L'équation (10) s'écrit :

$$h(x, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} TL^{-1} \{H_1(p) H_2(p)\} \quad (15)$$

En tenant compte du théorème de la convolution, on obtient :

$$h(x, t) = e^{-\frac{t}{\tau}} h_1(x, t) \otimes h_2(x, t) \quad (16)$$

$h_1(x, t)$  et  $h_2(x, t)$  sont respectivement les transformées de Laplace inverses de  $H_1(p)$  et de  $H_2(p)$ .

$h_1(x, t)$ , la transformée inverse de  $H_1(p)$ , est tabulée dans le livre de Abramowitch (page 1026, Eq. 29.3.8) :

$$h_1(x, t) = TL^{-1} \left\{ e^{-k\sqrt{p}} \right\} = \frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \quad (17)$$

$$= \frac{x}{2v_0 \sqrt{\tau \pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4v_0^2 \tau t}}$$

L'intégrale permettant le calcul de  $h_2(x, t)$  ne possède pas de primitive et nécessite une intégration dans le plan complexe pour être mise sous une forme qui peut être évaluée numériquement.

$$h_2(x, t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\frac{m}{\sqrt{p}}} e^{pt} dp \quad (18)$$

L'intégrande de (18) possède un pôle en  $p=0$ ;  $\gamma$  doit donc être un nombre réel positif. L'évaluation de cette intégrale, est faite en considérant un contour de Bromwich.

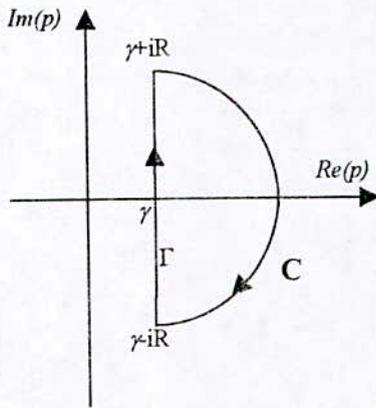


Figure 1 : Contour de Bromwich pour  $t \leq 0$

Pour  $t \leq 0$ , le contour de Bromwich est le contour fermé  $C$  constitué des segments de droite  $\Gamma$ , et du demi cercle  $C_1$  de centre  $(\gamma, 0)$  et de rayon  $R$ . (Figure1)  
On note que le contour d'intégration ne contient aucun pôle. En vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale sur le contour fermé  $C$  est nulle, d'où :

$$\int_{\Gamma} = - \int_{C_1} \quad (19)$$

D'après le Lemme de Jordan, l'intégrale sur le demi-cercle  $C_1$  s'annule lorsque le rayon  $R$  tend vers l'infini. D'où :

$$h_2(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} = 0 \text{ pour } t \leq 0 \quad (20)$$

Pour  $t \geq 0$ , le contour de Bromwich est le contour fermé  $C$  constitué des segments de droite  $\Gamma$ ,  $C_1$  et  $C_7$ , des arcs de cercles  $C_2$  et  $C_6$  de rayon  $R$  centrés à l'origine, d'un arc de cercle  $C_4$  de rayon 1 et des segments de droite  $C_3$  et  $C_5$  (Figure2). La demi-droite définie par  $\text{Re}(p) \leq 0$  constitue une coupure.

On note que le contour d'intégration ne contient aucun pôle. En vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale sur le contour fermé est nulle, d'où :

$$\int_{\Gamma} = - \int_{C_1} - \int_{C_2} - \int_{C_3} - \int_{C_4} - \int_{C_5} - \int_{C_6} - \int_{C_7} \quad (21)$$

On peut montrer aisément que les intégrales sur les segments  $C_1$  et  $C_7$  s'annulent lorsque  $R$  tend vers l'infini. De même, d'après le Lemme de Jordan, les intégrales sur les arcs de cercle  $C_2$  et  $C_6$  s'annulent lorsque le rayon  $R$  tend vers l'infini. D'où

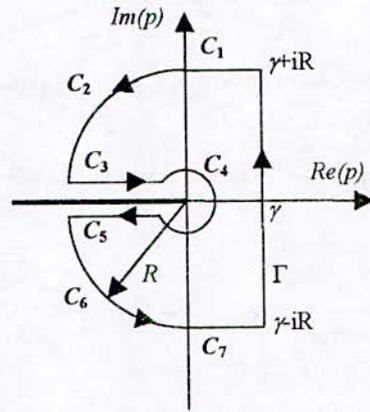


Figure 2 : Contour de Bromwich pour  $t \geq 0$

$$h_2(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma}$$

$$h_2(x, t) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_5} \right] \quad (22)$$

Calcul de l'intégrale  $I_3$  sur le segment  $C_3$

$$I_3(x, t) = \int_{-\infty}^{-1} e^{\sqrt{p}} e^{pt} dp \quad (23)$$

Sur le contour  $C_3$ ,  $p$  peut s'écrire  $p = -r = e^{i\pi}$ , où  $r$  est un nombre réel positif. D'où l'expression de  $I_3$  :

$$I_3(x, t) = \int_{+1}^{+\infty} e^{\frac{i m}{\sqrt{r}}} e^{-rt} dr \quad (24)$$

Calcul de l'intégrale  $I_5$  sur le segment  $C_5$ .

$$I_5(x, t) = \int_{-1}^{-\infty} e^{\sqrt{p}} e^{pt} dp \quad (25)$$

Sur le contour  $C_5$ ,  $p$  peut s'écrire  $p = -r = e^{-i\pi}$ , où  $r$  est un nombre réel positif. D'où l'expression de  $I_5$

$$I_5(x, t) = \int_{+1}^{+\infty} e^{\frac{i m}{\sqrt{r}}} e^{-rt} dr \quad (26)$$

Calcul de l'intégrale sur les segments  $C_3$  et  $C_5$ .

On en déduit la somme des intégrales sur les segments  $C_3$  et  $C_5$  :

$$I_3 + I_5 = -2i \int_{+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{m}{\sqrt{r}}\right) e^{-rt} dr \quad (27)$$

Calcul de l'intégrale  $I_4$  sur l'arc de cercle  $C_4$

Sur le contour  $C_4$ ,  $p$  peut s'écrire  $p = e^{-i\theta}$ . D'où l'expression de  $I_4$ :

$$I_4(x, t) = \int_{+\pi}^{-\pi} e^{m \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + t \cos(\theta)} \times e^{i\left(t \sin(\theta) - m \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta\right)} d\theta \quad (28)$$

Sachant que l'intégrande est une fonction impaire de  $\theta$ , on obtient :

$$I_4(x, t) = -2i \int_0^{\pi} e^{m \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + t \cos(\theta)} \times \cos\left(t \sin(\theta) - m \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta\right) d\theta \quad (29)$$

On obtient finalement pour  $h_2(x, t)$ :

$$h_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{m}{\sqrt{r}}\right) e^{-rt} dr + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{m \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + t \cos(\theta)} \times \cos\left(t \sin(\theta) - m \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \theta\right) d\theta \quad (30)$$

La réponse impulsionnelle peut alors être calculée à l'aide de l'équation (8).

### SIMULATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION

#### Calcul numérique de la réponse impulsionnelle

Les intégrales apparaissant dans l'équation (29) sont évaluées numériquement à l'aide de la méthode de quadrature de Gauss. Néanmoins l'intégrale de 1 à  $+\infty$  doit être mise sous une forme adaptée au calcul numérique. Cela peut être obtenu en opérant le changement de variable suivant :

$$r = \frac{1}{\sin \varphi} \quad \text{d'où} \quad dr = \frac{-\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi \quad (31)$$

Et

$$\int_{+1}^{+\infty} \sin\left(\frac{m}{\sqrt{r}}\right) e^{-rt} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{v_0 \sqrt{\tau^3}} \sqrt{\sin \varphi}\right) e^{-\frac{t}{\sin \varphi}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi \quad (32)$$

#### Simulation numérique de la propagation

Pour représenter la pression injectée à l'entrée du système, on utilise une sinusoïde amortie de la forme:

$$p(0, t) = f(t) = e^{-\delta t} \sin(2\pi f t) \quad (33)$$

Cette forme d'onde représente assez convenablement la forme des impulsions délivrées par les générateurs ultrasonores. Le facteur d'amortissement  $\delta$  permet de contrôler la largeur de la bande de fréquence de l'impulsion d'entrée autour de la fréquence nominale  $f$  qui est de l'ordre de quelques mégahertz pour les applications courantes.

La figure 3 représente les différentes fonctions modélisant le processus de propagation : impulsion à l'entrée, réponse impulsionnelle et impulsion de sortie. La représentation des spectres respectifs de chacune de ces fonctions permet de mettre en évidence l'influence de la propagation sur les composantes fréquentielles de l'impulsion ultrasonore. A la traversée du milieu de propagation l'impulsion ultrasonore subit un retard résultant de la valeur finie de la vitesse de propagation. L'effet de l'atténuation se manifeste par la diminution d'amplitude de l'impulsion mais également par un décalage du spectre vers les basses fréquences. Ce décalage apparent résulte de la diminution d'amplitude car l'atténuation augmente avec la fréquence. Pour ces raisons, la propagation en milieu visqueux peut être modélisée par un filtre progressif dépendant de la position.

On note également la présence d'un précurseur tel que cela a été mentionné par différents auteurs [2-6]. La présence de ce précurseur apparaît sous la forme de l'étalement du début de l'impulsion qui, en l'absence de viscosité, arriverait au point au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t = x/c_L$ .

Les figures 4 à 6 représentent l'influence des différents paramètres : distance (Fig.4), fréquence (Fig.5), temps de relaxation (fig.6).

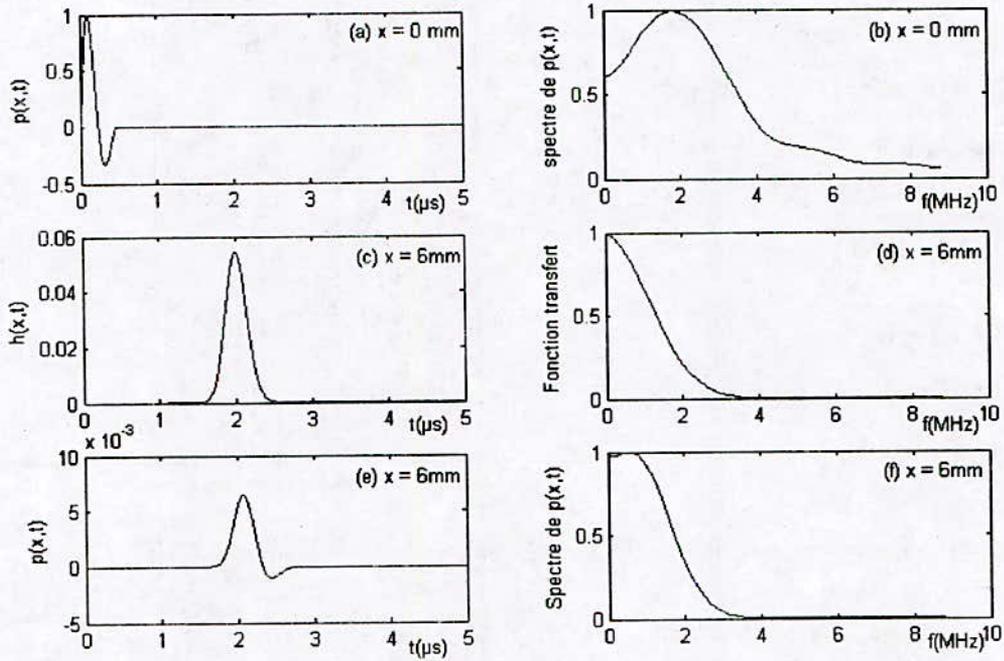


Figure 3 : Représentation graphique de l'impulsion d'entrée (Fréquence  $f = 2.25$  MHz), de la réponse impulsionnelle, de l'impulsion de sortie en  $x=6$ mm et des spectres respectifs,  $\tau=0.005$ s.

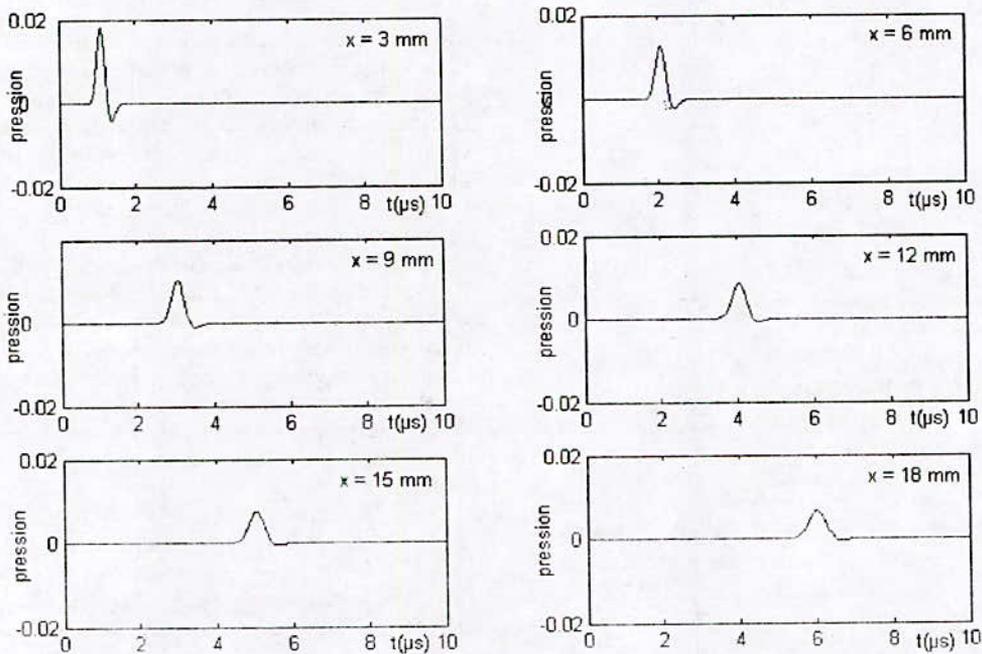


Figure 4 : Représentation graphique de l'impulsion de sortie pour différentes distances pour une fréquence de l'onde  $f=2.25$  MHz et pour  $\tau=0.005$ s.

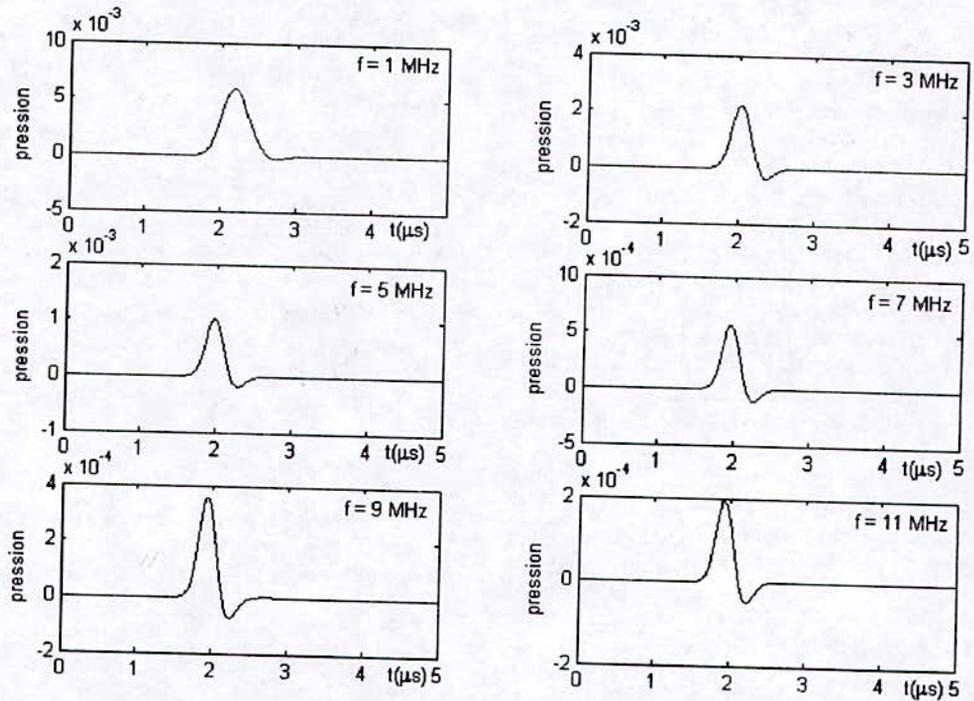


Figure 5 : Représentation graphique de l'impulsion de sortie en  $x=6mm$  pour différentes fréquences de l'impulsion d'entrée, avec  $\tau=0.005s$ .

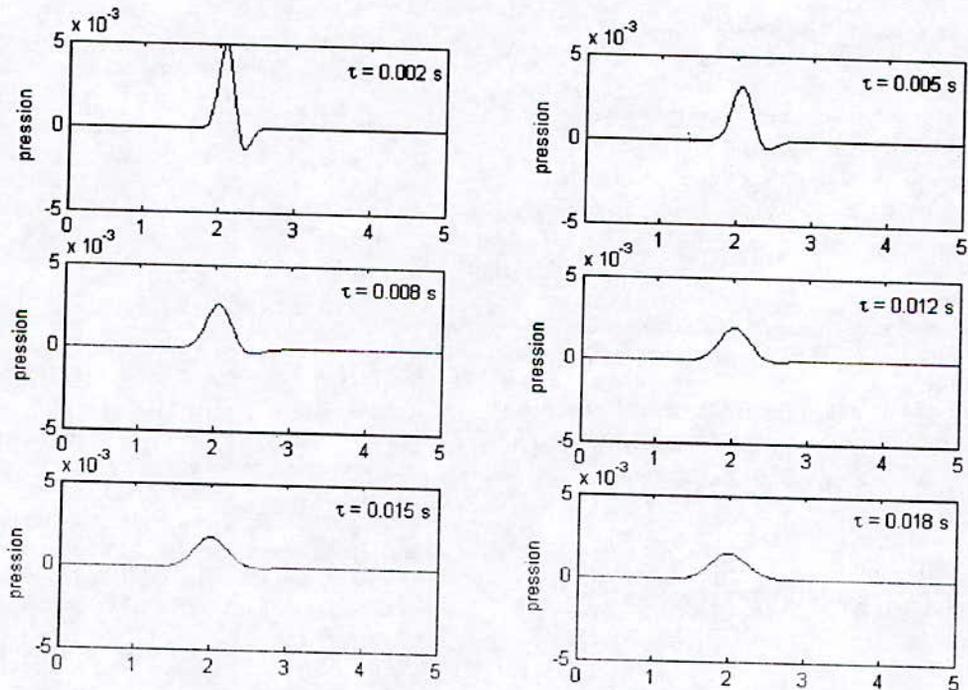


Figure 6 : Représentation graphique de l'impulsion de sortie pour  $x=6mm$ ,  $f=2.25MHz$  et pour différentes valeurs du temps de relaxation  $\tau$ .

## VALIDATION EXPERIMENTALE

### Description du dispositif expérimental

Le modèle théorique développé ci-dessus a fait l'objet d'une validation expérimentale à l'aide d'un dispositif constitué d'un émetteur récepteur d'onde ultrasonore dont le générateur fournit des impulsions de très courte durée ( $<1\mu s$ ) et d'amplitude supérieure à 200V. Ces impulsions servent à l'excitation d'un transducteur ultrasonore large bande de fréquence nominale égale à 2.25MHz. Après propagation dans le milieu fluide (glycérine), l'onde ultrasonore est réfléchiée sur un réflecteur plan en Dural dont l'impédance est très grande devant celle du milieu fluide. L'onde réfléchiée est détectée par le même transducteur fonctionnant en récepteur. Les ondes détectées sont amplifiées par un amplificateur large bande ( $>35MHz$ ) puis visualisées sur un oscilloscope numérique qui effectue l'échantillonnage des signaux reçus avant de les transférer vers un micro-ordinateur pour sauvegarde et traitement. L'alignement du transducteur et du réflecteur est obtenu grâce à un dispositif mécanique de précision. Enfin comme la viscosité du fluide augmente lorsque la température diminue, il est possible pour une position donnée du réflecteur d'obtenir différentes viscosités, donc différents temps de relaxation, en faisant varier la température

### Principe de la méthode de mesure de la viscosité

Les dispositifs classiques de mesure de viscosité ne permettent de déterminer que le coefficient de viscosité de cisaillement  $\eta_s$ . L'association à une méthode ultrasonore permet d'obtenir le coefficient de viscosité de volume  $\eta_v$ . Les méthodes ultrasonores de mesure de la viscosité reposent essentiellement sur une détermination de l'atténuation des ondes lors de leur propagation.

Dans le domaine du mégahertz, l'atténuation des ondes ultrasonores dans les fluides résulte essentiellement de la viscosité.

Dans le cas d'un milieu fluide visqueux, l'atténuation est proportionnelle au carré de la fréquence selon [7]:

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{\rho v_0^3} \left( \frac{4}{3} \eta_s + \eta_v \right) f^2 \quad (34)$$

On définit le coefficient d'atténuation  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{2\pi^2}{\rho v_0^3} \left( \frac{4}{3} \eta_s + \eta_v \right) \quad (35)$$

$\alpha_0$  est fonction des viscosités de cisaillement  $\eta_s$  et volumique  $\eta_v$  et dépend de la masse volumique  $\rho$  et de la vitesse de propagation  $v_0$  des ondes ultrasonores dans ce fluide.

Après une mesure de la masse volumique et de la vitesse de propagation, l'étude de l'atténuation des ondes ultrasonores en fonction de la fréquence permet d'obtenir le coefficient  $\alpha_0$  et d'en déduire un coefficient exprimé en fonction des deux coefficients de viscosité  $\eta_s$  et  $\eta_v$ . Une mesure du coefficient  $\eta_s$  ayant été obtenue à l'aide d'un dispositif classique de mesure de viscosité (Méthode de Couette), on peut alors déterminer la valeur du coefficient de viscosité volumique  $\eta_v$ .

### Résultats expérimentaux

Les figures 7-8 représentent les signaux et les spectres correspondants, obtenus à deux distances différentes  $x_1=5.5$  mm et  $x_2=10.5$ mm pour des températures différentes. On constate les effets prédits par le modèle théorique: (1) Diminution de amplitude lorsque la distance de propagation augmente et lorsque la viscosité augmente en raison de la diminution de température, (2) Elargissement du spectre vers les basses fréquences en raison de l'effet de filtrage passe-bas.

### Procédure expérimentale pour la mesure de l'atténuation des ondes ultrasonores:

Les signaux obtenus, à une température  $T$  donnée et pour deux positions,  $x_1$  et  $x_2$  du réflecteur, permettent de déterminer l'atténuation, grâce à la méthode de division des spectres, donnée par la relation:

$$\alpha(f) = \frac{1}{2(x_2 - x_1)} \ln \left( \frac{S_1(f)}{S_2(f)} \right) \quad (36)$$

$S_1(f)$  et  $S_2(f)$ , représentent les modules de la transformée de Fourier du signal ultrasonore détecté pour des distances transducteur-réflecteur respectivement égales à  $x_1$  et  $x_2$ .

La variation de l'atténuation en fonction de la fréquence, est représentée sur la figure 9. On constate que l'atténuation croit en fonction du carré de la fréquence suivant la loi quadratique donnée par (34). Pour  $T=20^\circ C$ , le paramètre d'atténuation  $\alpha_0$  est estimé à  $0.0038 \text{ mm}^{-1} \text{ Mhz}^{-2}$ , la vitesse  $v_0 = 1918 \text{ m/s}$ , la masse volumique  $\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$  et la viscosité de cisaillement à  $\eta_s = 1 \text{ Pa.s}$ . On en déduit la viscosité volumique  $\eta_v = 330 \text{ Pa.s}$

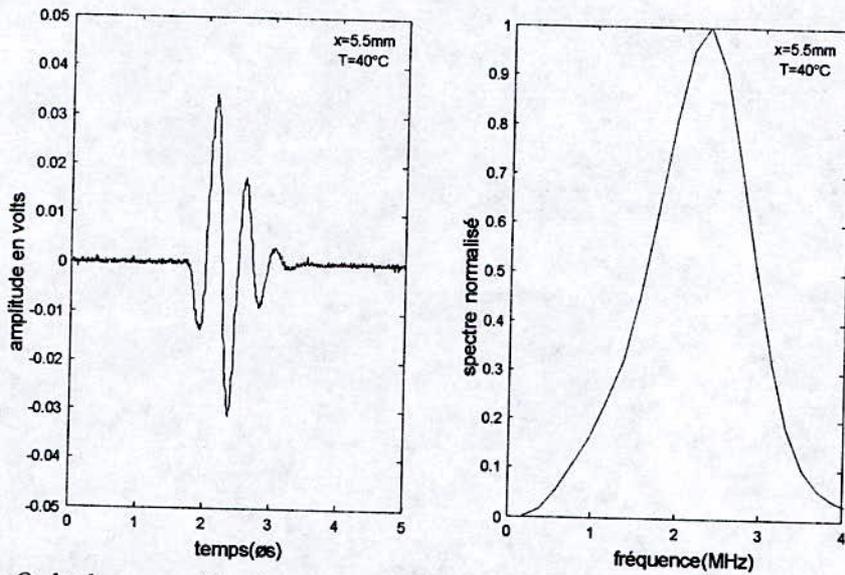


Figure 7 : Onde ultrasonore détectée pour un réflecteur situé à  $x=5.5\text{mm}$  et pour une température  $T=40^\circ\text{C}$ .

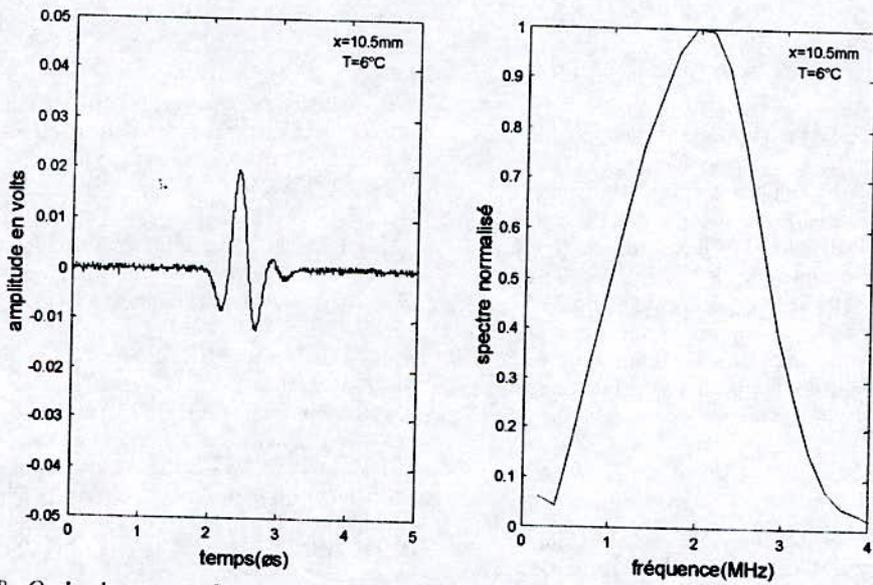


Figure 8 : Onde ultrasonore détectée pour un réflecteur situé à  $x=10.5\text{mm}$  et pour une température  $T=6^\circ\text{C}$ .

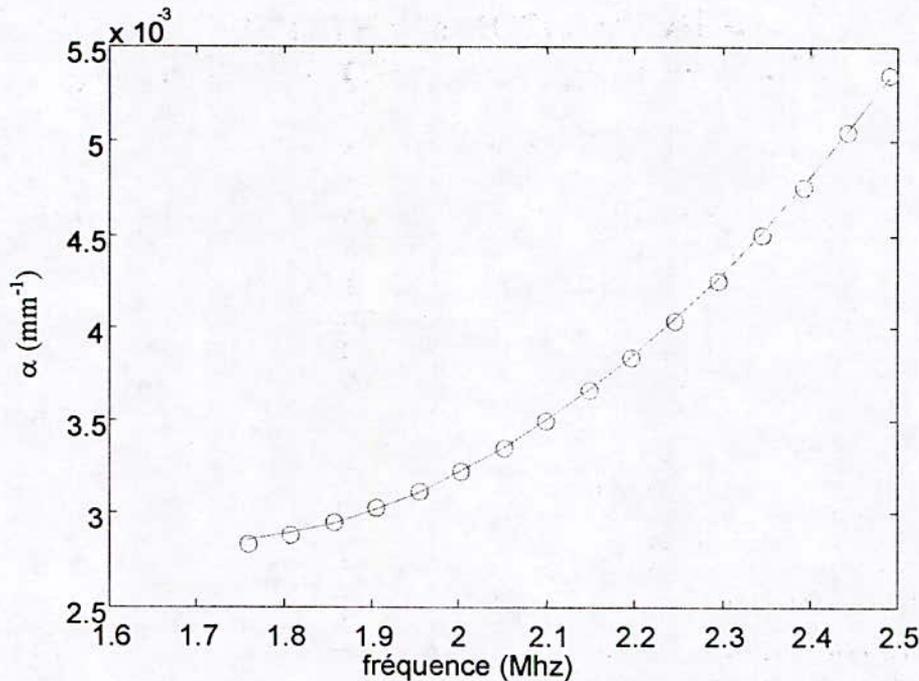


Figure 9 : Variation de l'atténuation en fonction de la fréquence et interpolation quadratique.

## Conclusion

La modélisation de l'équation de propagation dans un fluide visqueux par la transformée de Laplace permet de mettre en évidence les phénomènes d'absorption en développant un modèle qui respecte la causalité et qui offre la possibilité d'étudier l'influence de chacun des paramètres caractéristiques de la propagation dans un fluide visqueux. L'étude expérimentale basée sur l'utilisation d'un banc de mesure à ultrasons large bande a permis de montrer l'intérêt d'une telle étude dont l'une des principales applications est la mesure du coefficient de viscosité volumique.

## REFERENCES

- [1]. T.G. Hertz, S.O. Dyming, K.L. Lindström, H. Persson, "Viscosity measurement of an enclosed liquid using ultrasound", Rev. Sci. Instrum. 62(2), February 1991, pp.457-462.
- [2]. T.L.Szabo, "Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law", J. Acoust. Soc. Amer., Vol 79, No 1, p 14-24, 1995.
- [3]. D.T.Blackstock, "Transient solution for sound radiated into a viscous fluid", J. Acoust. Soc. Amer., Vol 41, No 5, p 124-130, 1969.
- [4]. Ping He, "Experimental verification of models for determining dispersion from attenuation", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., vol.46, n°3, May 1999, pp.706-714.
- [5]. T.L. Szabo, "Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law", J. Acoust. Soc. Am. 97(1), January 1995, pp.14-24.
- [6]. M.B. Moffeti, R.T. Beyer, "Transient effects in the propagation of a sound pulse in a viscous fluid", J. Acoust. Soc. Am. 47(5), 1970, pp.1241-1251.
- [7]. R. Ludwig, P.L. Levin, "Analytical and numerical treatment of pulsed wave propagation into a viscous fluid", IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., vol.42, n°4, May 1995, pp.789-792.
- [8]. L. Kinsler, "Fundamentals of acoustics", Fourth edition, J. Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [9]. M. Abramowitz, I.A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", Dover Publications, Inc New York(1978).

# MODELISATION D'UN CONTACT THERMOHYDRODYNAMIQUE LUBRIFIER

N. Tala-ighil \*, A. Bounif \*\*

\* Laboratoire de Caractérisation et d'Instrumentation (LCI)  
Centre de Recherche Scientifique et Technique en Soudage et Contrôle (CSC)  
Route de Dely Ibrahîm BP 64, Cheraga, Alger, Algérie  
[talaighiln@yahoo.fr](mailto:talaighiln@yahoo.fr)

\*\* Institut de Génie Mécanique  
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran  
BP 1505, EL M'naouar, Oran, Algérie

## I. RESUME

L'objet du présent papier est l'étude du comportement en régime d'écoulement laminaire, d'un palier lisse de longueur finie, sous charge stationnaire. Un bilan thermique global du contact arbre-coussinet est effectué. Le problème direct et indirect en lubrification a été traité.

Un code informatique est élaboré permettant le calcul et la visualisation des paramètres importants d'un contact thermo-hydrodynamique. Les résultats obtenus pour un palier de longueur finie sont comparés à ceux obtenus en utilisant la théorie du palier court.

**Mots-clés:** Paliers lisses, lubrification thermo-hydrodynamique, régime stationnaire, film mince.

## II. INTRODUCTION

Parce que le contact arbre-coussinet joue un rôle important dans la détérioration des paliers, une meilleure connaissance du comportement du film lubrifiant intercalaire est primordiale. L'étude consiste à déterminer l'effet des différents paramètres (la zone de rupture du film lubrifiant, le rapport  $L/D$ , l'excentricité relative, le chargement, la température moyenne du film lubrifiant,...) sur les performances du palier. La portance au niveau du contact est générée par le mouvement relatif des deux surfaces en contact (contact hydrodynamique). L'analyse de ce type de contact s'effectue à partir des équations permettant de prédire le comportement du mécanisme. Ces équations sont:

- L'équation de l'hydrodynamique des films minces visqueux, sous sa forme générale, permet de prendre en compte tous les phénomènes de portances rencontrés en lubrification ;
- L'équation définissant la géométrie du contact ;
- Les conditions aux limites sur la pression ;
- Les équations définissant les différents paramètres du contact.

## III. FORMULATION DU PROBLEME

Si les axes du coussinet et de l'arbre ( $o_c z$  et  $o_a z$ ) sont parallèles (palier aligné) et si l'on néglige les déformations élastiques des surfaces sous l'effet de la température et de la pression, la distance  $e=O_c O_a$  et l'angle de calage  $\phi$  sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre dans le coussinet.

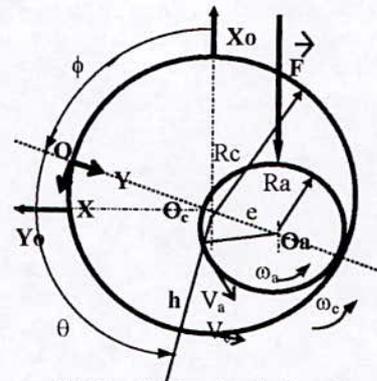


Fig 1. - Section droite du palier

La figure (2) représente un palier développé selon la circonférence.

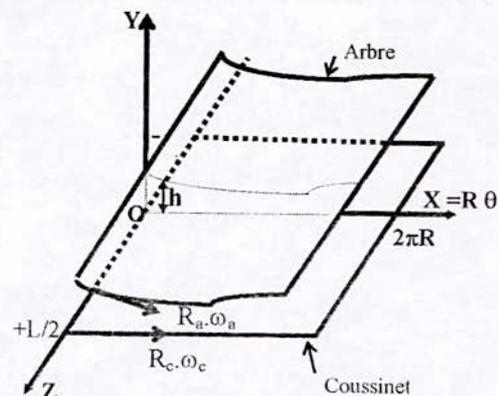


Fig 2. - Palier développé

### A. Equations utilisées en lubrification hydrodynamique

• En coordonnées cartésiennes (Fig.1) où l'épaisseur du film  $h$  est mesurée selon  $Y$ , l'équation de Reynolds adimensionnelle en régime stationnaire s'écrit Frêne [1] :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left( H^3 \frac{\partial \bar{P}}{\partial Z} \right) = \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (1)$$

avec  $\theta = x/R$ ,  $H = h/C$ ,  $Z = z/L$

et  $\bar{P} = p/6\mu(\omega_a + \omega_c)(R/C)^2$  ou  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $0 \leq Z \leq 1$

• En prenant la pression atmosphérique comme référence, les conditions aux limites s'écrivent Frêne [1], Tanneau [2]:

$$\begin{cases} Oz : \bar{P}(\theta, Z = \pm 1/2) = 0 \\ \theta R : \bar{P}(\theta = 0, Z) = \bar{P}(\theta = 2\pi, Z) \\ \bar{P}(\theta_s, Z) = 0 \text{ et } \frac{\partial \bar{P}(\theta_s, Z)}{\partial \theta} = 0 \text{ à la frontière du film} \\ \bar{P}(\theta, Z) = 0 \text{ si } \theta_s < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2)$$

• L'équation géométrique qui définit l'épaisseur du film fluide  $h$  (Fig.2) s'écrit Frêne [1], Tanneau [2]:

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cdot \cos \theta) \quad (3)$$

### B. Caractéristiques du contact

• Les composantes de la charge hydrodynamique supportée sont déterminées par :

$$\begin{cases} W_\varepsilon = \int_{-1/2\theta_c}^{+1/2\theta_s} \int_0^1 p(\theta, Z) \cos \theta \, d\theta \, dZ \\ W_\phi = \int_{-1/2\theta_c}^{+1/2\theta_s} \int_0^1 p(\theta, Z) \sin \theta \, d\theta \, dZ \end{cases} \quad (4)$$

Ce qui permet de calculer le module de la charge  $W$  dimensionnelle et l'angle de calage  $\phi$  :

$$W = 6\mu R L : (\omega_a + \omega_c) (R/C)^2 \left( \sqrt{W_\varepsilon^2 + W_\phi^2} \right) \quad (5)$$

et  $\phi = \text{Artg} \left[ \frac{W_\phi}{W_\varepsilon} \right]$

• Le couple de frottement réel s'écrit de cette façon :

$$C = C_p + C_g \theta_c \theta_s + C_{ina} \quad (6)$$

• Le débit de fuite, aux extrémités du palier, s'écrit :

$$Q = -\frac{R}{6\mu} \int_0^{2\pi} h^3 \frac{\partial P}{\partial Z} (z=L/2) d\theta \quad (7)$$

## IV. EFFET THERMIQUE GLOBAL

L'hypothèse d'une viscosité constante  $\mu$  en tout point de l'écoulement, est erronée. Le concept de "viscosité effective" Frêne[1] est introduit, il consiste à supposer le régime isotherme et la température du fluide égale à :

$$T_f = T_a + \Delta T \quad (8)$$

En égalant un pourcentage de l'énergie générée par cisaillement à la chaleur  $Q$  évacuée par le lubrifiant, on aura :

$$\wp = \lambda (C_a \omega_a + C_c \omega_c) = \rho C_p Q \Delta T \quad (9)$$

### A. Limite de validité de l'hypothèse régime laminaire

La limite de validité de l'hypothèse du régime laminaire est prise en compte par l'introduction du nombre sans dimension  $\mathfrak{R}$  dit : "Nombre de Reynolds modifié". Ce nombre définit le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité dans un palier, il s'écrit :

$$\mathfrak{R} = \left( \frac{\rho \cdot U \cdot C}{\mu} \right) \left( \frac{C}{R} \right) \quad (10)$$

Si  $\mathfrak{R} < 1$  : l'écoulement est considéré laminaire.

Pour définir la transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor, on définit un nombre sans dimension  $\tau$  dit "nombre de Taylor", défini par :

$$\tau = \left( \frac{\rho \cdot U \cdot C}{\mu} \right) \left( \frac{C}{R} \right)^{0.5} \quad (11)$$

Ainsi, la transition s'effectue localement dès que le nombre de Taylor  $\tau$  atteint la valeur critique  $\tau_c$  donnée par la relation semi-empirique (12). Le passage au régime turbulent se fait pour  $\tau$  supérieur à  $2\tau_c$  :

$$\tau_c = 63.3 \varepsilon^2 - 38.0 \varepsilon + 41.2 \quad (12)$$

Donc, l'équation de Reynolds (1) n'est valable que pour  $\tau < \tau_c$  et  $\mathfrak{R} < 1$ .

## V. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

La détermination du champ de pression dans le film lubrifiant consiste à résoudre l'équation (1) en utilisant la méthode des différences finies (Fig.3) Tanneau [2].

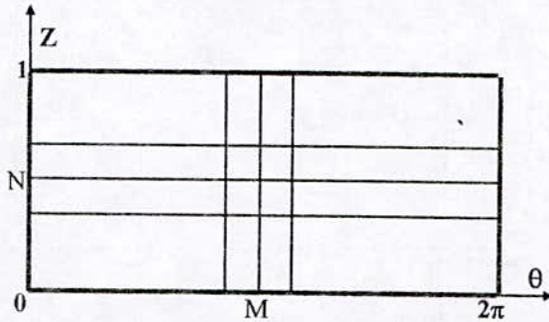


Fig. 3 - Film d'huile développé et discrétisé

La résolution du système linéaire ainsi obtenu, se fait par la méthode itérative de Gauss-Seidel extrapolée avec coefficient de sur-relaxation.

Un organigramme de calcul (Fig.4) a été élaboré, nous permettant la résolution du problème direct ( $\varepsilon$  fixe,  $W$  à déterminer) et indirect ( $W$  fixe,  $\varepsilon$  à déterminer) en lubrification hydrodynamique, avec prise en compte de :

- La limite de l'hypothèse du régime d'écoulement laminaire,
- L'effet d'une variation de la température moyenne du fluide,
- La théorie du palier court ( $L/D < 0.5$ ) et celle du palier de longueur finie ( $L/D \approx 1$ ).

Le code de calcul a été implémenté en langage de programmation Fortran.

## VI. RESULTATS NUMERIQUES

Les caractéristiques du palier pris comme exemple d'étude, sont les mêmes que celles utilisées par J.Frêne[3] en traitant le cas d'un palier de longueur finie, ces caractéristiques sont :

- Dimension du palier :  $D=40\text{mm}$   
 $C = 0.02\text{mm}$   
 $L/D = 0.5$
- Conditions de fonctionnement :  $T_a = 40^\circ\text{c}$   
 $N_a = 3000\text{tr/min}$
- Caractéristiques du fluide :  $\rho = 860\text{Kg/m}^3$   
 $C_p = 2000\text{J/Kg}^\circ\text{c}$   
 $\mu(40^\circ\text{c}) = 0.01\text{Pa.s}$   
 $\mu(100^\circ\text{c}) = 0.001\text{Pa.s}$
- Maillage du film fluide :  $M \times N = 91 \times 61$

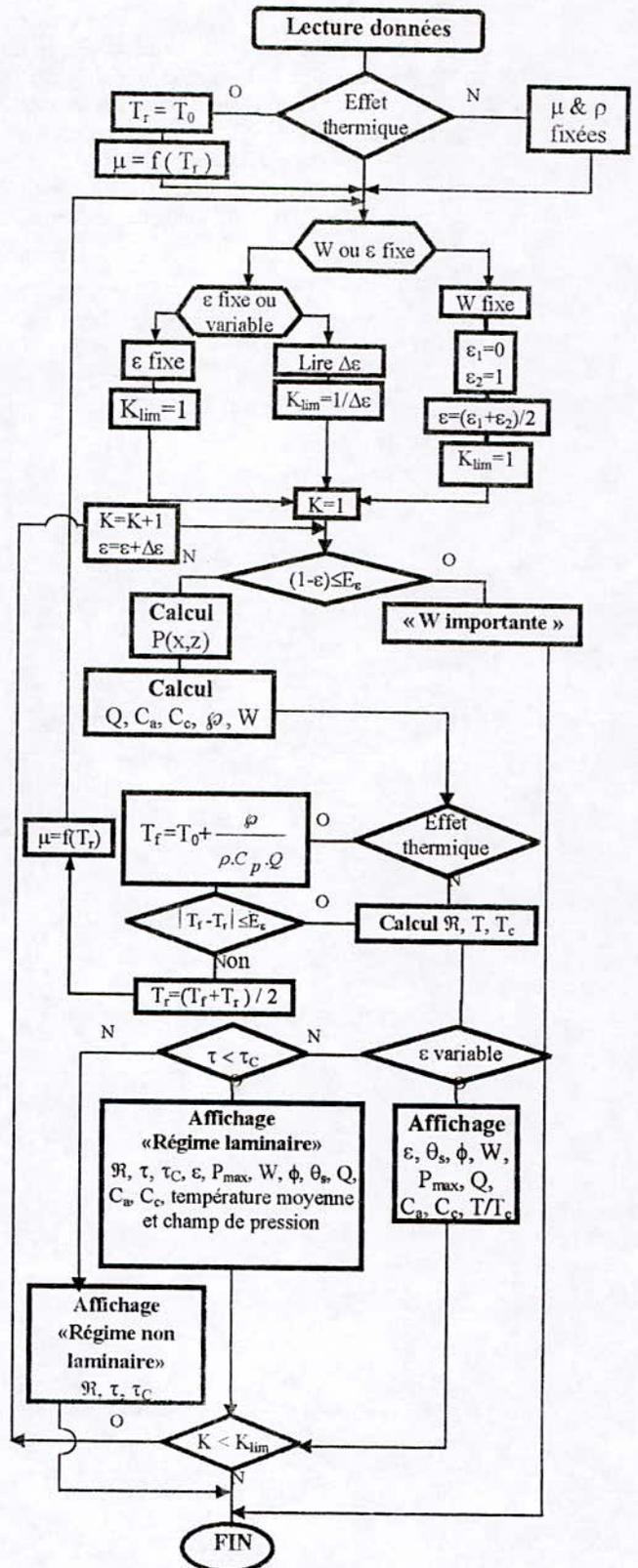


Fig. 4. - Organigramme de calcul

### A. Evolution des caractéristiques statiques du palier avec l'excentricité relative

Pour un rapport  $L/D=0.5$  (c'est la limite théorique du palier court), on constate que la charge supportée par le contact (Fig.5), le débit de fuite axial (Fig.6) et le couple de frottement sur l'arbre (Fig.7) augmentent avec l'excentricité. Quand à l'angle de calage (Fig.8) définit la position optimale de la rainure d'alimentation (la position la moins chargée du contact), il diminue avec la charge et varie dans une fourchette d'angle  $[0^\circ, 90^\circ]$ .

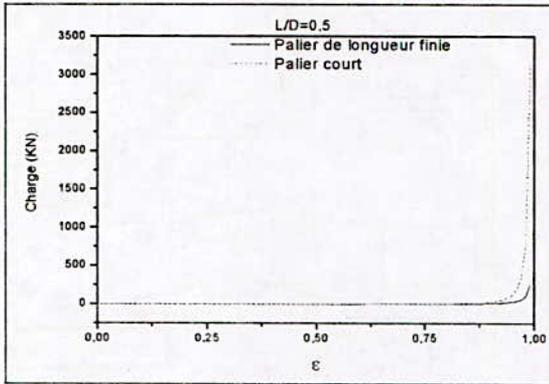


Fig 5. - Charge supportée par le contact

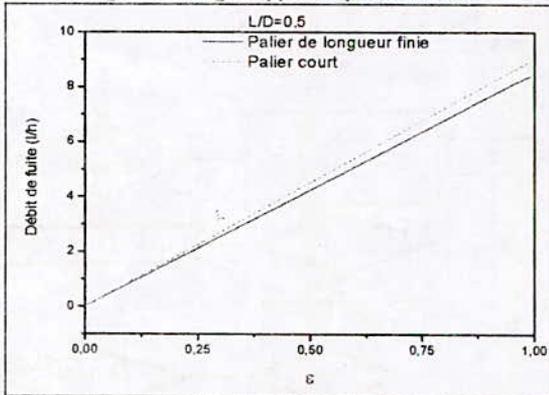


Fig 6. - Débit volumique axial de fuite

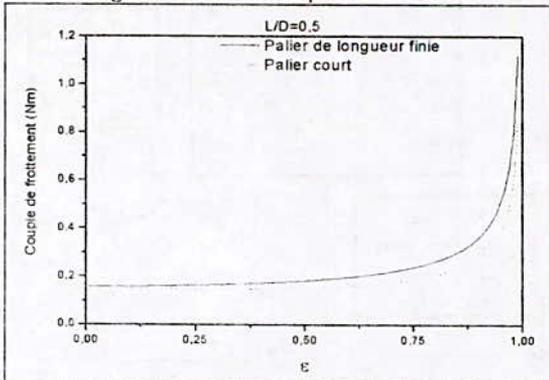


Fig 7. - Couple de frottement sur l'arbre

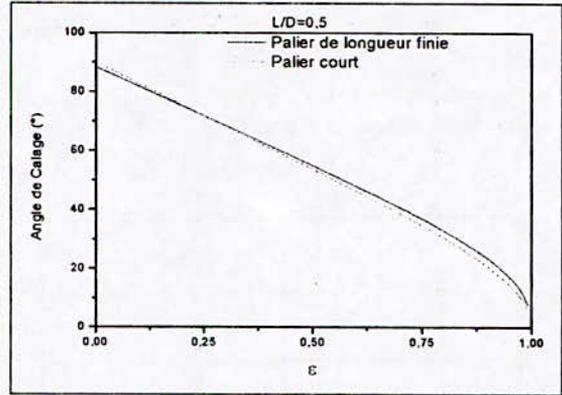


Fig 8. - Angle de calage

Ces courbes caractéristiques pour le palier court et celui de longueur finie ont le même profil et sont assez proches. En effet, l'écart reste faible sur l'angle de calage, sur le débit et sur le couple de frottement, il est d'un ordre de grandeur acceptable sur la charge. L'écart diminue quand l'excentricité décroît.

Le couple de frottement calculé avec la théorie du palier de longueur finie est plus élevé que celui calculé avec la théorie du palier court, ceci est dû à l'épaisseur du film qui est plus faible et au gradient de pression circumférenciel qui, dans le cas du palier court, est négligé.

### B. Influence de la température sur les performances du palier

La figure (9) montre l'évolution de la température moyenne du fluide lubrifiant pour différentes positions de l'arbre dans le coussinet du palier-lisse.

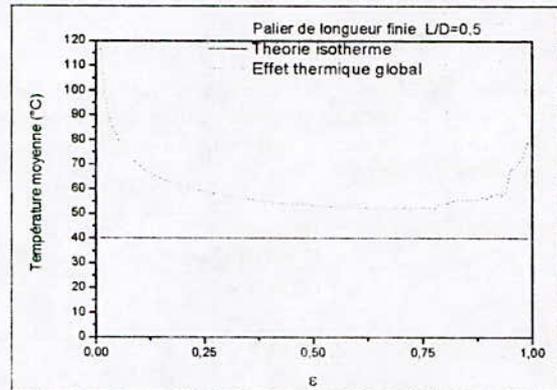


Fig 9. - Température moyenne de fonctionnement

Les valeurs de la charge supportée par le contact Fig (10), du couple de frottement sur l'arbre Fig (11) et du débit de fuite du palier Fig (12) obtenus par l'utilisation de la théorie isotherme, sont comparées à ceux obtenus par l'utilisation d'un bilan thermique global du contact.

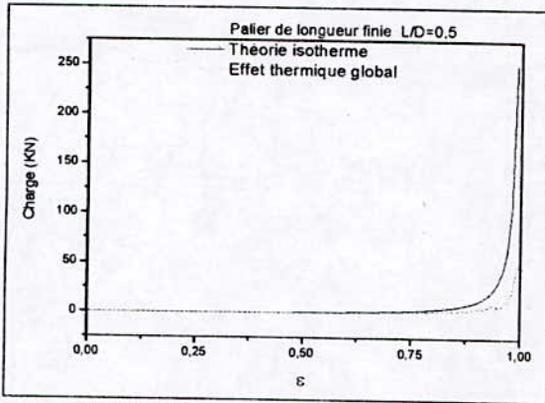


Fig 10.- Charge supportée par le contact

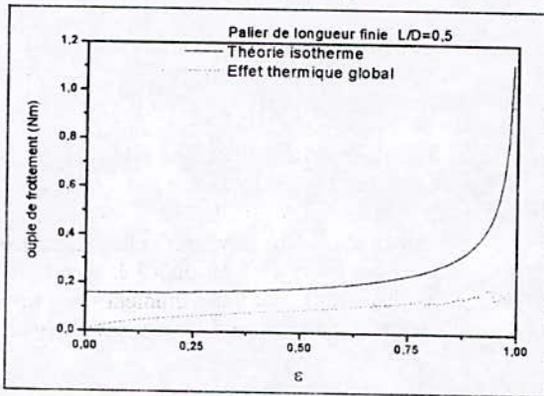


Fig 11.- Couple de frottement sur l'arbre

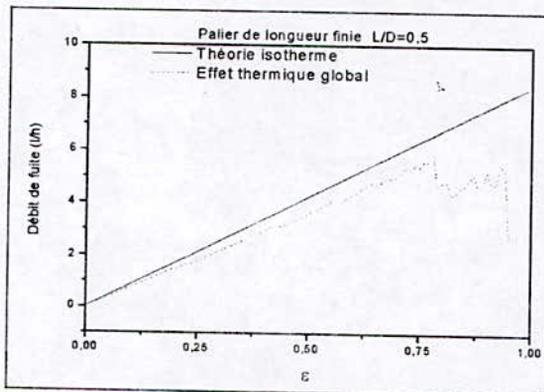


Fig 12.- Débit de fuite du palier

On constate que l'analyse thermique qui prend en compte la variation de la température, donc de la viscosité, donne des valeurs plus faibles que l'analyse isotherme.

On remarque qu'à forte excentricité ( $\epsilon > 0.8$ ), il y'a apparition d'un phénomène oscillatoire dans les calculs des caractéristiques. Cela est dû essentiellement aux procédures de calcul numérique.

### C. Influence de la variation de la charge

On fait varier la charge supportée par le contact de 1N à 10000N et on calcule la position de l'arbre dans le coussinet (problème indirect) ainsi que les paramètres de fonctionnement du palier.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 1. - Evolution des paramètres d'un contact Hydrodynamique avec la charge appliquée

W (KN)	1	10	100	1000	10000
$\epsilon$	0.17	0.71	0.96	0.99	> 1
$P_{max}$ (Mpa)	0.0012	17.89	378.3	8797.44	Charge trop importante
$\phi$ (°)	75.16	41.28	15.42	6.22	
$\theta_s$ (°)	212	200	188	184	
Q (l/h)	2.38	3.35	4.3	4.4	
Ca (N.m)	0.32	0.97	1.33	3.96	
$\dot{\phi}$ (Watt)	101.27	156.13	419.16	1243.74	

Quand la charge croit, l'excentricité relative, le couple de frottement, la pression maximale dans le contact et la puissance générée dans le contact croissent rapidement.

Le débit de fuite reste pratiquement constant, quant à l'angle de calage et l'abscisse de rupture du film lubrifiant, ils diminuent.

## VII. CONCLUSION

Les résultats obtenus par l'hypothèse du palier court ( $L/D \leq 0.5$ ) sont en bon accord avec ceux obtenus par l'utilisation de la théorie du palier de longueur finie.

L'utilisation de l'hypothèse du palier court est justifiée pour un rapport de la longueur au diamètre du palier ( $L/D$ ) inférieur à 0.5 car elle permet un gain en temps de calcul important.

Une analyse thermique effectuée à l'aide d'un bilan thermique global a permis de connaître assez rapidement la température moyenne du film pour chaque position de l'arbre dans le coussinet. De plus, il apporte une modification importante des résultats par rapport à la théorie isotherme.

## VIII. REFERENCES

- [1] J. FRENE, D. NICOLA, B. DEGUEURCE, D. BERTHE et M. GODET. Lubrification Hydrodynamique -Paliers et Butées. Editions Eyrolles, pp.119-150, 1990.
- [2] G. Tanneau. Contribution à l'étude des paliers de bielles, effets des rugosités. Thèse 3<sup>ème</sup> cycle, poitiers 1984.

- [3] J. FRENE. Palier hydrodynamique. *Technique de l'ingénieur*. B671-1, pp.1-25, 2-1982.
- [4] N. Mc Coull and C. Walther. Viscosity-temperature chart. *Lubrication*, june 1921.
- [5] N. TALA-IGHIL. Etude de la lubrification hydrodynamique des paliers de bielle d'un moteur à combustion interne. *Thèse de Magister*, U.S.T.Oran, avril 1998.

## IX. GLOSSAIRE

Oxyz	Système d'axes lié à la ligne des centres
$\theta$	Coordonnée circonférentielle dans Oxyz
R	Rayon moyen du palier $R=D/2$
x	Coordonnée dans le sens de rotation $x=R\theta$
y	Coordonnée dans le sens de l'épaisseur
z	Coordonnée dans la direction axiale
h	Epaisseur du film
hs	Epaisseur du film à la sortie de la zone active
H	Epaisseur sans dimension du film $H=h/C$
e	Excentricité du palier
C	Jeu radial du palier
L	Longueur du palier
$\varepsilon$	Excentricité relative du palier $\varepsilon=e/C$
$\phi$	Angle de calage
$\omega_a, \omega_c$	Vitesses de rotation de l'arbre et du coussinet
$\theta_e, \theta_s$	Coordonnées circonférentielles à l'entrée et à la sortie de la zone active du contact
$R_a$	Rayon de l'arbre
$R_c$	Rayon du coussinet
P	Pression hydrodynamique dans le film
$\bar{P}$	Pressions sans dimensions
$C_a, C_c$	Couples de frottement sur l'arbre et coussinet
$C_p$	Couple dû au gradient de pression
$C_g^{\theta_e, \theta_s}$	Couple dû au glissement des surfaces
$C_{ina}$	Couple dans la région inactive du contact
Q	Débit axial
$T_a$	Température d'alimentation du palier
$\mu$	Viscosité dynamique du lubrifiant
$\rho$	Densité du lubrifiant à $T_a$
$C_p$	Chaleur spécifique du lubrifiant
$\Delta T$	Accroissement de la température
$N_a$	Vitesse de rotation de l'arbre en tr/min
M x N	Maillage du film fluide
$\lambda$	Paramètre qui rend compte de l'environnement du palier ( $0.5 < \lambda \leq 1$ )

## ANALYSE NUMERIQUE D'UN RESERVOIR COMPOSITE LINER METALLIQUE SOUS PRESSION

Abdelkader Hocine\*, Abderrezak Bezazi\*\* Ali Benamar\*\*\*

\* Département de Mécanique, Faculté des sciences, Université H.B. Chlef- BP : 151 (02000) - Algérie - E-Mail: [Hocinea\\_dz@Yahoo.fr](mailto:Hocinea_dz@Yahoo.fr)

\*\* Department of Mechanical Engineering, University of Sheffield - Mappin Street, Sheffield, S1 3JD UK – E-Mail: [a.bezazi@sheffield.ac.uk](mailto:a.bezazi@sheffield.ac.uk)

\*\*\* ENSET - Laboratoire de Fabrication mécanique – Oran (31000) –Algérie  
E-Mail : [benamar\\_dz@yahoo.fr](mailto:benamar_dz@yahoo.fr)

### RESUME :

La conception en matériaux composites des réservoirs de stockage des hydrocarbures permet de réduire leur poids. Ce modèle de stockage exige l'utilisation d'un liner, due à la perméabilité des matériaux composites. L'objectif de ce travail est de déterminer et d'analyser les contraintes et les déplacements engendrés par l'effet de pressions pour un réservoir composite stratifié renforcé par un liner métallique. L'effet du changement du rapport d'épaisseur entre le liner et le stratifié est discuté.

Mots Clefs : réservoir, composite, acier, stratifié, liner, séquence d'empilement, SAP90.

### I. INTRODUCTION

Parmi les carburants connus actuellement, le gaz naturel, qui est l'un des meilleurs carburants du marché, le plus sécurisé durant son utilisation. Le réservoir de stockage de gaz naturel comprimé est le plus important des systèmes remplis de combustible.

A l'heure actuelle, on assiste à une augmentation très rapide du nombre d'applications industrielles des matériaux composites, vu les avantages que peuvent présenter ces derniers à la réalisation des réservoirs. Aujourd'hui, Ces types de réservoirs trouvent une large application commerciale dans le stockage de l'hydrogène comprimé et du gaz naturel liquéfié et comprimé [1-2].

Les réservoirs obtenues par enroulement filamentaire sont largement utilisées dans divers applications, où il y'a une présence de l'effet de pression interne/externe, flexion, torsion et charge axiale [3]. Cette technique permet d'avoir un réservoir d'une grande résistance et un faible poids [4].

Un réservoir sous haute pression, doit résister sans risque (statiquement) sans fuite et sans fissure à la pression maximale de service, ainsi que les cycles de chargement en fatigue résultant du cycle charge décharge.

Dans les constructions des réservoirs composites avec une seule orientation hélicoïdale, la rupture du premier pli est considérée comme la rupture totale du réservoir [5 et 6], plus que le problème de perméabilité du matériau composite. Lorsque ce dernier est obtenu par enroulement filamentaire à plusieurs orientations, où les filaments sont enrobés sur un liner métallique, la rupture du premier pli n'est pas nécessairement la rupture total du réservoir [7].

Ce nouveau modèle de stockage est considéré comme une structure hybride, où le liner fournit l'étanchéité et la résistance à la corrosion, tandis que l'enroulement en fibres de verre/époxy est chargé de résister aux pressions internes élevées. L'approche hybride à plusieurs avantages : assure une participation parfaite entre le liner et la coque composite, ainsi que l'utilisation de la totalité de la résistance en traction du composite. Le choix du liner permettra de prévenir contre la diffusion des gaz à travers la paroi du réservoir. Principalement, il existe trois types [4]:

- ✦ élastomère : pour des applications à température proche de l'ambiante et une perméabilité tolérable et qui ne supporte aucune charge. Ce type n'est pas convenable dans le stockage des gaz.
- ✦ liner mince : il ne contribue pas à la capacité des charges supportées par le réservoir.
- ✦ un liner épais : il supporte jusqu'à 1/3 de la charge de la pression interne du réservoir.

L'obtention d'un réservoir rentable ne peut se réaliser qu'on se basant sur une forme approprié, une rigidité du réservoir et une optimisation des précontraintes.

Dans les applications aérospatiales, les réservoirs composites renforcés par un liner présentent un poids significatif de l'ordre de 40% de celui des réservoirs métalliques [8].

L'objectif du présent travail, consiste à déterminer l'effet de la séquence d'empilement et du type du liner sur les contraintes et les déformations du réservoir.

En d'autres termes, la présente étude est une comparaison entre un stratifié qui est présenté par HOCINE [9, 10] « [+30°/-30°/+30°/-30°] » et le stratifié qui est mis en évidence par la nouvelle technologie qui est l'empilement [+18°/90°] [1].

## II. MATERIAUX ET PROCEDURE

Dans cette analyse, toute la structure du réservoir est constituée de dix couches : composites plus le liner. Deux types de séquences multicouches / liner sont étudiés. Les séquences d'empilements, qui figurent dans le tableau 1 sont ordonnées du pli interne au pli externe. Chaque couche est considérée homogène et orthotrope. La variation des angles d'enroulement, d'une couche à une autre est prise en compte par la variation des propriétés élastiques de chaque couche. Ces dernières sont calculées à partir des équations de la loi générale des stratifiés [11], où les caractéristiques mécanique d'un pli composite verre/époxy sont :

$$E_L = 46.10^3 \text{ (MPa)}, E_T = 10^4 \text{ (MPa)}, \nu = 0,31.$$

La deuxième séquence ST 2 renforcée par le liner, est caractérisée une orientation circonférentielle 90°, qui ne concerne que les deux derniers plis de la partie cylindrique et elle est ajoutée pour la renforcer. Les plis hélicoïdaux forment une géodésique bombée.

La figure (1) présente le système d'axes de référence des propriétés des matériaux orthotropes.

Le réservoir composite stratifié est soumis à une pression interne de 25.89 MPa et une pression externe de 0.1 MPa (figure 2).

Les distributions des champs de contraintes et de déplacements sont en fonction du rayon méridien  $R_m$  et du rapport d'épaisseur  $R$  qui égale à :

$$R = \frac{r - r_{int}}{r_{ext} - r_{int}} \quad (1)$$

$r_{int}$  et  $r_{ext}$  : respectivement le rayon interne et externe du réservoir ;

$r$  : rayon qui varie entre  $r_{int}$  et  $r_{ext}$  avec un pas de  $\frac{1}{4}$  de l'épaisseur du réservoir.

TABLE 1

Séquence d'empilement du réservoir composite.

Type	Séquence d'empilement
ST1 /Liner mince	[[acier] <sub>2</sub> /[+30°/-30°/+30°/-30°] <sub>2</sub> ]
ST1 /Liner épais	[[acier] <sub>6</sub> /[+30°/-30°/+30°/-30°]]
ST2 /Liner mince	[[acier] <sub>2</sub> /[+18°/-18°/+90°/90°] <sub>2</sub> ]
ST2 /Liner épais	[[acier] <sub>6</sub> /[+18°/-18°/+90°/90°]]

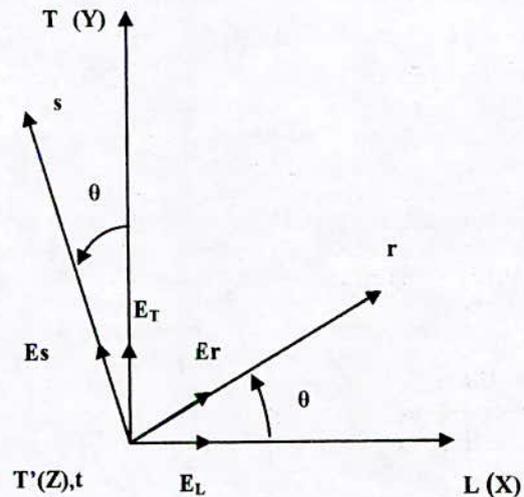


Fig. 1 – Réservoir sous pression interne et externe.

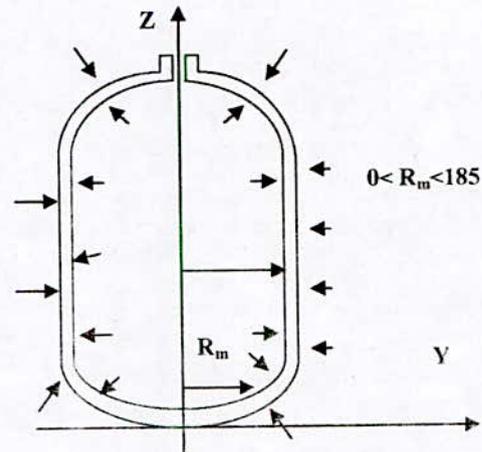


Fig. 2 – Réservoir sous pression interne et externe.

### II.1 Maillage du réservoir

La méthode de modélisation dite « de BLOCS » est appropriée pour notre réservoir, construit de trois parties. Ces dernières sont caractérisées par une faible épaisseur. Cette méthode permet la génération automatique d'un maillage éléments finis d'une géométrie bidimensionnelle. Elle est utilisée pour générer des maillages résultants de la déformation des grilles par une transformation géométrique (figure 3). Elle permet aussi de définir la géométrie du domaine et à la discrétisation spatiale en nœuds et en éléments. En effet, l'exactitude de la solution dépend fortement de la topologie des éléments (forme, nombre, type) et de la façon dont le maillage est construit.

### II.2 Adaptation SAP 90

Les résultats de la modélisation sont adaptés en programme SAP90. La visualisation (contraintes et déformations) est obtenue à l'aide du logiciel SAPLOT. Le fichier de données est préparé selon les spécifications du programme SAP90 par l'élément 'ASOLID' [12]. La procédure de résolution est présentée par la figure 4. La modélisation est effectuée par 671 nœuds et 600 éléments quadratiques.

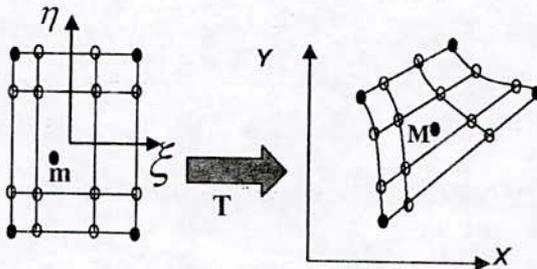


Fig. 3. Transformation géométrique.

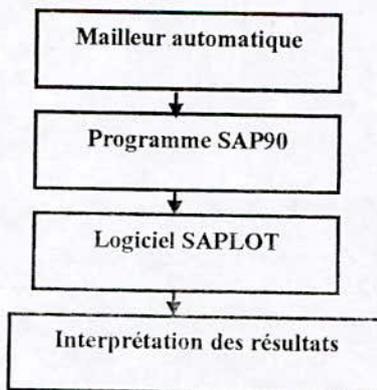


Fig. 4. Procédure de résolution.

## III. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Ce travail a permis de déterminer la variation des contraintes et des déplacements dans le plan  $Y-Z$ . Les déplacements radiaux et axiaux sont présentés à travers l'épaisseur du réservoir et en fonction du rayon méridien aux endroits critiques.

### III.1 Analyse des contraintes mécaniques

Pour localiser les zones critiques, on représente une distribution plane des contraintes  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$  (figure 5). La variation de ces derniers est représentée à travers l'épaisseur.

D'après les résultats obtenus, on a remarqué une présence de sollicitations de compression au niveau de la paroi interne et des sollicitations de traction au niveau de la paroi externe.

#### ✦ Liner mince :

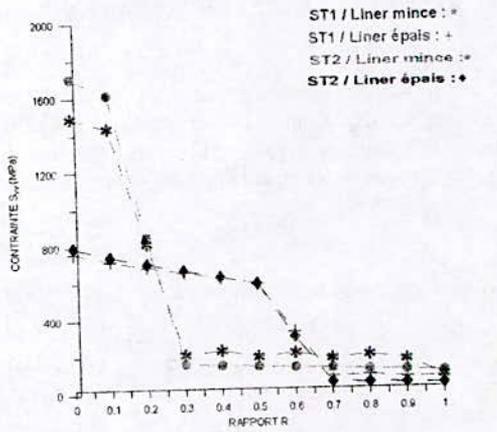
On remarque que les contraintes ( $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) sont maximales aux parois internes. La variation de ces contraintes de la paroi interne jusqu'à la paroi externe est obtenu en deux stades : le premier est caractérisé par une chute très importante des contraintes jusqu'à une valeur de 0,3 du rapport  $R$ , alors que la deuxième est un plateau ou elles varient légèrement. De plus, les contraintes du stratifié ST 1 sont plus faibles dans le premier stade par rapport au stratifié ST 2, alors qu'il sont légèrement plus importants dans le deuxième stade.

#### ✦ Liner épais :

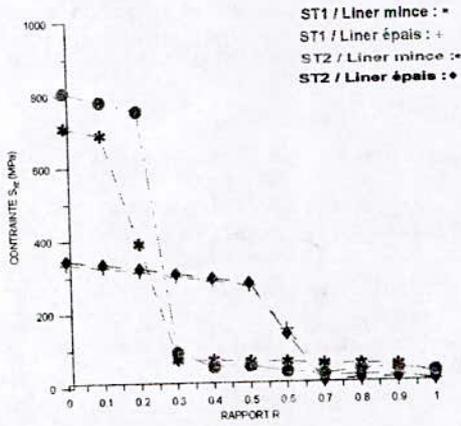
Les valeurs des contraintes ( $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) sont environ 50 à 60 % moins importantes que dans le cas d'un liner mince et que leurs valeurs maximales sont situées au niveau des parois internes.

La variation de ( $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) de la paroi interne jusqu'à l'externe est obtenue en trois stades : le premier est caractérisé par une chute progressive (pas très importante) jusqu'à une valeur de 0,5 du rapport  $R$ , le deuxième est compris entre une valeur de 0,5 est 0,7 est présente une chute très importante alors que le dernier on obtient un plateau.

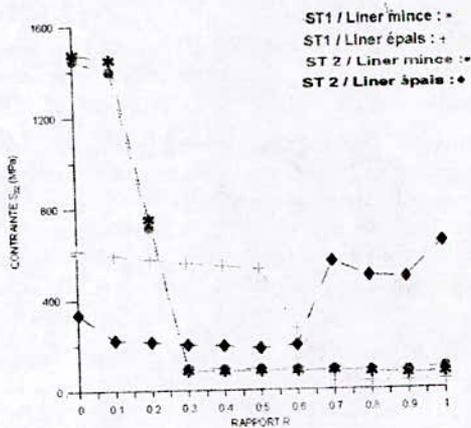
L'allure de  $\sigma_{zz}$  du stratifié ST 2, n'est pas similaire aux autres évolutions. Cette allure est caractérisée par une chute jusqu'à une valeur de 0,1 du rapport  $R$ , ensuite elle se stabilise légèrement et elle subit une augmentation rapide pour 0,7 du rapport  $R$ . La présence de l'angle  $90^\circ$ , décroît  $\sigma_{zz}$  pour 0,9 du rapport  $R$  et enfin, elle atteint sa valeur maximale au niveau de la paroi externe. On remarque que pour le liner épais, l'influence de la séquence d'empilement influe peu sur les valeurs des contraintes.



(a) : Contraintes  $\sigma_{rr}$



(b) : Contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$



(c) : Contraintes  $\sigma_{zz}$

Fig. 5 - Profile des contraintes ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ) en fonction du rapport R.

### III.2 Analyse des déplacements mécaniques :

La figure 6 présente les déplacements, dans les sens radial et axial, du matériau hybride à travers l'épaisseur. On remarque que les déplacements radiaux décroissent

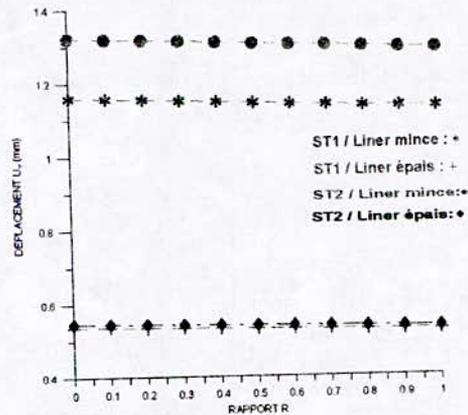
légèrement de façon linéaire entre les deux parois interne et externe du réservoir (figure 6-a). L'allure de déplacements est similaire à celle de XIA [13 et 14] Ces déplacements, positifs, engendrent des contraintes de traction. D'un autre côté, les déplacements axiaux présentent une allure progressive et engendrent des contraintes de compression (figure 6-b).

#### Liner mince :

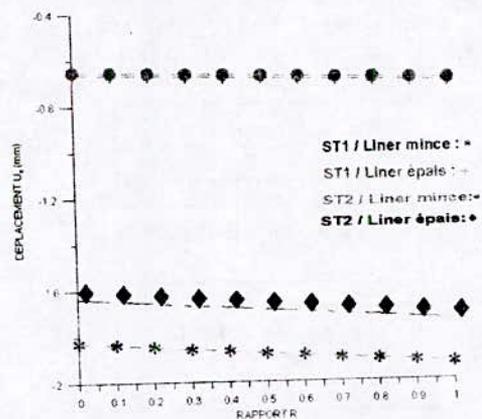
Les déplacements radiaux du stratifié ST 1 sont moins importante que ceux du stratifié ST 2 alors que les déplacements axiaux pour le ST 1, sont beaucoup plus importantes que ceux du ST2.

#### Liner épais :

Les déplacements radiaux du stratifié ST 1 sont presque identiques que ceux du stratifié ST 2. Dans le cas du liner épais la séquence d'empilement n'influe pas sur les déplacements radiaux. Dans le cas du ST 1, les déplacements axiaux sont beaucoup moins importante que ceux du stratifié ST 2.



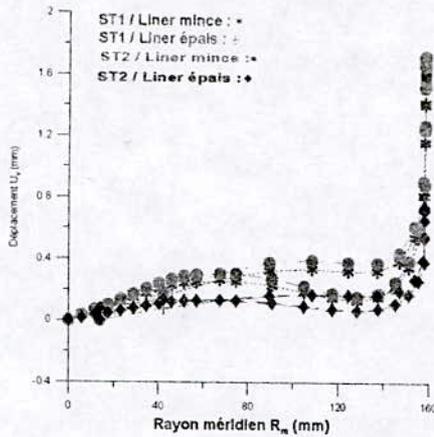
(a) : Déplacements radiaux



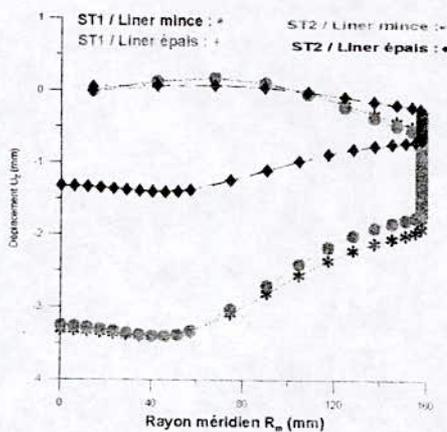
(b) : Déplacements axiaux

Fig. 6 - Variation des déplacements de la paroi du réservoir en fonction du rapport R.

La figure 7 présente la variation des déplacements dans les trois parties constituant le réservoir (cylindrique et les deux fonds sphériques) en fonction du rayon méridien  $R_m$ . Le stratifié/liner mince est beaucoup plus déformé par rapport au stratifié/liner épais. On remarque que l'allure de déformation des parties bombées du réservoir est presque identique. L'évolution des déplacements radiaux présentent un retour, après une évolution du fond du réservoir jusqu'à la partie cylindrique, où la valeur de déplacement est égale à 1,60 mm, ensuite décroît jusqu'à une valeur nulle, due en déplacement imposé dans l'embout du réservoir. D'un autre côté, les déplacements axiaux présentent une progression du fond du réservoir jusqu'à l'embout, où la partie inférieure du réservoir est beaucoup plus sollicitée par rapport aux autres parties, où règnent des pressions de compression, à l'inverse de la partie supérieure, où règnent des pressions de traction. Les déplacements sont beaucoup plus importants dans les cas des réservoirs en liner mince, où une légère influence du type d'empilement est enregistrée.



(a) : Déplacements radiaux



(b) : Déplacements axiaux

Fig. 7 - Variation des déplacements de la paroi interne du réservoir en fonction du rayon méridien  $R_m$ .

#### IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif du présent travail, consiste à déterminer l'effet de la séquence d'empilement et du type du liner sur les contraintes et les déformations du réservoir. L'effet du changement du rapport d'épaisseur entre le liner et le stratifié est discuté.

Une analyse numérique est élaborée par l'utilisation de la méthode des blocks, qui permet de définir la géométrie du domaine et à la discrétisation spatiale en nœuds et en éléments. Les données obtenues sont adaptées en programme SAP90.

Pour l'empilement ST 2 dans le cas du liner épais, l'alternance des orientations  $[+18^\circ/-18^\circ]$ , influe directement sur les valeurs des contraintes. On a remarqué que l'orientation positive des fibres diminue la valeur de la contrainte, par contre, l'orientation négative augmente cette dernière.

Le liner métallique produit une remarquable chute des déplacements pour les deux empilements. Cette chute est en fonction de l'épaisseur du liner utilisé. En effet, dans le cas d'un liner mince, on remarque que l'empilement du stratifié ST 2 présente un meilleur comportement par rapport au stratifié ST 1, en terme de contraintes et de déplacements. Par contre, ces derniers sont peu influencés dans le cas du liner épais, à l'exception des contraintes ( $\sigma_{zz}$ ) et des déplacements axiaux exprimés en fonction du rapport R.

On sait que la capacité de déformation de la coque composite est faible par rapport à celle du liner (capacité d'allongement). En raison de ceci, la rupture devrait toujours commencer dans la coque composite, alors que le liner est dans un état de déformation plastique. Cette conclusion peut être acceptée dans le cas d'une charge statique élevée et simple.

Dans le cas d'un chargement cyclique à haute pression, la rupture par fatigue du liner est constatée en premier lieu. C'est pourquoi, dans notre cas, les premiers endommagements apparaissent comme fuite, avant la rupture. Il est raisonnable de se concentrer sur ce point, qui est le plus faible, pour que le liner puisse induire un état de contrainte, qui peut résister à la fatigue.

Nous envisageons dans nos prochains travaux, d'orienter notre recherche sur la modélisation analytique d'une solution hybride.

Ce travail de conception et d'optimisation tiendra compte, en premier lieu, de la partie cylindrique, ensuite, des deux embouts hémisphériques. Cet axe de recherche entre dans le cadre d'une approche de modélisation élastique et plastique du réservoir.

## V. REFERENCES

- [1] V.V. Vasiliev, A.A. Krinakov, A.F. Razin " New generation of filament-wound composite pressure vessels for commercial applications," *Composite Structure* 62 - 449-459, 2003.
- [2] P.M Wild, "Analysis of filament-wound cylindrical shells under combined centrifugal, pressure and axial loading," *Composites Part A*, 28 A, 47-55, 1997.
- [3] T. Messenger, M. Pyrz, B. Giniste, P. Chauchot " Optimal laminations of thin underwater composite cylindrical vessels," *Composite Structures* 58-529-537, 2002.
- [4] J.M. Lifshitz, H. Dayan" Filament -wound pressure vessel with thick metal liner," *Composite Structures* 32 313-323, 1995.
- [5] A. Bezazi, A. El Mahi, J.-M. Berthelot, et B. Bezazi"Analyse de l'endommagement des stratifiés en flexion 3- points. Influence de la séquence d'empilement," XV<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 3 au 7 Septembre, 2001, Nancy, France.
- [6] A. Bezazi, A. El Mahi, J.-M. Berthelot & B. Bezzazi, "Flexural fatigue behavior of cross-ply laminates -An experimental approach-", *Strength of Materials*, vol. 35, no. 2, pp. 149-161, 2003.
- [7] M. Z. Kabir, "Finite element analysis of composite pressure vessels with a load sharing metallic liner," *Composite Structures*, 49 (2000), 247-255.
- [8] L. Parnas, N. Katrice"Design of fiber-reinforced composite pressure vessels under various loading conditions," *Composite Structures*, 58, 83-95, 2002.
- [9] A. Hocine, A. Bezazi & A. Benamar, "Analyse numérique des contraintes et des déformations d'un réservoir composite stratifié sous pression, " conférence *CIMA-2004*, Boumerdès, Algérie.
- [10] A. Hocine, A. Bezazi & A. Benamar " Analyse de l'influence de la séquence d'empilement sur le comportement mécanique d'un réservoir en composite" *JNC14 -2005*, Compiègne, France.
- [11] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures*. 3<sup>ème</sup> édition TEC & DOC, 1999.
- [12] A. Hocine, A. Bettahar, M. Tahar Abbés, " Simulation numérique d'un réservoir en matériaux composites sous pression interne, " conférence *CIMNA-2003*, 13-14 Nov., Beyrouth, Liban.
- [13] XIA, M., H. Takayanagi, K. Kemmochi. "Analysis of multi-layered filament -wound composite pipes under internal pressure", *Composites structures*, vol. 53, pp. 483-491 (2001).
- [14] XIA, M., H. Takayanagi and K. Kemmochi, "Analysis of filament-wound reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading", *Composites structures*, vol. 51, pp. 273-283 (2001).

# LE CONCEPT « LABORATOIRE VIRTUEL ». UN OUTIL DE CONCEPTION OPTIMISEE DES SYSTEMES D'EMBALLAGES

Rezak AYAD

Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Emballage et Conditionnement (ESIEC)  
Groupe de Mécanique des Matériaux et des Structures (GMMS, EA N° 2617)  
Université de Reims Champagne-Ardenne  
Esplanade Roland Garros BP 1029, 51686 Reims, France  
e-mail : rezak.avad@univ-reims.fr

## Résumé

Ce travail de recherche à vocation technologique présente une approche innovante de conception optimisée des emballages dans un environnement virtuel utilisant les nouvelles technologies logicielles et numériques. Le Laboratoire Virtuel intègre la CAO, la simulation numérique, le prototypage rapide et virtuel, la numérisation 3D, la réalité virtuelle et le travail collaboratif. Pour une meilleure protection mécanique du couple « emballage – produit » depuis sa fabrication jusqu'à sa consommation d'une part, et pour une prévention à la source des déchets d'emballages d'autre part, le laboratoire virtuel contribuera par ses outils à réduire le poids et le volume en intégrant dans le processus de modélisation les contraintes logistiques (stockage, transport, ...).

## Abstract

This work presents an innovative design approach of packaging in a virtual environment using the new technologies (software, digital). The virtual laboratory integrates CAD, numerical simulation, rapid and virtual prototyping, 3D digitalizing, virtual reality and collaborative work. For a better mechanical protection of the "packaging-product" couple from its manufacturing to its final consuming on the one hand, and for prevention at the source of packaging waste on the other hand, the virtual

laboratory will contribute to reduce weights and volumes with integrating logistic constraints (storage, transports...) in the modelling process.

*Mots-clés:* Emballage, Modélisation, Protection mécanique, Optimisation

*Keywords:* Packaging, Modelling, Mechanical protection, Optimisation

## 1. INTRODUCTION

De nos jours, on ne peut parler d'emballages ou d'optimisation d'emballages, pour une meilleure protection du couple contenant-contenu lors du transport, sans prendre en considération l'ensemble des contraintes d'ordre mécanique auxquelles l'environnement immédiat se trouve soumis. L'emballage secondaire (caisse, ...) et l'emballage tertiaire (palette, ...), constituant l'environnement immédiat, sont ainsi concernés. L'ensemble « emballage primaire + secondaire + tertiaire » forme ce qu'il convient d'appeler aujourd'hui un « système d'emballages ».

Nous avons la conviction que la réussite d'une conception optimisée d'un système d'emballages conditionnera à l'avenir celle d'une logistique technique (transport, stockage, palettisation, manutention), condamnée à être maîtrisée

pour une meilleure protection mécanique de l'unité de vente consommateur contre les chocs, les vibrations et lors du gerbage.

Le marché est mondial, les cycles de vie des produits à consommer sont plus courts qu'avant, l'offre devient supérieure à la demande qui, de son côté, devient de plus en plus personnalisée... Autant de critères qui rendent complexe le processus de conception des systèmes d'emballages. Une coopération forte entre le fournisseur et le donneur d'ordre doit s'imposer afin de permettre une conception optimale du système dans un délai court.

Plusieurs aspects interviennent dans le processus de conception optimisée d'un système d'emballages. On y distingue les aspects marketing, design, économiques, socioculturelles, matériaux, mécanisation et logistique. Le concept de « laboratoire virtuel » est surtout associé à l'aspect matériau. Grâce à une meilleure utilisation de ses outils logiciels et numériques, il devient possible d'optimiser, pour une forme CAO acceptée par le donneur d'ordre, la quantité (en poids et en volume) de matériaux utilisés par le système d'emballages, sans trop affecter les propriétés de résistance mécanique. Nous aurions ainsi répondu aux exigences dictées par la directive européenne 94/62/CE du 20 décembre 1994 relative aux emballages et aux déchets d'emballages, en y accordant une priorité à la prévention et à la réduction à la source des emballages dans une perspective de développement durable.

## 2. POURQUOI UN LABORATOIRE VIRTUEL

Le marché des outils de conception du 3<sup>ème</sup> millénaire reste dominé par les secteurs traditionnels tels que la construction automobile, l'aéronautique, l'aérospatiale ou la défense. A l'heure où certains de ses secteurs de haute technologie tentent de mettre en place une approche de travail collaboratif, en mettant

en commun leurs bases d'informations et de connaissances, le secteur de l'emballage continue à se restreindre au seul domaine des essais pour valider les performances. J'ai toujours considéré que, dans un contexte de mondialisation et de globalisation des marchés, l'emballage, de part ses différentes fonctions qu'il doit toujours assumer (marketing, design, protection mécanique, physico-chimique, micro-biologique, conditionnement, mécanisation, logistique, recyclage et environnement en rapport avec les réglementations européennes et internationales), avait toute sa place dans l'utilisation de ses technologies numériques et logiciels du 3<sup>ème</sup> millénaire. Le laboratoire Virtuel que nous proposons va considérer l'emballage dans son ensemble, avec ses trois facettes (emballage primaire, secondaire et tertiaire), et en intégrant la plupart de ses fonctions. Il est basé sur le partage et le transfert de connaissances dans un environnement de travail collaboratif. L'idée du « Laboratoire Virtuel » remonte à 1999 [1]. Présenté aux 2<sup>èmes</sup> Journées Internationales de l'Emballage (Reims, 24-25 Mars), le laboratoire virtuel proposait d'étudier l'emballage primaire sans trop se soucier de son environnement immédiat c'est à dire l'emballage secondaire et l'emballage tertiaire, bien que ces deux derniers pouvaient également faire l'objet de conception par le laboratoire virtuel en question, mais séparément. Sous l'impulsion du Conseil National de l'Emballage (CNE), avec son guide de bonne pratique [2], motivée par la directive 94/62/CE relative aux emballages et aux déchets d'emballages, j'ai poussé la réflexion au-delà des trois facettes de l'emballage étudiées séparément puisque c'est du système d'emballage dont il s'agit. Le laboratoire virtuel devrait être en mesure d'apporter des solutions d'optimisation de ce système en vue d'une utilisation de chacun de ses éléments qui serait meilleure et respectueuse de l'environnement.

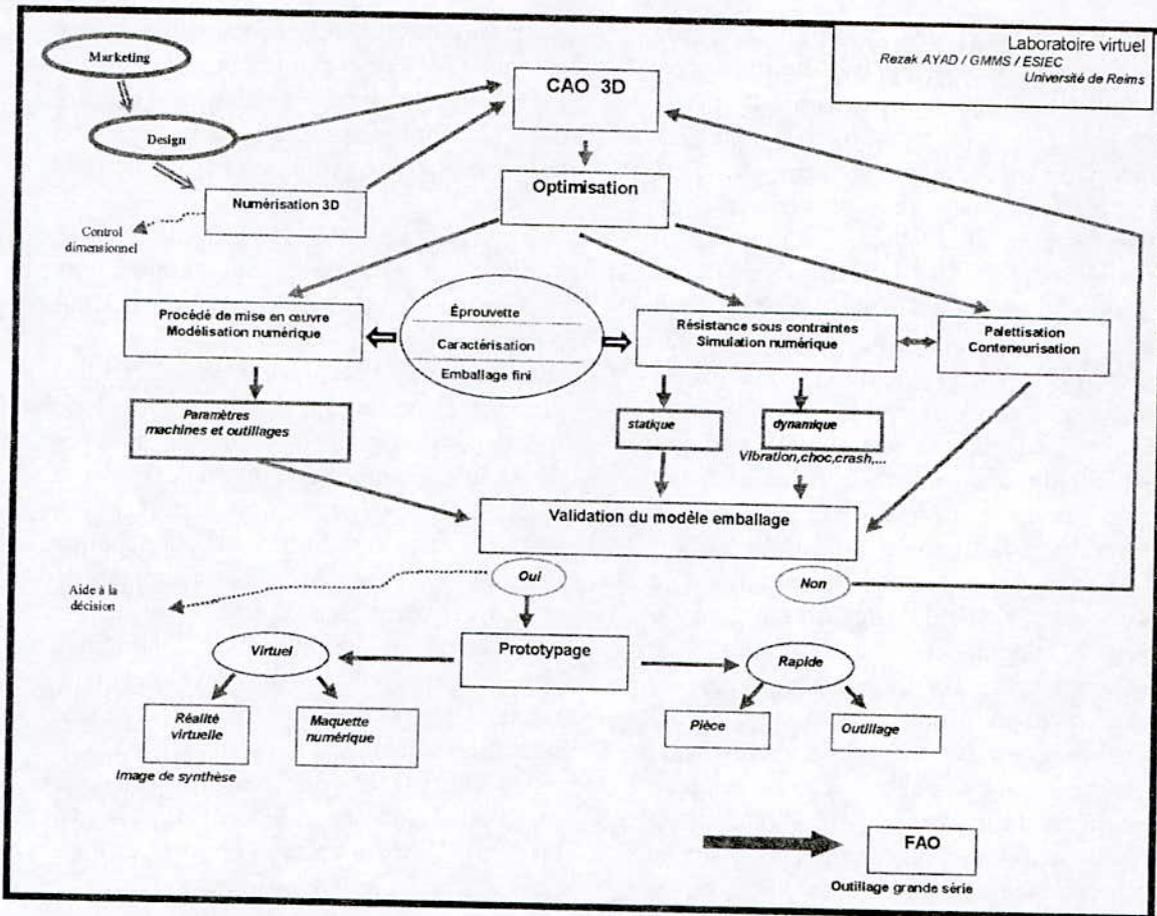


Fig. 1. Présentation du « Laboratoire Virtuel » pour l'emballage

#### A/ Le concept de Laboratoire Virtuel [3]

Sur la Figure 1 est présenté un organigramme dans lequel sont décrites les différentes technologies intervenant dans une opération de conception virtuelle d'un emballage ou d'un élément du système d'emballages. Nous pouvons ainsi donner une première définition simple et non exhaustive du laboratoire virtuel :

Il s'agit d'un ensemble d'outils de modélisation géométrique et mécanique (CAO et design, simulation numérique de l'emballage fini et de son procédé de mise en forme, prototypage virtuel, ...), de dispositifs d'essais pour élaborer des lois de comportement et de technologies

numériques (la numérisation 3D pour le reverse engineering, le prototypage rapide pour les pièces et les outillages, la réalité virtuelle pour décrire l'environnement d'utilisation de l'emballage, les outils TIC : Technologie de l'Information et de Communication pour le travail collaboratif de conception), dont la puissance est exploitée pour permettre une meilleure optimisation de la conception d'un emballage ou des éléments du système d'emballages.

Il s'agit d'une première approche de la conception d'un emballage, pensée par un génie mécanicien. Pour réussir, un projet de conception devra réunir des

informaticiens, des designers, des mécaniciens, des spécialistes en matériaux d'emballage (polyméristes, plasturgistes, cartonniers, verriers, etc ...), tous les matériaux sont pratiquement présents dans l'emballage) et des spécialistes en modélisation. Le laboratoire propose un plateau virtuel, dans lequel un cahier des charges fonctionnelles de l'emballage à concevoir est mis à la disposition des différents acteurs intervenant dans le processus de conception. Ces mêmes acteurs, quelque soit leur position géographique, peuvent appartenir à un même groupe industriel, ce qui facilitera la tâche de travail collaboratif, ou appartenir à d'autres groupes, partenaires du projet de conception, disposés à mettre en commun ou à échanger leurs bases de connaissances. Un Internet sécurisé est nécessaire pour permettre à ces acteurs d'échanger leurs connaissances et leurs expériences. Chaque acteur viendra récupérer sur le plateau virtuel l'emballage et apportera sa contribution, tout en le remettant sur ce même plateau de façon à ce qu'un autre acteur puisse le reprendre et apporter de son côté sa contribution. Cet échange collaboratif d'informations est un sujet d'actualité qui a beaucoup de mal à s'imposer, peut-être par crainte de perdre des informations (non respect de la confidentialité), car l'Internet actuel ne peut pas garantir la protection.

#### *A. Le laboratoire virtuel et les emballages de transport*

Dans la plus part des cas, les emballages secondaires et tertiaires de transport (carton ondulé, bois, calage en carton ou en mousses plastiques) devront être conçus de façon à réduire le poids et/ou le volume tout en conservant leurs fonctions de protection mécanique lors des opérations logistiques (stockage, manutention, transport). Ces emballages subissent diverses sollicitations mécaniques. Les plus répandues sont le gerbage, les chocs et les vibrations. Les

matériaux constituant ces emballages sont soumis à des déformations souvent irréversibles pouvant générer des défauts dont la conséquence est la destruction du couple emballage - produit.

L'évolution de ces défauts dans le système d'emballages au cours des opérations de transport et de stockage conduit à la création de zones endommagées provoquant une perte des propriétés mécaniques. L'emballage de transport n'est plus en mesure de protéger le produit. La modélisation numérique (un outil du laboratoire virtuel) du comportement statique et dynamique vibratoire et rapide des éléments du système d'emballages doit être en mesure de fixer des limites de dommage permettant d'éviter un développement rapide des défauts mécaniques. Cette opération étant virtuelle, nous pouvons ainsi intervenir directement dans la conception amont des emballages de transport, voire même de l'emballage primaire en contact avec le produit.

La modélisation numérique utilise une méthode aux éléments finis de coque avec effet de cisaillement transversal [4] et de solide 3D pour les composites mono ou multi-matériaux. Des techniques d'homogénéisation [5] pour élaborer des lois de comportement sont nécessaires pour le cas par exemple du carton ondulé, en raison de son caractère multicouches. Les modèles de comportement doivent prendre en compte la plasticité des matériaux du fait des non-linéarités présentes (matérielles, contact) lorsque un emballage de transport se trouve soumis à une compression verticale ou un gerbage importants, à des chocs ou à des vibrations.

- Une première modélisation concerne le comportement statique des emballages de transport. Il faudra tout d'abord identifier les mécanismes d'endommagement et leur chronologie, développer une

méthodologie expérimentale nécessaire à l'identification de l'essai concernant la RCV (Résistance à la Compression Verticale). Les paramètres hygrométriques doivent être pris en compte. Des modèles éléments finis 3D type SFR (Space Fiber Rotation) [6], assez précis pour un nombre de ddl réduits, étendus aux cas des composites massifs avec la prise en compte des non-linéarités géométriques et matérielles, peuvent être utilisés pour la modélisation des calages. Les autres éléments d'emballage dont l'épaisseur est petite devant les autres dimensions seront considérés comme des coques avec la prise en compte des effets du cisaillement transversal. Une étude de flambage et de post-flambage permet en effet d'estimer qualitativement la RCV.

- Un second problème relève de la dynamique rapide. Il s'agit de modéliser le comportement des emballages secondaires et tertiaires lorsqu'ils subissent des chocs lors de la manutention et du transport. La modélisation prendra en compte l'amortissement du matériau.
- La modélisation du comportement dynamique vibratoire est une étape très importante dans le processus de conception des emballages de transport. Elle devra rendre compte de la capacité des différents éléments du système d'emballages à absorber des vibrations sinusoïdales ou aléatoires. C'est une étape qui nécessite la connaissance du facteur d'amortissement des différents matériaux présents.

Les travaux scientifiques qui seront menés par le laboratoire virtuel en matière de modélisation numérique devront conduire à des outils métiers dédiés à la filière de l'emballage de transport. Ces outils permettront de prédire la RCV en fonction du type de matériau (kraft, recyclé, mixte,

...), d'estimer la capacité d'un élément du système d'emballages à amortir les vibrations induites par le transport et à absorber les chocs lors de la manutention et du transport.

### 3. CONCLUSION

Parler aujourd'hui de Laboratoire Virtuel pour le secteur de l'emballage est prématuré. A l'heure où les secteurs traditionnellement utilisateurs des technologies du laboratoire virtuel (Fig. 1) tentent d'unir leurs efforts de recherche et développement, en mettant en commun leur savoir faire, les acteurs de l'emballage s'interrogent encore sur le rôle de chacune des technologies dans le processus de conception. Pourtant les fonctions d'un emballage sont plus nombreuses que celles des éléments d'une voiture ou d'un avion. Une bouteille d'eau minérale 1.5 litre en PET qui se doit d'être esthétique et d'assurer une protection mécanique, physico-chimique et microbiologique du contenu est tout d'abord injectée, étirée, soufflée, remplie d'eau, fermée, étiquetée, regroupée avec d'autres bouteilles, mécanisée, palettisée, gerbée, transportée, distribuée, compactée et recyclée après consommation : des contraintes mécaniques subies plus nombreuses que celles par exemple d'un tableau de bord de voiture qui est seulement injecté et qui doit être esthétique et résistant aux chocs et crash, le recyclage n'étant pas facile à obtenir. Je reste convaincu que l'emballage a toute sa place dans le laboratoire virtuel, les pressions importantes du marché, le coût affaibli du travail et la qualité croissante de la concurrence, associés aux directives européennes et internationales sur la prévention des déchets d'emballage montrent que l'on peut encore continuer à œuvrer dans la baisse en poids et en volume des emballages pour un environnement meilleur. Les outils CAO, prototypage rapide et particulièrement la simulation numérique du comportement mécanique sous diverses contraintes, de la

fabrication à la fin de vie, permettent d'atteindre cet objectif. Ils devront faire l'objet d'étude et d'évaluation auprès des fabricants et des utilisateurs d'emballages pour aboutir un consensus sur une utilisation plus fréquente. N'oublions pas ! L'emballage de transport reste la meilleure garantie pour pérenniser un développement durable

#### 4. REFERENCES

- [1] AYAD R., NOBRE A. et CUNIN D.; (1999), Conception, Modélisation et Prototypage pour l'Emballage: des outils d'aujourd'hui et de demain, actes des 2èmes Journées Internationales de l'Emballage, 24-25 mars, Reims, France
- [2] Conseil National de l'Emballage (2000), Mise en œuvre de la prévention lors de la conception et de la fabrication des emballages, Manuel des meilleures pratiques édité par le conseil national de l'emballage, Paris, France.
- [3] AYAD R., (2002), The concept of Virtual Laboratory for packaging optimisation design, Proceedings of the 13th WORDPACK conference, 14-18 juin 2002, Michigan, USA.
- [4] AYAD R., ERRE D., HENDOU H., ODOF S. et PRUDHOMME J.C. (2003), Adaptation du modèle DDM aux structures orthotropes. Application aux vibrations libres d'une plaque en carton nodule, Actes du 16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 1-5 septembre 2003, Nice
- [5] ALLAOUI S., (2002), Caractérisation expérimentale et modélisation du comportement élastique d'une structure sandwich de type carton ondulé, Rapport de DEA, UTC, septembre 2002 (encadrement: M. Benzeggagh et Z. Aboura), (Collaboration Université de Reims – UTC – Université Paris 8).
- [6] AYAD R., (2003), Un Elément Fini Solide 3D à 8 nœuds basé sur le modèle SFR (Space Fiber Rotation), Actes du 16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, 1-5 septembre 2003, Nice

**FORMULATION MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME DE COUPLAGE  
THERMO-HYGRO-MÉCANIQUE EN MILIEUX POREUX NON SATURÉS  
Application au cas des matériaux de construction des bâtiments**

**Abdenour ALLICHE**

Maître de Conférences – HDR Laboratoire LM2S  
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6

**Résumé** - Les matériaux utilisés dans la construction des bâtiments sont des matériaux poreux. Ils se dilatent sous l'effet de la chaleur, se gonflent en absorbant l'eau ou se rétractent sous l'effet du froid. Ces mouvements différentiels génèrent des tensions notamment dans les assemblages hétérogènes comme les enduits minces sur isolants ce qui peut provoquer des fissures. L'amélioration des performances de ces matériaux nécessite l'étude de leur comportement sous sollicitations combinées thermiques, hydriques et mécaniques.

Nous avons, dans cet optique, élaboré un modèle de couplage simulant la réponse des matériaux poreux soumis aux trois sollicitations précédemment citées. Cette modélisation est basée sur la théorie de la Mécanique des Milieux Poreux non Saturés en tenant compte de certaines hypothèses simplificatrices justifiées dans le cas des bâtiments. Le modèle sert de base à une formulation numérique comprenant une discrétisation en espace par la méthode de Galerkin, une discrétisation temporelle par la méthode des différences finies avec un schéma implicite et un calcul non linéaire en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Ce modèle numérique a été introduit dans le code aux éléments finis 'SYMPHONIE-CSTB'. Deux cas de simulation sur des parois de structure de bâtiment ont été traités pour illustrer le modèle. Ces simulations sont relatives au séchage du mur et à la condensation de vapeur d'eau sur une paroi.

**Mots Clés** : Milieux poreux, Éléments finis, Humidité, Thermique, Mécanique et Modélisation.

## I. INTRODUCTION

Les transferts couplés de chaleur et d'eau (sous formes liquide et gazeuse) associés aux mouvements différentiels des structures sont la cause de nombreux cas de pathologie dans les bâtiments. On remarque par exemple que les sollicitations hydriques peuvent être à l'origine de déperdition de chaleur due à la diminution des propriétés isolantes des matériaux par condensation de la vapeur d'eau dans certaines conditions de pression et d'hygrométrie. Des fissures peuvent apparaître sur les façades de bâtiment dues aux effets du retrait de dessiccation ou au gonflement et aussi au gradient de température entre différentes zones de la structure.

Par conséquent, l'étude du comportement thermo-hydro-mécanique des matériaux de bâtiment est

indispensable pour l'amélioration de leurs performances.

Cependant, il est difficile de reproduire en laboratoire, ces phénomènes sur des structures à l'échelle réelle. Il est donc nécessaire de recourir à la modélisation de ces structures soumises à des sollicitations combinées thermiques, hydriques et mécaniques.

De nombreuses études ont été publiées sur ce sujet. Nous pouvons distinguer deux approches : La première approche utilise la technique de l'homogénéisation pour l'écriture des lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Ce type d'approche est principalement utilisé dans le domaine des sols (Laloui, 1993; Modaressi, 1989; Schrefler, 1990, 1993, 1995)

La seconde approche utilise la théorie de la Mécanique des Milieux Poreux. Cette théorie est fondée sur le modèle macroscopique poroélastique de Biot (1977), modèle qui a été entièrement remplacé dans un cadre thermodynamique global et généralisé au cas des comportements non linéaires et intrinsèquement irréversibles par Olivier Coussy (1991). (Fauchet (1991), Giraud (1993), Cosenza (1996) et Bary (1996)). Les milieux non saturés ont fait l'objet de recherches limitées au cas isotherme (Lassabatère 1994)

En analysant les modèles traités par ces deux approches, il semble que la théorie de la Mécanique des Milieux Poreux est mieux indiquée pour la modélisation des problèmes couplés. Elle offre un cadre systématique et adéquat pour la formulation des lois de comportements dans un milieu poreux lorsque les transferts de masse et de chaleur sont couplés avec la mécanique.

## II. MODELE DU COUPLAGE THERMO-HYGRO-MÉCANIQUE

Notre modèle traite des problèmes de couplage thermo-hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés avec une application au cas des mortiers de ciment. Sa formulation est construite par application successive des lois de conservation de masse, de la chaleur et de la quantité de mouvement, des principes de la thermodynamique des milieux continus ouverts et par introduction des hypothèses simplificatrices propres aux structures du bâtiment.

Sa formulation est basée sur la Mécanique des Milieux Poreux (Coussy 1991, 1995). Les équations du modèle nécessitent la manipulation de très nombreux paramètres. Nous avons donc été amenés à

formuler certaines hypothèses simplificatrices propres aux matériaux et aux structures de bâtiment.

#### A. Hypothèses simplificatrices du modèle

Les principales hypothèses de base sur lesquelles est bâti le modèle thermo-hygro-mécanique du milieu poreux non saturé sont les suivantes :

Le milieu poreux est composé de trois phases ; la phase solide (indice  $s$ ), la phase liquide (indice  $l$ ) ne contenant que de l'eau pure, la phase gazeuse (indice  $g$ ) comportant un mélange d'air sec (indice  $a$ ) et de vapeur d'eau (indice  $v$ ). Le milieu poreux est homogène, isotrope et supposé avoir un comportement thermo-poro-élastique non linéaire. L'évolution du système est quasi-statique. Les transformations sont infinitésimales pour le squelette. La phase gazeuse se comporte comme un mélange idéal de gaz parfaits. La phase liquide est incompressible. La matrice solide est chimiquement inerte vis-à-vis du fluide contenu dans les pores. La seule réaction chimique qui se développe dans le milieu poreux est le changement de phase liquide-vapeur. Le phénomène d'hystérésis des courbes de sorption n'est pas pris en compte. Les lois de conduction de la chaleur et de la masse fluide sont découplées. Le transport convectif de la chaleur lié au fluide est négligé. Le milieu est supposé en équilibre thermodynamique local. La pression totale de la phase gazeuse est uniforme, constante et supposée égale à la pression atmosphérique 0.

#### B. Équations constitutives du modèle

Les équations qui régissent un problème d'évolution quasi-statique en thermo-poro-élastique non linéaire sont :

Les lois de conservations :

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\operatorname{div} \sigma + \rho F = 0 \quad (1)$$

Équation de conservation de masse de fluide

- pour la phase vapeur,

$$\frac{dm_v}{dt} = -\operatorname{div} \omega_v + m_{l \rightarrow v} \quad (2)$$

- pour la phase liquide,

$$\frac{dm_l}{dt} = -\operatorname{div} \omega_l - m_{l \rightarrow v} \quad (3)$$

Équation de conservation de la chaleur

$$T \left[ \frac{dS}{dt} - s_i^m \dot{m}_i + \frac{L}{T} m_{l \rightarrow v} \right] = -\operatorname{div} q + r \quad (4)$$

Les lois de comportements :

Loi de Darcy pour le transfert de la phase liquide

$$\frac{\omega_l}{\rho_l} = \pi_l (-\operatorname{grad} P_l + \rho_l F) \quad (5)$$

Loi de Fick simplifiée pour le transfert de la phase vapeur

La loi de Fick simplifiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\omega_v}{\rho_v} = -F \operatorname{grad} C_v$$

Or,  $C_v = \frac{\rho_v}{\rho_g} = \frac{P_v}{P_g}$  et en considérant l'hypothèse

d'une pression constante de la phase gazeuse ( $P_g = P_{atm} = Cte.$ ), la loi de Fick simplifiée peut s'écrire alors sous la forme :

$$\frac{\omega_v}{\rho_v} = -\frac{F}{P_g} \operatorname{grad} P_v$$

En posant  $\pi_v = \frac{F}{P_g}$ , la loi de conduction de la phase

vapeur s'écrit finalement sous la forme :

$$\frac{\omega_v}{\rho_v} = -\pi_v \operatorname{grad} P_v \quad (6)$$

Loi de Fourier pour le transfert de la chaleur

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T \quad (7)$$

Loi de comportement thermo-poro-élastique non linéaire (sous forme incrémentale)

$$d\sigma = \left( K^d - \frac{2}{3} G \right) \operatorname{trac}(d\varepsilon) \mathbf{1} + 2G d\varepsilon - b_l dP_l - 3\alpha_l^d K^d dT \quad (8)$$

$$\frac{dm_i}{\rho_i} = N_{ij} dP_j + b_i \operatorname{trac}(d\varepsilon) - 3\alpha_i^d dT \quad (9)$$

$$dS - s_i^m dm_i = 3\alpha_l^d K^d \operatorname{trac}(d\varepsilon) - 3\alpha_l^d dP_l + \frac{C_\varepsilon^d}{T} dT \quad (10)$$

Loi de changement de phases

Sous l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local on obtient une égalité des enthalpies de la phase vapeur d'eau et de la phase liquide. Ceci se traduit par la loi de Kelvin qui s'écrit sous la forme :

$$P_l - P_{atm} = \rho_l r_v T \ln \left( \frac{P_v}{P_{vsat}} \right)$$

En combinant cette équation avec la loi de Clapeyron définie par :

$$\frac{dP_{vsat}}{dT} = \frac{L P_{vsat}}{r_v T^2}$$

on obtient alors la loi de changement de phases qui s'écrit sous la forme incrémentale suivante :

$$\frac{dP_l}{\rho_l} = \frac{dP_v}{\rho_v} + \left( r_v \ln(h) - \frac{L}{T} \right) dT$$

Avec  $h = P_v / P_{vsat}$  = humidité relative

C. Équations de champs du modèle

L'introduction des lois de comportement ((5) à (11)) dans l'équation d'équilibre mécanique (1), équation de conservation de la chaleur (4) et équation de conservation de la masse ((2) + (3)) d'une part et la prise en compte de l'hypothèse d'une pression constante de la phase gazeuse d'autre part, aboutissent aux équations différentielles du modèle. Ceci comporte une équation d'équilibre mécanique, et deux équations de diffusion thermique et hydrique. Ces trois équations s'écrivent de la manière suivante :

Equation d'équilibre mécanique

$$\left( K^d + \frac{4}{3}G \right) \text{grad}(\text{div}(\mathbf{u})) - \text{Grot rot}(\mathbf{u}) - b_l \frac{\rho_l}{\rho_v} \text{grad}(P_v) - \left[ b_l \rho_l r_v \left( \ln(h) - \frac{L}{r_v T} \right) + 3\alpha_l^d K^d \right] \text{grad}(T) + (\rho F) = 0 \quad (11)$$

Equation de diffusion de la chaleur

$$\lambda \text{div}(\text{grad}T) + L \rho_v \pi_v \text{div}(\text{grad}P_v) = (3\alpha_l^d K^d T + L \rho_l b_l) \text{div}(\dot{\mathbf{u}}) + \left[ L \rho_l N_{vl} + L \rho_v (N_{vv} - N_{va}) - 3 \frac{\rho_l}{\rho_v} \alpha_l^p T \right] \dot{P}_v + \left[ C_e^d - 3L \rho_v \alpha_v^p + (L \rho_l \rho_v N_{vl} - 3 \rho_l \alpha_l^p T) r_v \left( \ln(h) - \frac{L}{r_v T} \right) \right] \dot{T} - r \quad (12)$$

Equation de diffusion de l'humidité

$$\text{div} \left( \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \pi_l + \rho_v \pi_v \right) \text{grad}(P_v) + \rho_l^2 \pi_l r_v \left( \ln(h) - \frac{L}{r_v T} \right) \text{div}(\text{grad}T) = (\rho_l b_l + \rho_l b_v) \text{div}(\dot{\mathbf{u}}) + \left[ \frac{\rho_l}{\rho_v} (\rho_l N_{ll} + \rho_v N_{vl}) + \rho_v (N_{vv} - N_{va}) \right] \dot{P}_v + \left[ (\rho_l N_{ll} + \rho_v N_{vl}) \rho_l r_v \left( \ln(h) - \frac{L}{r_v T} \right) - 3 (\rho_l \alpha_l^p + \rho_v \alpha_v^p) \right] \dot{T} + \rho_l^2 \pi_l \text{div}(F) \quad (13)$$

Ces trois équations peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} - \mathbf{K}_{uP} \text{grad}(P_v) - \mathbf{K}_{uT} \text{grad}(T) + \mathbf{F}_u = 0 \quad (14)$$

$$\text{div}(\mathbf{K}_{TT} \text{grad}(T)) + \text{div}(\mathbf{K}_{TP} \text{grad}(P_v)) = (15)$$

$$M_{Tu} \text{div}(\dot{\mathbf{u}}) + M_{TP} \dot{P}_v + M_{TT} \dot{T} + F_T$$

$$\text{div}(\mathbf{K}_{PP} \text{grad}(P_v)) + \text{div}(\mathbf{K}_{PT} \text{grad}(T)) = (16)$$

$$M_{Pu} \text{div}(\dot{\mathbf{u}}) + M_{PP} \dot{P}_v + M_{PT} \dot{T} + F_P$$

Les termes introduits dans ces équations sont définis dans l'Annexe I.

#### D. Conditions aux limites

Les conditions aux limites adoptées dans notre modèle sont de trois types : mécanique, hydrique et thermique. Elles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

Conditions aux limites mécaniques

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j = T_i^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (17)$$

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u$$

Conditions aux limites thermiques

$$T(\mathbf{x}, t) = T^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T$$

$$q(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = q^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (18)$$

$$q(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = h_T (T(\mathbf{x}, t) - T_a) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{h_T}$$

Conditions aux limites hydriques

$$P_v(\mathbf{x}, t) = P_v^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_P$$

$$\omega_v(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \omega^d(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\omega \quad (19)$$

$$\omega_v(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = h_P (P_v(\mathbf{x}, t) - P_w(t)) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{h_P}$$

E. Conditions initiales

A l'état initial ( $t = t_0$ ) on a :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad P_v(\mathbf{x}, t_0) = P_{v0}(\mathbf{x})$$

$$T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (20)$$

Les inconnues du modèle sont les champs de déplacements ( $\mathbf{u}$ ), de température ( $T$ ) et de pression partielle de vapeur d'eau ( $P_v$ ). Le problème consiste à trouver l'évolution de ces variables pour un milieu poreux dont on connaît sa géométrie, son état initial et son environnement thermodynamique extérieur.

F. Paramètres du modèle

Le modèle ainsi élaboré implique l'identification de nombreux paramètres. Ceci constitue un travail complexe et difficile. La méthode d'homogénéisation (Lassabatère 1994 et Coussy 1995) permet de relier certains paramètres de la loi de comportement macroscopique du modèle avec les caractéristiques physiques, plus ou moins connues, des différents constituants du matériau pris isolément. Ceci permet de réduire le nombre des paramètres à identifier expérimentalement. Des procédures validées de type expérimental et théorique ont été utilisées pour déterminer leurs valeurs et leur évolution en fonction de la variation des sollicitations dans le cas du mortier de ciment.

### III. FORMULATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE

Afin de résoudre le système d'équations ((15), (16) et (17)) aux dérivées partielles non symétriques et non linéaires du modèle, nous avons adopté la méthode

des éléments finis [cf. Advani 1993, Laloui 1993, Schrefler 1995].

La formulation numérique du modèle a été réalisée en trois étapes : La première étape consiste à formuler les équations (15), (16) et (17) sous forme variationnelle en tenant compte des conditions aux limites et de la loi de changement de phase. En deuxième étape, les équations écrites sous forme variationnelle sont ensuite discrétisées en utilisant la méthode classique de Galerkin. Le système d'équations s'écrit alors sous la forme matricielle élémentaire suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [C_{uT}] & [C_{uP}] \\ [0] & [K_{TT}] & [G_{TP}] \\ [0] & [G_{PT}] & [K_{PP}] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \\ \{P\} \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M_{Tu}] & [M_{TT}] & [M_{TP}] \\ [M_{Pu}] & [M_{PT}] & [M_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{T}\} \\ \{\dot{P}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_T\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Enfin, la discrétisation temporelle, constituant la troisième étape, a été réalisée en utilisant la méthode des différences finies avec un schéma implicite qui est inconditionnellement stable en général. Le système d'équations global obtenu après assemblage des systèmes d'équations élémentaires

$$[A]_{n+1} X_{n+1} = [B]_n X_n + F_{n+1} \quad (22)$$

Avec :

$$[A] = \sum_{e=1}^{NE} \begin{bmatrix} [K_{uu}]_e & [C_{uT}]_e & [C_{uP}]_e \\ [M_{Tu}]_e & [M_{TT}]_e + \Delta t [K_{TT}]_e & [M_{TP}]_e + \Delta t [G_{TP}]_e \\ [M_{Pu}]_e & [G_{PT}]_e + \Delta t [M_{PT}]_e & [M_{PP}]_e + \Delta t [K_{PP}]_e \end{bmatrix}$$

$$[B] = \sum_{e=1}^{NE} \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [M_{Tu}]_e & [M_{TT}]_e & [M_{TP}]_e \\ [M_{Pu}]_e & [M_{PT}]_e & [M_{PP}]_e \end{bmatrix}$$

$$F = \sum_{e=1}^{NE} \begin{bmatrix} \{F_u\}_e \\ \Delta t \{F_T\}_e \\ \Delta t \{F_P\}_e \end{bmatrix}$$

$$X_n = \langle u_1, T_1, P_1, \dots, u_{NT}, T_{NT}, P_{NT} \rangle$$

(NT correspond au nombre total des nœuds)

Dans le système d'équations (21) les lignes des matrices correspondent aux équations d'équilibre mécanique, de diffusion de la chaleur et de diffusion de la masse alors que les colonnes sont relatives aux degrés de liberté, déplacements, température et pression partielle de vapeur d'eau.

Le problème d'évolution consiste maintenant à déterminer  $X_{n+1}$  vérifiant le système équations (21) et connaissant  $X_n$ . Or, ce système d'équations est un système fortement non linéaire. Les coefficients de ce système sont fonction de la variable d'état que nous cherchons à déterminer. Pour pouvoir résoudre ce problème, nous avons choisi la méthode incrémentale et itérative de Newton-Raphson.

Pour chaque incrément de temps, le processus itératif est arrêté lorsque la norme des moindres carrés ( $\|n\|$ )

définie par :  $\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta X^{i+1} \rangle \langle \Delta X^{i+1} \rangle}}{\sqrt{\langle X^{i+1} \rangle \langle X^{i+1} \rangle}}$  est inférieure à

la tolérance  $\varepsilon$  :  $\|n\| \leq \varepsilon$ .

D'une façon générale si la tolérance  $\varepsilon$  est inférieure à 0,001, on obtiendra une convergence satisfaisante et on pourra alors passer à l'incrément de temps suivant. Le modèle numérique a été intégré ensuite dans un code de calcul aux éléments finis) où nous avons pu effectuer des simulations numériques.

#### IV SIMULATIONS NUMÉRIQUES

##### Séchage d'une paroi mince

Nous simulons dans cet exemple le séchage d'une paroi mince en mortier de ciment d'épaisseur 4 cm, de longueur et hauteur dites infinies. Son état initial est caractérisé par une température  $T=20^\circ\text{C}$  et une humidité relative  $h=80\%$  correspondant à une pression partielle de vapeur d'eau égale à 1835 Pa.

Les parois extérieures, libres de tout effort, sont mises en contact avec l'environnement extérieur défini par une température  $T=20^\circ\text{C}$  et une humidité relative  $h=50\%$  correspondant à une pression partielle de vapeur d'eau égale à 1140 Pa.

Les échanges hydriques et thermiques entre la paroi et l'environnement extérieur sont conditionnés respectivement par les coefficients d'échanges convectifs  $h_H$  et  $h_T$  qui sont régis par :

$Q_p \cdot n_e = h_T (T - T_{amb})$  pour la densité de flux de chaleur,

$M_p \cdot n_e = h_H (P_v - P_{v,amb})$  pour la densité de flux de l'humidité.

Les valeurs des coefficients  $h_H$  et  $h_T$  sont choisies de l'ordre de grandeur des valeurs que l'on prend habituellement pour l'enveloppe d'un bâtiment. Nous avons utilisé les valeurs données par Kunzel 1995.

La géométrie de la paroi mince, les conditions initiales et les conditions aux limites sont présentées sur le Schéma 1 :

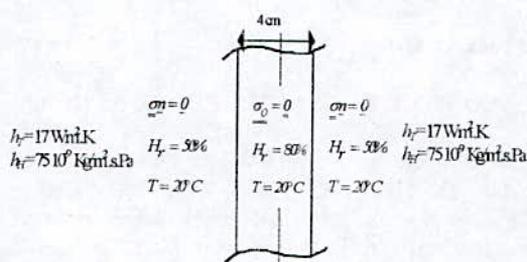


Schéma 1 : configuration initiale de la paroi mince

Le schéma 1 montre que le problème de séchage de la paroi mince est symétrique et unidirectionnel. Nous sommes donc amenés à simuler la moitié de la paroi. Cette simulation numérique est effectuée sur une section de ce mur. Les éléments choisis pour mailler cette section sont des éléments quadrilatéraux à 4 nœuds.

Les calculs sont menés avec l'hypothèse de déformations planes. Le pas de temps est choisi constant et égal à  $10^7$  s.

#### Influence de phénomène du séchage sur le comportement mécanique

Le phénomène du séchage produit ainsi un retrait de dessiccation. Étant empêché suivant les directions perpendiculaires à l'axe x de la paroi, ce retrait provoque des contraintes de traction suivant les deux axes y et z tel que  $\sigma_y = \sigma_z$ .

Nous avons tracé sur la Figure 2 les profils de la contrainte de traction  $\sigma_y$  sur la section de la paroi à des instants différents.

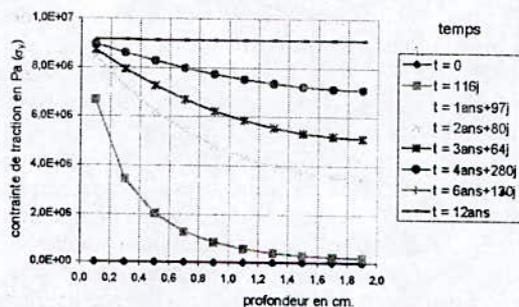


Figure 2 : profil de la contrainte de traction sur la section de la paroi

Nous remarquons que la contrainte de traction dépasse rapidement la limite de rupture du mortier (qui est de l'ordre de 5 MPa). Ceci pourrait provoquer l'apparition de fissures dans la paroi.

#### Condensation sur une paroi

Pour cet exemple nous étudions le cas d'un mur (cf. Schéma 2) d'épaisseur 10 cm séparant deux ambiances différentes. La hauteur de ce mur encastré en haut et en bas est 3 m.

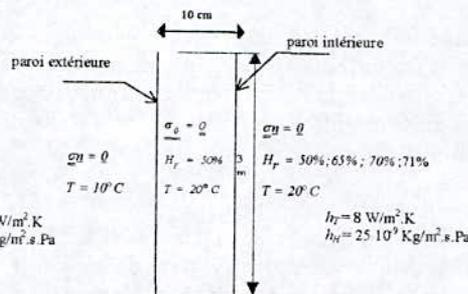


Schéma 2 : présentation du mur étudié

La paroi intérieure est en contact avec l'ambiance de la pièce intérieure avec les coefficients d'échange thermique et hydrique suivants :  $h_T = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$  et  $h_H = 25 \cdot 10^9 \text{ Kg/m}^2\text{s.Pa}$ .

La paroi extérieure est considérée comme imperméable ( $h_H = 0$ ). Le coefficient d'échange thermique sur cette paroi est égal à  $17 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Les températures à l'intérieur et à l'extérieur du mur sont respectivement égales à  $20^\circ\text{C}$  et  $10^\circ\text{C}$ .

Nous évaluons, dans cet exemple, le risque de condensation envisagé sur la paroi intérieure du mur en fonction de l'humidité relative régnant à l'intérieur de la pièce. Elle prend successivement les valeurs suivantes :  $H_r = 50\%, 65\%, 70\%$  et  $71\%$ .

La simulation est effectuée sur la moitié du mur dont le maillage est réalisé à l'aide des éléments quadrilatéraux à 4 nœuds. Ce maillage est présenté sur le Schéma 4. Le pas de temps choisi pour le calcul est constant et égal à 1800 s.

- Sur la surface encastree (A) les déplacements horizontaux et verticaux ainsi que les flux thermique et hydrique sont imposés égaux à zéro.
- Sur la surface au milieu du mur (B) les déplacements verticaux et les le flux thermique et hydrique sont imposés égaux à zéro.

#### Courbes des variations de la température

Nous avons tracé sur la figure 3 les courbes d'évolution de la température en fonction du temps en différents points du mur.

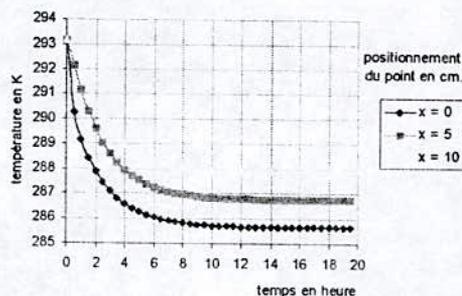


Figure 3 : évolution de la température en fonction du temps

Nous constatons sur cette figure qu'une durée de 10 heures est suffisante pour que le transfert de chaleur atteigne son régime permanent. Ces résultats sont les mêmes pour différentes valeurs de l'humidité de l'ambiance intérieure.

#### Calcul du risque de condensation

L'analyse des risques de condensation est basée sur une comparaison entre la pression de vapeur et celle de vapeur saturante qui est égale à 1630 Pa pour  $T = 287,84$  K. Sur la Figure 4, nous avons tracé, pour différentes humidités relatives régnant dans la pièce intérieure, les courbes d'évolution en fonction du temps de l'humidité relative obtenue sur la paroi intérieure.

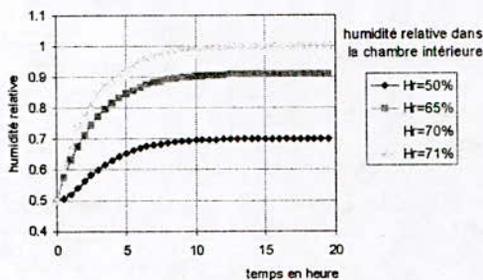


Figure 4 : courbes d'évolution de l'humidité relative en fonction du temps

Nous constatons, d'après cette figure que lorsque l'humidité relative dépasse 70%, une condensation superficielle apparaît sur la paroi intérieure au bout de 12 heures quand la température s'est stabilisée.

#### V. CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons présenté le modèle mathématique d'un problème de couplage thermo-hygro-mécanique en milieux poreux non saturés et la méthode de résolution des équations de ce modèle. Cette méthode de résolution a été implantée dans un code de calcul aux éléments finis dédié au génie civil. Ceci nous a permis d'effectuer des simulations numériques. Les résultats obtenus dans les différents cas étudiés semblent proches des résultats empiriques obtenus en laboratoire. Le code de calcul auquel nous avons intégré le couplage thermo-hygro-mécanique de notre modèle semble bien adapté à la résolution des problèmes de couplage en milieu poreux. Nous pensons avoir contribué à la réalisation d'un outil de conception et de calcul utile pour les ingénieurs concepteurs de bâtiment et d'ouvrage d'art. Cet outil permet d'analyser la réponse d'une structure face à des sollicitations combinées d'origine thermique, hydrique et mécanique. Il permet, par conséquent, de prédire les risques de fissuration et de condensation qu'engendre une sollicitation couplée appliquée sur les parois de construction des bâtiments.

#### REFERENCES

- ALONSO E.E., GENS A. & JOSA A. (1990) « A constitutive model of partially saturated soils » géotechnique 40, n°3, 405-430.
- ADVANI S.H., LEE T.S. & KIM C.S. (1993). « Hygrothermomechanical evaluation of porous media under finite deformation. Part I – Finite element formulations. » International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 147-160.
- BARY B. (1996) *Étude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé* Thèse de Doctorat de l'E.N.S. de Cachan.
- BIOT M. A. (1977) Variational Lagrangian-thermodynamics of non isothermal finite strain. Mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion International Journal of Solids and Structures, n°13, pp 579-597.
- BRUHAT G. (1962) *Thermodynamique*. Masson, Paris.
- COSENZA P. (1996) Sur les couplages entre comportement mécanique et processus de transfert de masse dans le sel de gemme. Thèse de Doctorat de l'Université Paris IV
- COUSSY O. (1995). *Mechanics of porous continua*. John Wiley & Sons
- COUSSY O. (1991). *Mécanique des milieux poreux*. Editions technip, Paris
- FAUCHET B. (1991). Analyse poroplastique des barrages en béton et de leurs fondations. Rôle de la pression interstitielle. Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées
- FREDLUND D.G. & RAHARJO H. (1985). « Theoretical context for understanding unsaturated residual soil behaviour », Tropical S'85
- GIRAUD A. (1993). Couplages Thermo-hydro-mécaniques dans les milieux poreux peu perméables : Application aux argiles profondes. Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées
- KUNZEL H.M. (1995). Simultaneous heat moisture transport in building components. One and two dimensional calculation using simple parameters. IRB verlag
- LALOU L. (1993). Modélisation du comportement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux anélastique. Thèse de Doctorat de l'École Centrale Paris
- LASSABATERE T. (1994). Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase- Application au retrait de dessiccation. Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées
- LLORET A., & ALONSO E.E. (1980). « Consolidation of unsaturated soils including

- swelling ancollapse soils* » Géotechnique 18, 492-448.
16. MODARESSI A. (1989). Modélisation du comportement du béton bitumineux : Application aux barrages en remblais. Thèse de Doctorat de L'École Centrale de Paris
  17. NICOLAS P. (1992) *Modélisation mathématique et numérique des transferts d'humidité en milieu poreux*  
Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.
  18. PERRIN B. (1984) *Étude des transferts couplés de chaleur et de masse dans des matériaux poreux consolidés non saturés utilisés en génie civil* Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse.
  19. SCHREFLER B.A. (1995) F.E. in environmental engineering: Coupled thermo-hydro-mechanical processes in porous media including pollutant transport Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 2, 3, 1-1. © 1995 by CIMM, Barcelona (Spain)
  20. SCHREFLER B.A. & ZHAN X. Y. (1993) *A fully Coupled Model for water flow and airflow in deformable porous media* Water Resources Research, vol. 29, n°. 1, pp 155-167
  21. SCHREFLER B.A., SIMONI L., XIKYUI L. & C.ZIENKIEWICZ O. (1990) *Mechanics of partially saturated porous media* Numerical Methods and Constitutive Modelling in Geomechanics. International Centre for Mechanics Sciences, © Springer Verlag, no°. 311
  22. SCHREFLER B.A., SIMONI L. & ZHAN X.Y. (1993) *Advances in heat and mass transfer simulation in deforming porous media* Computational Mechanics, Valliapan, Pulmano & Tin-Loi (eds), © 1993 Balkeman, Rotterdam

## Annexe I

$$K_{uu} = [\nabla]^T [D] [\nabla]$$

$$K_{up} = b_l \frac{\rho_l}{\rho_v}$$

$$K_{uT} = b_l \rho_l r_v (\ln H_r - L/r_v T) + 3\alpha_l^d K^d$$

$$K_{TT} = \lambda I$$

$$K_{TP} = L\rho_v \pi_v I$$

$$M_{Tu} = 3\alpha_l^d K^d T + L\rho_v b_v$$

$$M_{TT} = C_e^d - 3L\rho_v \alpha_l^d + (L\rho_l \rho_v N_d - 3\rho_l \alpha_l^d T) \left( r_v \ln H_r - \frac{L}{T} \right)$$

$$M_{TP} = L\rho_l N_{vl} + L\rho_v (N_{vv} - N_{va}) - 3 \frac{\rho_l}{\rho_v} \alpha_l^d T$$

$$K_{PP} = \left( \frac{\rho_l^2}{\rho_v} \pi_l + \rho_v \pi_v \right) I$$

$$K_{PT} = \rho_l^2 \pi_l r_v \left( \ln H_r - \frac{L}{r_v T} \right) I$$

$$M_{Pu} = \rho_l b_l + \rho_v b_v$$

$$M_{PP} = \frac{\rho_l}{\rho_v} (\rho_l N_{ll} + \rho_v N_{vl}) + \rho_v (N_{vv} - N_{va})$$

$$M_{PT} = (\rho_l N_{ll} + \rho_v N_{vl}) \rho_l \left( r_v \ln H_r - \frac{L}{T} \right) - 3(\rho_l \alpha_l^d + \rho_v \alpha)$$

$$F_u = \rho F$$

$$F_T = -r$$

$$F_p = \rho_l^2 \pi_l \operatorname{div}(F)$$

Où :

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

(dans le cas des déformations planes)

## ANNEXE II - Matrices et vecteurs élémentaires

Les sous matrices élémentaires sont définies par :

$$[K_u] = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

$$\text{avec } [B] = [\nabla][N_u]$$

$$[C_{up}] = \int_{\Omega^e} -K_{up} \{ \operatorname{div}[N_u] \} \langle N_p \rangle d\Omega$$

$$[C_{uT}] = \int_{\Omega^e} -K_{uT} \{ \operatorname{div}[N_u] \} \langle N_T \rangle d\Omega$$

$$[K_{PP}] = \int_{\Omega^e} \langle \partial N_p \rangle K_{PP} \{ \partial N_p \} d\Omega + \int_{\Gamma_{hp}^e} h_p \langle N_p \rangle \delta_y d\Gamma$$

$$[K_{TT}] = \int_{\Omega^e} \langle \partial N_T \rangle K_{TT} \{ \partial N_T \} d\Omega + \int_{\Gamma_{ht}^e} h_T \langle N_T \rangle \delta_y d\Gamma$$

$$[G_{TP}] = \int_{\Omega^e} \langle \partial N_T \rangle K_{TP} \{ \partial N_p \} d\Omega$$

$$[G_{PT}] = \int_{\Omega^e} \langle \partial N_p \rangle K_{PT} \{ \partial N_T \} d\Omega$$

$$[M_{PP}] = \int_{\Omega^e} -M_{PP} \{ N_p \} \langle N_p \rangle d\Omega$$

$$[M_{TT}] = \int_{\Omega'} -M_{TT} \{N_T\} \langle N_T \rangle d\Omega$$

$$[M_{pu}] = \int_{\Omega'} M_{pu} \{div[N_u]\} \langle N_p \rangle d\Omega$$

$$[M_{Tu}] = \int_{\Omega'} M_{Tu} \{div[N_u]\} \langle N_T \rangle d\Omega$$

$$[M_{PT}] = \int_{\Omega'} M_{PT} \{N_T\} \langle N_P \rangle d\Omega$$

$$[M_{TP}] = \int_{\Omega'} M_{TP} \{N_P\} \langle N_T \rangle d\Omega$$

Les vecteurs de second membre sont les suivants :

$$\{F_u\} = \int_{\Omega'} [N_u]^T F_u d\Omega + \int_{\Gamma^d} [N_u]^T T^d d\Gamma$$

$$\{F_p\} = \int_{\Omega^e} F_p \langle N_p \rangle d\Omega + \int_{\Gamma_w^e} \omega^d \langle N_p \rangle d\Gamma - \int_{\Gamma_{hp}^e} h_p P_a \langle N_p \rangle d\Gamma$$

$$\{F_T\} = \int_{\Omega'} F_T \langle N_T \rangle d\Omega + \int_{\Gamma_q^d} q^d \langle N_T \rangle d\Gamma - \int_{\Gamma_{hr}^e} h_r T_a \langle N_T \rangle d\Gamma$$

Les déplacements, la température et la pression dans un élément quadrilatère d'un problème bidimensionnel sont définies par

$$\mathbf{u} = [N_u]^T \{u\}, \quad T = \langle N_T \rangle \{T\}, \quad P = \langle N_P \rangle \{P\}$$

Avec :

$$\{u\} = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \rangle^T,$$

$$\{P\} = \langle P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \rangle^T, \quad \{T\} = \langle T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \rangle^T$$

$$[N_u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix},$$

$$\langle N_P \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle, \quad \langle N_T \rangle = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle$$

### ANNEXE III - Nomenclature

#### Indice

l     liquide  
v     vapeur  
a     air sec  
i = 1, a, v

$\langle \rangle$    vecteur ligne

$\{ \}$    vecteur colonne

#### Lettres romanes

t     temps  
 $h_i$    coefficient de Biot du fluide i  
 $N_{ij}$    module capillaire tangent qui est l'inverse du module de Biot  
 $C_c^d$    chaleur volumique à déformation constante en conditions drainées  
 $K^d$    Module d'incompressibilité du milieu en conditions drainées  
G     Module de cisaillement

E     module d'Young  
F     coefficient de Fick associé à la diffusion de la phase vapeur dans le mélange gazeux  
 $C_v$    concentration de la phase vapeur dans le mélange  
r     densité volumique de la source de chaleur extérieure  
 $r_v = R / M_v$ ,  
R     constante des gaz parfaits  
 $M_v$    masse molaire de l'eau vapeur  
L     chaleur latente de vaporisation

$N_u, N_T, N_P$	fonctions d'interpolation	$\rho_v$	masse volumique de la phase vapeur
<u>Lettres grecques</u>		$\rho$	masse volumique du milieu poreux
$\sigma$	tenseur des contraintes totales	$\pi_l$	coefficient de perméabilité liquide
$\varepsilon$	tenseur des déformations	$\pi_v$	coefficient de perméabilité vapeur
$\alpha_i^d$	coefficient de dilatation thermique du milieu poreux en conditions drainées	$\Omega$	domaine du système
$\lambda$	coefficient de conductivité thermique	$\Gamma$	frontière du domaine
$\nu$	coefficient de Poisson	$\omega_v$	vecteur courant de masse de la phase vapeur
$\alpha_i^p$	coefficient de dilatation thermo-hydrique en condition isochore et drainées	$\omega_l$	vecteur courant de masse de la phase liquide
$\Phi_0$	porosité		
$\rho_l$	masse volumique du liquide		

## Etude de l'influence des effets de Marangoni sur la croissance cristalline

F. Mokhtari\*, A. Bouabdallah\*, S. Hanchi\*\*, M. Zizi\*  
Laboratoire de Thermodynamique et des Systèmes Energétiques - USTHB

\*Faculté de physique, USTHB B.P 32 El-Alia 16111 Bab Ezzouar, Alger

\*\* UER Mécanique-EMP, B.P 17 Bordj El Bahri, Alger

Email : [faizacrystal@yahoo.fr](mailto:faizacrystal@yahoo.fr)

**Résumé** – Au cours du processus de croissance cristalline de type Czochralski (Cz), plusieurs forces agissent à différentes échelles, rendant le procédé difficile à contrôler et à caractériser. En raison de l'interaction de ces forces, plusieurs instabilités thermomécaniques peuvent s'introduire et modifier le procédé de transfert dans un bain de Czochralski. Celles-ci influencent en particulier, à leur tour, la qualité de la croissance cristalline. Le déséquilibre entre les forces en action est lié à une instabilité thermique dans le bain qui peut considérablement affecter la qualité du monocristal.

C'est dans ce contexte que l'on étudie l'influence de la convection de Marangoni provenant des effets de capillarité qui joue un rôle de grande importance sur le champ thermique et hydrodynamique dans le bain de Czochralski.

La modélisation phénoménologique est envisagée dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq pour résoudre les équations de transfert de masse, de chaleur, et de quantité de mouvement. Dans ce but on utilise le logiciel Fluent pour développer un modèle instationnaire de simulation numérique adapté au choix du système de coordonnées retenu. Les calculs effectués permettent d'accéder à l'évolution des fonctions courant et vorticité ainsi que le champ de température associé au sein de l'écoulement. La validation du modèle se fait à partir des données disponibles dans la littérature.

**Mots clés** : croissance cristalline, Czochralski, surface libre, convection de Marangoni, simulation numérique, Fluent.

### I. INTRODUCTION

La stabilité d'écoulement dans les bains de Czochralski a un impact direct sur les micro et macro défauts dans les cristaux ; Les striations et variations microscopiques de concentration sont le résultat du mouvement oscillatoire de l'interface due à l'instabilité thermo convective dans le bain. Les perturbations provoquées par ces instabilités dans des bains de Cz sont associées à la convection naturelle, aux forces rotationnelles et à la tension superficielle, et pouvant mener à différentes structures d'écoulement sur la surface libre du bain. Selon la géométrie de creuset, la taille du cristal et d'autres paramètres, l'écoulement dans un creuset de Cz peut être oscillatoire, transitoire ou turbulent. Egalement, selon la géométrie et le nombre de Prandtl Pr, il peut y avoir différents itinéraires des transitions à la turbulence dans les bains avec la convection naturelle. Ainsi pour des faibles nombre

de Pr, il peut y avoir trois ou quatre instabilités avant que l'écoulement soit entièrement turbulent.

Rupp et al. [1] ont étudié numériquement et expérimentalement la convection instationnaire de Marangoni pour des faibles nombres de Pr. Ils ont trouvé que l'écoulement stationnaire est non axisymétrique même au-dessous du nombre critique de Marangoni  $Ma_c$ .

Kakimoto [2] a conclu que l'instabilité de Marangoni ainsi que l'instabilité de Rayleigh – Bénard est responsable des stries dans des bains de silicium. L'interaction des champs thermique et hydrodynamique peut causer divers types d'instabilité dans les bains de silicium, par exemple, l'apparition d'ondes barocliniques, et ondes d'Ekman.

En utilisant les rayons X et des particules de tungstène, Kakimoto et al. [3] ont reporté la structure ordonnée dans un bain de silicium, et ils ont aussi suggéré que l'instabilité baroclinique est

une cause primaire des écoulements asymétriques et des ondes surfaciques dans le bain de silicium.

Selon Kakimoto et al. [3] ces instabilités influencent l'amplitude de fluctuations de la température près de l'interface de croissance, menant à un mouvement oscillatoire, et, à leur tour, ont un effet significatif sur la qualité du cristal tel que l'inhomogénéité, la striation, et les dislocations, etc.. Pour les cristaux à grand diamètre, par exemple 400mm, la croissance des cristaux de bonne qualité dépend considérablement de l'instabilité d'origine mécanique du fluide dans le bain.

L'étude expérimentale de l'écoulement dans de vrais systèmes de croissance est très limitée cela est due au fait que la visualisation n'est pas possible dans les températures réelles de croissance.

P. Hintz, D. Schwabe, H. Wilke [4] ont développé des expériences modèles pour simuler ces conditions pour permettant la visualisation de l'écoulement.

Les problèmes principaux surgissent pour toutes ces expériences modèles en ce qui concerne la simulation on approche des conditions aux limites thermiques d'un bain de Czochralski. Ceux-ci sont, par exemple les conditions à la paroi de creuset, l'effet de Marangoni sur la surface libre, le flux de la chaleur par la surface libre.

L'autre paramètre est le nombre de Prandtl du fluide modèle qui doit être apparié aux propriétés thermiques et visqueuses du bain.

Malheureusement les fluides modèles transparents ne sont pas disponibles pour les faibles nombres de Prandtl ( $Pr < 0.1$ ) qui est caractéristique pour des bains de métal, d'alliage ou de semi-conducteur.

P. Hintz, D. Schwabe, H. Wilke [4] dans leurs expériences ont utilisé un fluide modèle  $Pr=6.8$  (croissance de Czochralski des monocristaux d'oxyde), ils ont montré que la convection de Marangoni est très importante dans l'expérience modèle de CZ. Ils ont constaté qu'une cellule pilotée de convection de tension superficielle (roulement de "surface") domine le l'écoulement vers le cristal à toutes les profondeurs liquides.

Plusieurs études expérimentales et numériques ont été faites afin d'élucider les mécanismes d'instabilité sous l'influence de la convection naturelle et forcée dans un bain Cz de silicium, par exemple. Cependant, dans la plupart des analyses d'écoulement pour le silicium fondu au faible nombre de Prandtl (Pr.), l'effet de la convection de Marangoni a été souvent négligé.

Cependant, Kakimoto et Ozoe [5] ont prouvé dans leurs simulations numériques tridimensionnelles que les tensions de surface influencent notablement la zone de l'écoulement et le transport de l'oxygène dans le bain.

On rappelle que la plupart des autres études numériques qui incluent la convection de

Marangoni dans des bains de silicium ont été effectuées pour des conditions bidimensionnelles [6,7] car les calculs tridimensionnels dépendant du temps dans un creuset à échelle industrielle de Cz qui ont besoin des ressources informatiques de haute performance et de longues durées de calcul.

Yi et al.[8] sont les premiers qui ont étudié numériquement les instabilités de Rayleigh-Benard et de Marangoni-Benard dans un bain de silicium et ils ont constaté que l'instabilité de Marangoni-Benard cause l'asymétrie de l'écoulement même aux faibles gradients de température.

Selon Hibiya et Nakamura [9] la pression partielle de l'oxygène pendant la croissance peut considérablement influencer la tension superficielle sur la surface libre d'un bain de silicium. Ils ont également indiqué que la vitesse d'écoulement à la surface du bain est influencée par la pression partielle de l'oxygène. Le rôle de la tension superficielle dans le bain Cz de Si dans une géométrie cylindrique a été étudié récemment par V.KUMAR et al. [10], ils ont montré que la convection dans des creusets industriels de grande échelle est turbulente et la simulation de l'écoulement dans le bain demande un modèle de turbulence précis et donc, une bonne approche de modélisation pour capturer l'influence des petites fluctuations.

Plusieurs écoulements turbulents axisymétriques de grande échelle dans la croissance de Cz ont été simulé par des chercheurs admettant des tensions de cisaillement de Reynolds ont été approchées en utilisant différentes versions du type de modèles turbulents de k-epsilon. Enger et al.[11] ont prouvé qu'un modèle de turbulence tel que le k-epsilon ne pouvait pas capturer les instabilités mécaniques du fluide dans le bain et qu'il n'est pas approprié pour étudier les écoulements turbulents dans un bain Cz de silicium fondu. C'est dû au fait que la plupart des modèles de turbulence ne peuvent pas prévoir exactement la viscosité non isotrope associée au tourbillon et le transport turbulent de l'énergie thermique.

Récemment une étude de V.KUMAR et al. [12] s'est concentrée sur la description de l'écoulement instationnaire en présence des forces de tension superficielle dans un creuset Silicium-Cz à échelle industrielle.

Les simulations de KUMAR et al. ont été exécutées avec et sans l'effet de Marangoni dans un creuset de Cz dans des conditions réalistes de croissance. L'écoulement instantané et les champs thermiques ont été analysés pour élucider l'influence de la convection de Marangoni sur le mécanisme de transport dans le bain.

Ils ont montré que la convection de Marangoni a une influence significative sur les distributions non-axisymétriques passagères de vitesse et de température, qui, alternativement, affecte le transport de l'oxygène et d'autres dopants. A la lumière de cette revue le but de notre travail consiste à étudier l'influence de la convection de Marangoni provenant des effets de capillarité qui joue un rôle de grande importance sur le champ thermique et hydrodynamique dans le bain de Czochralski.

## II. DISPOSITIF

Le dispositif de Czochralski est visualisé sur la Figure 1. Le matériau qu'on veut cristalliser est rempli dans un creuset et est chauffé au dessus du point critique. Ceci s'effectue soit par une résistance soit par fréquence radio. Le chauffage par résistance radio introduit un faible décalage thermique dans le système. Le creuset est contenu dans une atmosphère inerte pour éviter l'oxydation. Une tige de tirage (pull rod) avec un paleron (chuck) contenant un germe de cristal est mise au dessus du creuset, et la température du bain est ajustée jusqu'à un minimum que peut supporter le germe du cristal. La tige de tirage est donc tournée lentement et soulevée, et par ajustement de l'énergie cédée au bain, un cristal de diamètre voulu peut être obtenu. La température du bain est souvent contrôlée par un thermocouple qui donne le control à boucle fermée de l'énergie de chauffage. Le taux de croissance peut varier de 1 à plusieurs centimètres par heure.

Au cours de la croissance, le creuset se vide au fur et à mesure perturbant l'équilibre thermique du système. Pour que le niveau du bain garde la même position par rapport à l'élément chauffant, le creuset est élevé lentement. De plus, le creuset et le cristal sont munis de mouvements de rotations contrôlée pour rendre le champs thermique axisymétrique et pour mieux contrôler l'écoulement du fluide dans le bain et la distribution des éléments dopants ou des impuretés près de l'interface. Un isolant thermique est souvent placé au dessus du creuset afin d'atteindre le taux de transfert radiatif désiré. Le système complet est protégé par une enceinte en acier inoxydable.

Le gradient de température dans le système de croissance est à l'origine de courant de convection dans le bain. Ces écoulements jouent un rôle important dans le processus de croissance en agissant sur la forme et la stabilité de l'interface de croissance, ainsi que sur la distribution radiale des dopants dans le cristal.

L'augmentation du gradient de température induit l'apparition d'instabilités près de l'interface. Cet effet néfaste à une bonne cristallisation est éliminé grâce aux mouvement de rotation, imposées au cristal et/ou au creuset, qui s'opposent à la

convection naturelle, passant ainsi du régime de la convection libre dominante au régime de la convection forcée contrôlée. D'autres types de forces peuvent être utilisées pour atténuer les oscillations de la température comme le champs magnétique. Des écoulements générés par des forces dues aux gradients de tension de surface sont aussi possibles.

La qualité du cristal produit est influencée par la dynamique du bain à travers la forme de l'interface solide-liquide, siège de dégagement de chaleur latente de solidification, pouvant générer des contraintes thermiques responsables de l'apparition de dislocation dans le cristal.

Dans la technique de Czochralski, le point triple (intersection des phases solide, liquide et, gaz ambiant) doit être maintenu à la température de fusion. Tout écart par rapport à cette condition conduit à un déplacement de ce point, associée à une augmentation ou réduction du diamètre du cristal à sa base. La géométrie extérieure du cristal est indéterminée, elle évolue au cours du tirage.

Le matériau fondu est placé dans un four creuset de forme cylindrique porté à la température  $T_c$ , le mélangeur portant le germe de cristallisation est un cylindre de même axe que le creuset.

Les deux cylindres sont entraînés par des moteurs contrarotatifs.

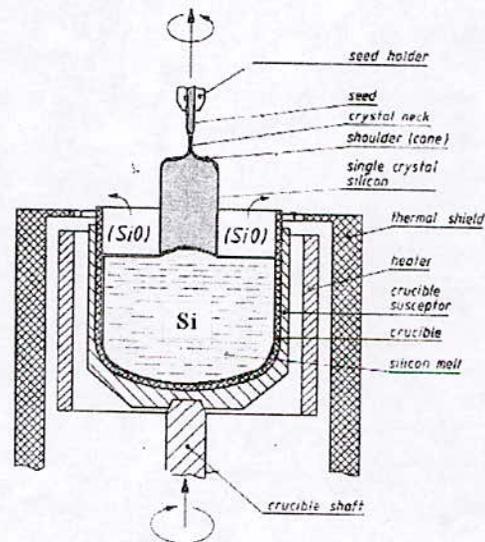


Fig. 1. Dispositif de croissance cristalline de type Czochralski

## III. FORMULATION DU PROBLEME

### A. Hypothèses simplificatrices

- Les propriétés thermo physiques des fluides sont constantes.
- Le bain fondu est un fluide newtonien et incompressible et satisfaisant à

l'hypothèse de Boussinesq : elle suppose que les effets de variations de densité sont importants pour les forces de volume, les autres variations sont considérées négligeables.

- L'écoulement du liquide au sein du creuset est laminaire et la dissipation visqueuse est négligeable.
- Symétrie axiale.
- Au point de fusion la température est constante.
- Le transfert thermique est effectué seulement par radiation à la surface libre.

### B. Equations

Les équations régissant la dynamique de l'écoulement sont issues des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'équation de conservation de l'énergie dans le bain. On note  $V$  la vitesse du mouvement,  $P$  et  $T$  pression et température associées,  $g$  le champ de gravité

- conservation de la masse :

$$\nabla \cdot V = 0$$

- conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho(V \cdot \nabla)V = -\nabla P - \rho g + \mu \nabla^2 V$$

- conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$$

avec  $\rho$  la densité,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\alpha$  la diffusivité moléculaire du fluide.

### C. Conditions aux limites

Pari du creuset:

$$V = \Omega_c r e_\varphi \quad T = T_c$$

Pari du cristal:

$$V = \Omega_s R_s e_\varphi$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = Ra(T^4 - T_\infty^4) + Bi(T - T_\infty)$$

Surface libre du bain

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = Ra(T^4 - T_\infty^4)$$

Les nombres adimensionnels sont définis comme suit :

Le nombre de Marangoni  $Ma = -\frac{R_c T_f \partial \gamma}{\mu \alpha \partial t}$  celui-ci

mesure l'intensité de l'écoulement due aux gradients de tension de surface.

$$Ra = \frac{\sigma R_c T_f^3}{K_c} \quad Rd = \frac{\sigma R_c T_f^3}{K_s} \quad \text{caractérisent}$$

l'importance du transfert thermique par rayonnement par rapport à la conduction.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{caractérise l'importance de la diffusivité}$$

thermique par rapport à la diffusivité moléculaire.

### III. METHODE DE RESOLUTION

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie qui gouvernent le problème sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. Pour les résoudre numériquement on utilise le logiciel Fluent qui a comme base la méthode des volumes finis.

Etant donnée la complexité phénoménologique, au stade actuel on se limite à l'utilisation d'un modèle bidimensionnel axisymétrique.

Les conditions de simulation sont fixées à partir des caractéristiques données ci-après :

#### A. Propriétés physiques et paramètres géométriques

- Rayon du creuset	7cm
- Rayon du cristal	3 cm
- Hauteur du creuset	8 cm
- Température de fusion	1683 K
- Température ambiante	500 K
- Conductivité thermique du silicium liquide	64 W/mK
- Conductivité thermique du silicium solide	22 W/mK
- Densité du silicium liquide	2530 Kg/m <sup>3</sup>
- Capacité calorifique	1000 J/Kg K
- Viscosité dynamique	7 10 <sup>-4</sup> Kg/m s
- Coefficient de dilatation thermique	1.4 10 <sup>-4</sup> K <sup>-1</sup>
- Chaleur latente de fusion	1.8 10 <sup>6</sup> K <sup>-1</sup>
- Température à la paroi du creuset	1750 K
- Emissivité du liquide	0.3
- Emissivité du solide	0.7
- Gradient de tension superficielle	-0.001

Enfin on présente en Figure 2 la schématisation du domaine de calcul bidimensionnel qui est solidaire au creuset.

On cherche à calculer systématiquement toutes les caractéristiques du mouvement, à savoir, la fonction de courant, les vitesses axiales et radiales ainsi que les isothermes correspondants. Partant de la schématisation du domaine analysé on représente le maillage employé dans nos simulations (Figure 3).

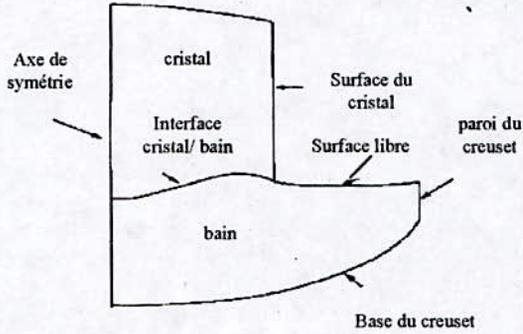


Fig. 2. Schéma bidimensionnel du dispositif



Fig. 3. Maillage du domaine

#### IV. RESULTATS OBTENUS

Les résultats de nos calculs sont présentés sur les figures 5, 6, 7, 8 donnant les fonctions courant, vitesse axiale, vitesse radiale et les isothermes pour les paramètres sensibles  $Pr$ ,  $Ma$ ,  $Ra$ ,  $Rd$  fixés.

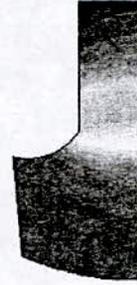


Fig. 4. Structure des isothermes dans un régime de conduction pure

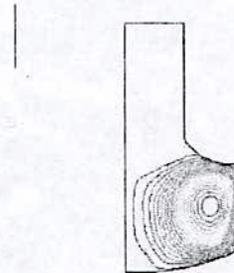


Fig. 5. Fonctions courants ( $Ma=0$ )

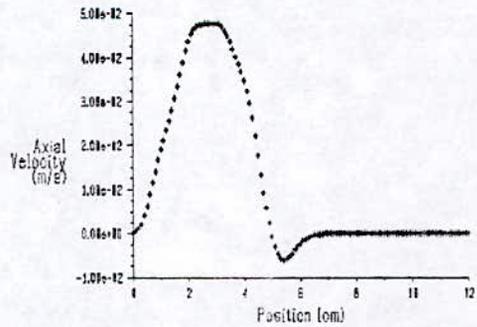


Fig. 6. Vitesse axiale en fonction de la hauteur ( $Ma=0$ )

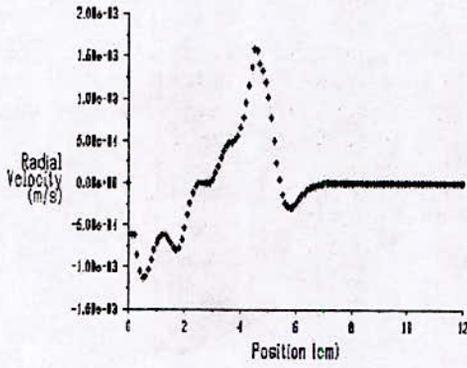


Fig. 7. Vitesse radiale en fonction de la hauteur (Ma=0)

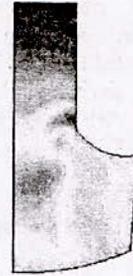


Fig. 10. Structure des isothermes Ma=3 10<sup>5</sup>

dans le cas où  $Ma=3 \cdot 10^5$  on obtient les fonctions courants, la vitesse axiale, la vitesse radiale et les isothermes représentés sur les figures 9, 10, 11, 12 :

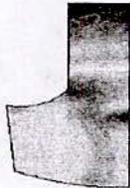


Fig. 8. Structure des isothermes (Ma=0)

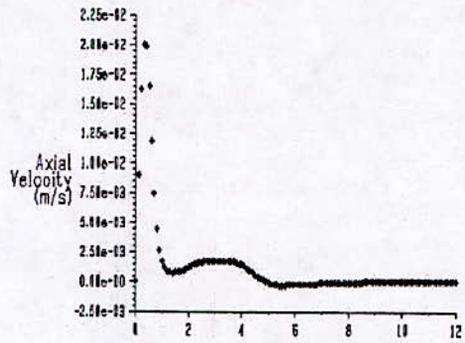


Fig. 11. Vitesse axiale en fonction de la hauteur Ma=3 10<sup>5</sup>

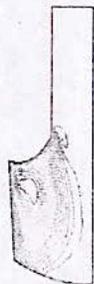


Fig. 9. Fonctions de courant Ma=3 10<sup>5</sup>

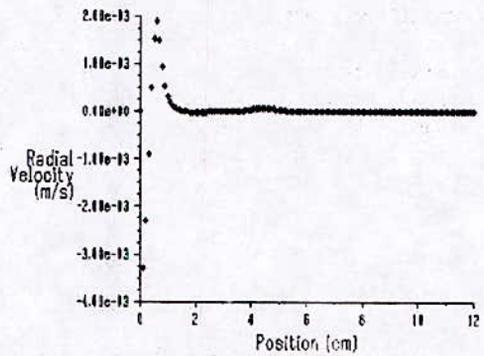


Fig. 12. Vitesse radiale en fonction de la hauteur Ma=3 10<sup>5</sup>

## V. INTERPRETATION DES RESULTATS

On considère le résultat lié à la fonction courant (figure 4) obtenu pour  $Ma=0$  (effet de capillarité nulle) comme une référence de calcul pour effectuer une comparaison systématique avec l'évolution de la croissance cristalline au fur et à mesure que  $Ma$  croît.

Sur cette base on constate que le résultat obtenu pour  $Ma=3 \cdot 10^5$  met en évidence un déplacement de l'intensité maximale de fonction de courant vers le haut,  $c$  à  $d$  vers la surface libre, et correspondant environ à  $1/4$  hauteur du creuset. La symétrie du mouvement est quasiment conservée mais on observe par ailleurs que l'effet de capillarité qui prédomine au sein de l'écoulement introduit une relative convexité de l'interface pouvant causer des effets indésirables sur la qualité du cristal.

On note enfin que l'effet de Marangoni n'affecte pas l'écoulement radial lié à l'intensité maximale. Dès lors on peut conclure que l'effet de tension superficielle agit axialement pour l'essentiel.

La représentation de la distribution de vitesses radiale et axiale met en évidence une évolution croissante caractérisée par un maximum dans chacun des cas mais avec un décalage relatif; au delà de la position  $z>4$  on observe une diminution puis évolue vers une valeur constante rejoignant le domaine du cristal.

On évalue en moyenne un rapport de l'ordre de 3% entre les vitesses radiale et axiales suggérant ainsi que les perturbations prédominantes sur cette dernière.

Lorsque on fait varier  $Ma$  on observe une allure semblable et un tassement de la distribution des vitesses radiales et axiales vers la base du creuset en passant par un maximum relatif.

Le tracé des isothermes permet de conclure que l'effet de Marangoni introduit davantage de complexité dans la répartition des fluctuations de champ de température suggérant un défaut d'homogénéité croissant vers la surface libre.

## VI. CONCLUSION

L'analyse des résultats obtenus permet de tirer les conclusions suivantes :

La convection de Marangoni affecte considérablement le champ de température et le champ hydrodynamique dans le bain et le cristal.

La forme de l'interface est différente en présence de la convection thermo capillaire.

Les fonctions courants ainsi que leurs centres sont décalées (serrées vers la surface libre)

Les profils des vitesses axiales et radiales changent considérablement.

Cette dernière étant faible en comparaison avec la vitesse axiale.

Etant donné la rareté des travaux consacrés à l'effet de Marangoni considéré comme nuisible à la qualité du cristal nous avons essayé d'approcher l'influence de sa contribution et de fixer un compromis quant au nombre de Marangoni à ne pas dépasser.

## VII. RÉFÉRENCES

- [1] R. Rupp, G. Muller, G. Neumann, "Three-dimensional time dependent modelling of the Marangoni convection in zone melting configurations for GaAs" *J. Crystal Growth* vol. 97, 1989 pp. 34-41.
- [2] K. Kakimoto, "Flow instability during crystal growth from the melt" *Prog. Crystal Growth Charact.* Vol.30 1995 pp. 191-215.
- [3] K. Kakimoto M. Wanatabe, E. Eguchi, T. Hibiya, "Growth Convection in a Czochralski crucible" *J. Crystal Growth* vol.126 1993 pp. 435-442.
- [4] P. Hintz, D. Schwabe, H. Wilke, *J. Crystal Growth Convection in a Czochralski crucible - Part I: non-rotating crystal* vol. 222 2001 pp. 343 - 355.
- [5] K. Kakimoto, H. Ozoe, "Oxygen distribution at a solid-liquid interface of silicon under transverse magnetic fields" *J. Crystal Growth* vol. 212 2000 pp. 429-437.
- [6] M. Li, Y. Li, N. Imaishi, "Global simulation of a silicon Czochralski furnace" *J. Crystal Growth* vol. 234 2002 pp 32-46
- [7] H. Nakanishi, M. Wantabe, K. Terashima, *J. Crystal Growth "Dependence of Si melt flow in a crucible on surface tension variation in the Czochralski process"* vol. 236 2002 pp. 523-528.
- [8] K. Yi, K. Kakimoto, M. Eguchi, M. Watanabe, T. Shyo, T. Hibiya, "Spoke patterns on molten silicon in Czochralski system" *J. Crystal Growth* vol. 144 1994 pp.20-28.
- [9] T. Hibiya, S. Nakamura, *Adv. Space Res. "Fluid Flow in Silicon Melt with Free Surface"* Vol.24 1999 pp 1225 - 1230.
- [10] V. Kumar, B. Basu, S. Enger, G. Brenner, F. Durst, "Role of Marangoni convection in Si-Czochralski melts", part I: 3D predictions without crystal" *J. Crystal Growth* vol. 253 2003 pp. 142-154.
- [11] S. Enger, O. Grabner, G. Muller, M. Breuer, F. Durst, "Comparison of measurements and numerical simulations of melt convection in Czochralski crystal growth of silicon" *J. Crystal Growth* vol. 230 2001 pp. 135-142
- [12] V. Kumar, B. Basu, S. Enger, G. Brenner, F. Durst, "Role of Marangoni convection in Si-Czochralski melts—Part II: 3D predictions with crystal rotation" *J. Crystal Growth* vol.255 2003 p. 27-39.

## 2D FEM for Axial Magnetic Forces Calculation Exerted on a Moving Parts of Magnetic Actuators Considering the Hysteresis Phenomenon

H. Allag\*, M. E. H Latreche\*, M. R. Mekideche\*\*

\* L.E.C Laboratory, Department of Electrotechnic Constantine university- 25000 Constantine Algeria

\*\* L.A.M.E.L Laboratory, Department of Electrical Engineering, Jijel university BP 98, Ouled Aissa – Jijel (Algeria)

[allag\\_hic@yahoo.fr](mailto:allag_hic@yahoo.fr), [latreche\\_med@yahoo.fr](mailto:latreche_med@yahoo.fr),

**Abstract**—Several works were developed for local and global magnetic force calculation, this works are based on different theories such as a simplified magnetisation model and energy approach, generally this models are applicable for a ferromagnetic materials considering their linear compartment.

In this paper we present the method of Maxwell stress tensor and its application in ferromagnetic material calculation using the model of Preisach Hysteresis which will be integrated to 2D FEM calculation code.

For a simulation result we use two axisymmetrical actuators from which the essential curves are presented such as the force time variation, the mechanical behaviour (displacement) and the magnetic quantities.

**Keywords** : Magnetic Force, Electromagnetic Actuator, Magnetic Hysteresis, Preisach Model

### I. INTRODUCTION

The magnetic forces are the essential quantities in electromagnetic systems functioning, such as electrical machines, electromagnetic actuators...etc

The force and the torque of electric machine are usually evaluated by FEM [1], [2], applying Lorentz formula [3], the Maxwell stress tensor [4], and the principle of virtual work displacement [5].

For calculation in magnetic region the method of virtual work is often used but the procedure is rather complicated because numerical differentiation of magnetic energy is required [5]

For this we use the Maxwell stress tensor method which is applicable for a ferromagnetic material

### II. FORCE USING MAXWELL STRESS TENSOR

In a conductor, the volume force density is given by the Lorentz formula as :

$$f_m = J \times B \quad (1)$$

then the global force is :

$$F_m = \int_V f_m dV = \int_V \text{div}(T_m) dV \quad (2)$$

where  $T_m$  is the Maxwell stress tensor which can be represented by using the divergence theorem as :

$$F_m = \oint_S T_m \cdot n dS = \oint_S (T_m \cdot n) dS \quad (3)$$

Generally we note [6] :

$$F = \oint_S (\bar{T} \cdot n) dS \quad (4)$$

with

$$\bar{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (5)$$

and

$$\tau_{mn} = \mu_0 \left( H_n H_m - \frac{1}{2} \delta_{nm} (H^2) \right) \quad (6)$$

S is the closer surface surrounding the volume object in which we would calculate the force,  $n$  is the normal unit vector of the conductor surface and F is the global force.

From (4) and (6) the global force is expressed :

$$F = \mu_0 \oint_S \left( (H \cdot n) H - \frac{1}{2} (H^2) n \right) dS \quad (7)$$

OR

$$F = \frac{1}{\mu_0} \oint_S \left( (B \cdot n) B - \frac{1}{2} (B^2) n \right) dS \quad (8)$$

we note that the global magnetic force that ensues of surface calculation remain unchanged if instead of Laplace force we must consider forces exercising on ferromagnetic materials [7]

III. LINEAR AND NONLINEAR MODEL IN MAGNETOSTATIC

For our simulation we have chosen two axisymetrical actuator types as shown in Fig. 1., The global magnetic force exerted on there ferromagnetic core is calculated using Maxwell stress tensor using 2D finite elements method, with constant permeability  $\mu$ , but for taking into account saturation phenomena we choose the variable relativity function model [8] [9], its first magnetization curve is shown in Fig. 2.

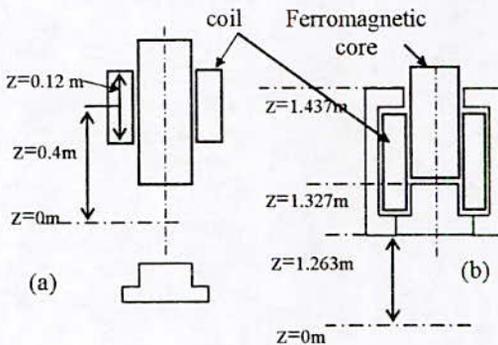


Fig. 1. axisymetrical actuators.

We choose the case of a hyperbolic interpolation in which the relative relativity can be approximated by the following expression

$$\nu_r(B^2) \approx \epsilon + (c - \epsilon) \frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + t} \quad (9)$$

where  $\epsilon, \alpha, c$  and  $t$  are determined from  $B(H)$  curve using the least square method [9].

For  $B(H)$  curve of Fig. 2. Correspond the following values :  $\epsilon = 5,16 \cdot 10^{-4}, \alpha = 5,419, c = 0,175, t = 8,75 \cdot 10^3$

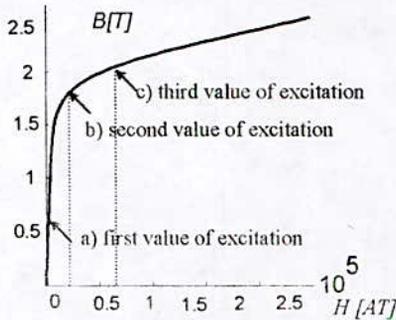


Fig. 2. First magnetization curve  $B(H)$

for better compare the two models (linear and non linear) in magnetostatic case we must make correspond the constant relative permeability of the first model with the tangent of linear zone of the second from Fig. 2, the corresponding value is  $\mu = 129$

Fig. 3. represent the variation of global axial magnetic force as a function of vertical position for a ferromagnetic core of the first actuator with and without take into account the saturation phenomena for three respective values of excitation field, whose the first is situated in the linear zone where the variations of magnetic forces for the two models are identical Fig. 3. a., contrary when we comes closer toward the saturated zone we notes that the gap between the values of forces (linear and non-linear model ) is more important Fig. 3. b-c.

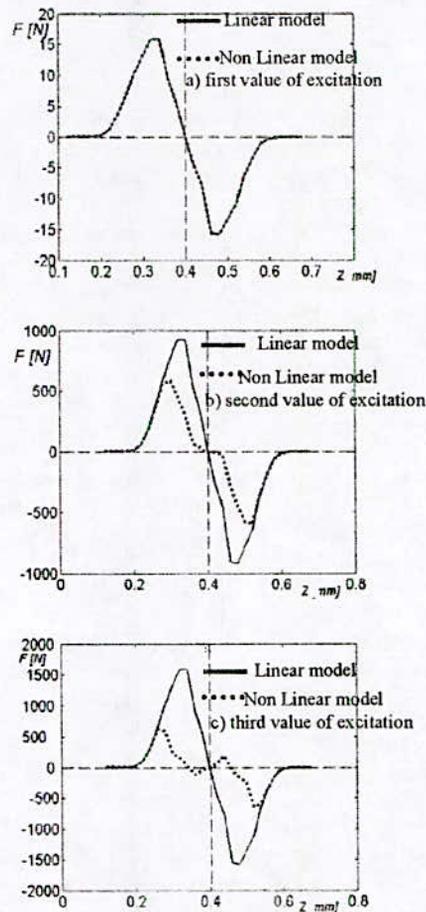


Fig. 3. Variation of global force for different positions of ferromagnetic core (from the lower position until the high one).

For the second actuator (the simulation result is shown for the interval of displacement  $z = [1.4 - 1.52m]$ )

the maximum force in absolute value are observed in position  $z \approx 1.4$  (continues line) for linear case ( $\mu = 192$ ), and for a nonlinear corresponding at the third value of excitation (from Fig. 2.) the force are shown in dashed line.

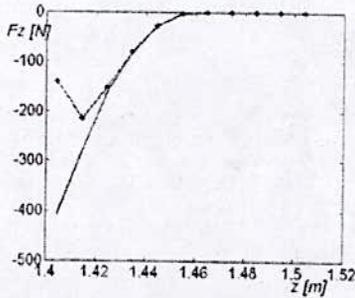


Fig. 4. Variation of global force for different positions of ferromagnetic core (second actuator)

as a result of this simulation part, we note that actually the force is less important than in the linear case and it because of material saturation and the calculation while taking in account this phenomenon we leads to the more precise results that is observed in Fig. 3 and Fig. 4.

to see the variation as function of time we are obliged to consider the Hysteresis cycle, whose the model chosen in next section is known as the Preisach model.

#### IV. HYSTERESIS MODEL IMPLEMENTATION

One of the more used models to represent the Hysteresis of magnetic material are incontestably the model proposed by the physicist German Preisach [10],[11]. its merely intuitive approach is based on the observation of the magnetization mechanism. Thus, the evolution of the magnetic configuration of a material submitted to different fields can be as well studied by  $M(H)$  cycles -magnetization as function of fields- or from the plan of Preisach  $(\alpha, \beta)$  [10] [11].

In this model, the magnetic state of the material at given one instant is represented by a set of magnetic entities having two possible states ( $M=+1$  or  $M=-1$ ), governed by a rectangular elementary cycle, dissymmetrical with regard to the origin. This cycle is characterized by a flipping fields (high  $\alpha$  and low  $\beta$ ), with  $\beta \leq \alpha$ , for which it have a irreversible transition of the low state ( $M=-1$ ) toward the high state ( $M=+1$ ), or inversely. Such an elementary cycle is represented on Fig. 5.

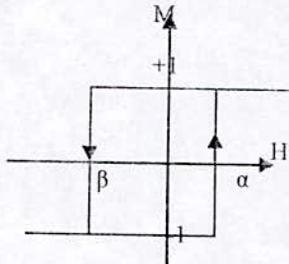


Fig. 5. elementary cycle of an entity

The magnetization calculation of the material rests on a statistical elementary cycle distribution (or operators), whose variables are  $\alpha$  and  $\beta$ , as well :

$$M(t) = \iint \rho(\alpha, \beta) \hat{\gamma}[\mathbf{H}(t)] \mathbf{H} \, d\alpha \, d\beta \quad (10)$$

where

- $\rho(\alpha, \beta)$  the Preisach density
- $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}[\mathbf{H}]$  the operator of flipping fields
- 

#### A. FORMULATION IN MAGNETIC POTENTIAL VECTOR OF NON LINEAR MAGNETODYNAMIC PROBLEM

This type of formulation applies to systems containing time varying sources that generates eddy currents with variation of fields.

The model obtaining from Maxwell's and laws of surrounding behavior equations with considering :

displacement currents are negligible facing conduction currents, the speed of displacement and electric charges are equal to zero.

We obtain the formulation in magnetic potential vector  $A$  as follow

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \text{Rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \text{Rot} A \right) = J_s + \text{Rot} M \quad (11)$$

where  $J_s$  is source current density,  $\sigma$  is electric conductivity and  $\mu_0$  is magnetic permeability

The non-linear magnetic behavior is introduced by the  $M=f(H)$  Hysteresis model.

in order to assure the convergence of system calculation in FEM code we uses the method of fixe point that asks to relax the magnetic field  $H$

in Fig. 6. we present the main stages that permit us the implementation of Hysteresis calculated by the Preisach model and the resolution by FEM of the model characterized by the equation (11) and it for every step of time (step by step in time)

The result concerning the magnetic field  $H$  and magnetic induction  $B$  ( $H_z$ ,  $B_z$  and  $B_r$  components) for all elements of mesh concentrated in ferromagnetic core of the first actuator as shown as function of time [s] in Fig. 7 with considering this parameters values:

$$J_s = 10^5 \sin(2\pi 50.1); \quad \sigma = 7.10^6, \quad (H_s = 1500, H_c = 200 \text{ Preisach model}); \quad z = 0.4 \text{ m (median position)}$$

The Fig. 7. a. present a sinusoidal variation of axial fields  $H_z$  as function of time (same period with source excitation)

From this variation of magnetic field correspond the magnetic induction variation Fig. 7. b. which present several periodic curves in saturated states ( the number of curves equal to the number of elements of the mesh in ferromagnetic region)

we also note the same remarks for Br components

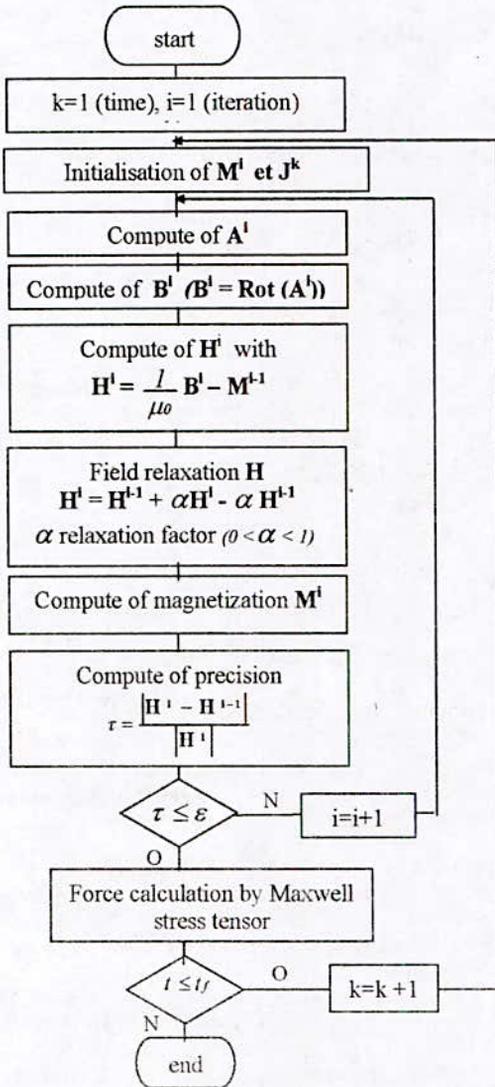


Fig. 6 : Plan of Hysteresis model integration in finites elements method.

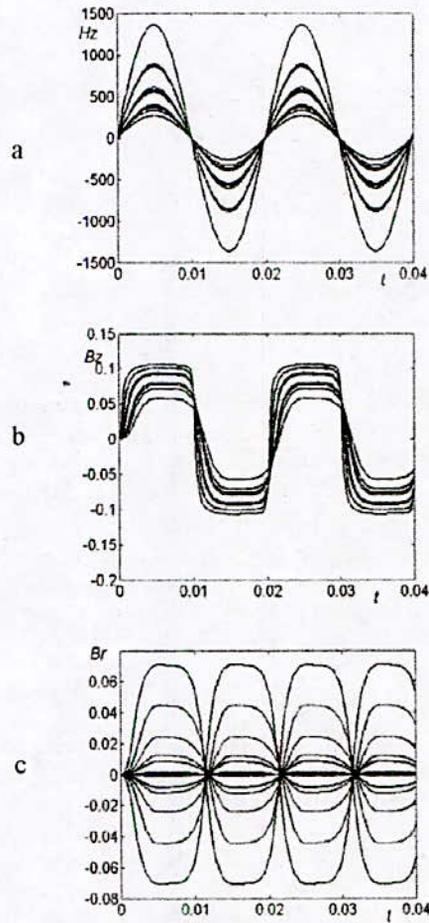


Fig. 7. radial and axial components of magnetic field and induction as function of time for all elements of mesh of ferromagnetic region.

For visualizing Hysteresis cycles we have plotted respectively  $B_z$  and  $Br$  as function of  $H_z$  and  $H_r$  the result is in Fig. 8 and Fig. 9

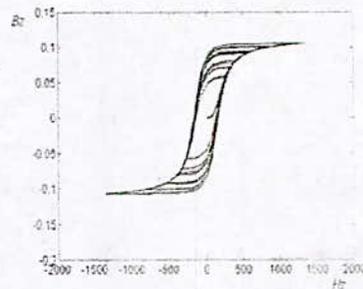


Fig. 8.  $B_z$  as function of  $H_z$  for all elements of mesh of ferromagnetic region

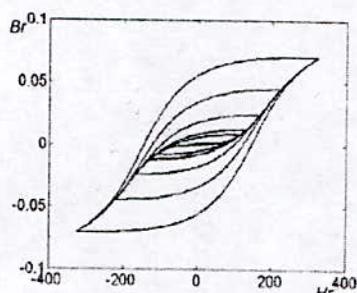


Fig. 9.  $B_r$  as function of  $H_r$  for all elements of mesh of ferromagnetic region

For axial force result we calculate it for two position of ferromagnetic core of the first actuator respectively (0.38m and 0.44m) and for  $J_s = 10^5 \sin(2\pi 50.t)$ .

In reality if there is no saturation, the force which is function of  $(B^2)$  or  $(H^2)$  equation (7) or(8) have a square sinusoidal form ( $\sin^2$ ) but the Hysteresis effect returns curves less accentuated and always periodic which is observed in Fig. 10. for  $z=0.38m$  and in negative value in Fig. 11. for  $z=0.44m$ .

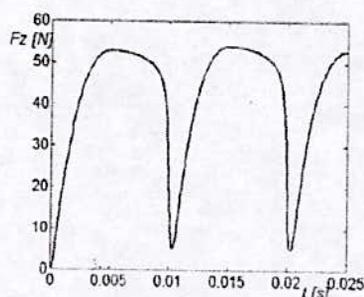


Fig. 10. Force variation as function of time for  $z=0.38m$

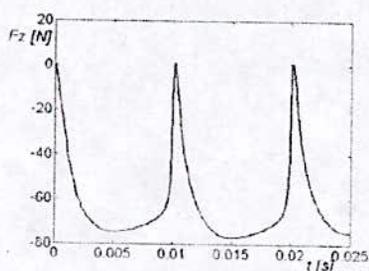


Fig. 11. Force variation as function of time for  $z=0.44m$

## V. CONCLUSION

The importance to introduce non linearity in our calculation is to observe the more real and precise results of electromagnetic quantities and therefore their repercussion on magnetic forces.

we saw that the forces are less important in nonlinear case than those in linear one, therefore their values are limited by the saturation of the material. what is observed well in magnetodynamic case while considering the states of saturation by Hysteresis cycles predicted by the model of Preisach

## REFERENCES

- [1] J. Simkin, "Recent developments in field and force computation." *J. Phys.Colloq.*, vol. 45(C-1). Pp. 163-166.
- [2] J. Mizia. K. Adamiaka. A. R. Eastham. And G. E. Dawson. "Finite element force calculation: Comparison of methods for electric machines." *IEEE trans. Magn.*, vol. 24. pp.447-450. jan. 1988.
- [3] T. Kabashima. K. Kawahara. And T. Goto. "Force calculation using magnetizing currents." *IEEE trans. Magn.*, vol. 24. pp.451-454. jan. 1988.
- [4] M. Marinescu and N. Marinescu "Numerical computation of torque in permanent magnet motors by Maxwell stresses method." *IEEE trans. Magn.*, vol. 24. pp.463-466. jan. 1988.
- [5] J. L. Coulomb "A methodologies for determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness." *IEEE trans. Magn.*, vol. MAG-19. pp. 2514-2519. nov. 1983.
- [6] M. Jufer "Electromécanique" *Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique*. Dunod. 1979
- [7] K. Srairi "Modélisation d'actionneurs électromagnétiques alimentés en régime transitoire" *Thèse de doctorat en électronique, Ecole doctorale science pour l'ingénieur de Nantes*, 1996
- [8] A. Marroco "Analyse numérique de problèmes d'électrotechniques". *Ann. Math. Quebec*, Vol. 1, pp. 271-296, 1977.
- [9] M. Feliachi, "Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis", *Conservatoire national des arts et des métiers*, 1981
- [10] Y. Bernard, "Contribution à la modélisation du système électromagnétique en tenant compte du phénomène d'Hystérésis" *Thèse de doctorat, Univ-Paris XI Orsay*. 2000
- [11] N. Amir, "Modélisation de l'Hystérésis dans les matériaux magnétiques et introduction de modèle dans le logiciel de simulation aux éléments finis flux 3D". *Thèse de doctorat Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2002

## Auteurs

<b>A</b>		<b>K</b>	
A. M. Abdel Ghany	p.133	D. Kairous	p.49
A. Ahmed Ben Yahia	p.169	R. Kattan	p.103
A. Aït-Hammouda	p.39	A. Koudri-Boudjelthia	p.179
H. Allag	p.231	<b>L</b>	
A. Alliche	p.213	A. Ladjimi	p.79
M. Ameur	p.153	S. Laïsaoui	p.79
R. Ayad	p.207	H. Lanchon-Ducauquis	p.143
<b>B</b>		B. Laporte	p.9
H. Bali	p.97	R. Lateb	p.27
A. Benamar	p.201	M. E. H. Latreche	p.231
N. Benamrouche	p.91	<b>M</b>	
A. Bendjerad	p.61	G. Maurice	p.143
A. Bensenouci	p.133	F. Meibody-Tabar	p.27
H. Bessai	p.39	H. Menana	p.57
A. Bezazi	p.163-201	S. Mekhtoub	p.49
A. Bouabdellah	p.179-223	M. R. Mékidèche	p.79-231
S. Bouazabia	p.113	S. Mezani	p.9
A. Boubakeur	p.103	H. Mohellebi	p.85
M. Boudour	p.127	L. Mokhnache	p.103
K. Boughrara	p.73	F. Mokhtari	p.223
M. Bouheraoua	p.91	D. Moussaoui	p.61
M. Boulahbal	p.113	<b>N</b>	
Z. Boulassel-Belli	p.97	B. Naama	p.67
A. Bounif	p.195	<b>O</b>	
Y. Boutora	p.21	H. Osmani	p.163
H. Bouzeboudja	p.67	M. Ouadjaout	p.147
P. Brochet	p.39	A. Oudina	p.185
<b>C</b>		Y. Ouazir	p.33
A. Chaker	p.57	A. Ould-Hammouda	p.143
Y. Cheriguen	p.97	<b>R</b>	
<b>D</b>		S. Rechak	p.147-153-169.
H. Djelouah	p.185	M. Rokbi	p.163
<b>F</b>		<b>S</b>	
M. K. Fellah	p.119	Y. Sahali	p.119
<b>G</b>		D. Sedira	p.79
A. Ghoul	p.153-179	<b>T</b>	
<b>H</b>		M'B. Taghite	p.143
M. Haboussi	p.147	N. Takorabet	p.9-21-27-33.
B. K. Hachi	p.147	N. Tala-Ighil	p.195
S. Haddad	p.91	K. Taous	p.143
L. Hadjout	p.113	N. Taout	p.153-169
S. Hanchi	p.223	O. Touhami	p.33-49-73
M. Hecquet	p.39	<b>V</b>	
A. Hellel	p.127	P. Verma	p.103
A. Hocine	p.201	S. Vivier	p.39
H. Houassine	p.61	<b>Z</b>	
<b>I</b>		M. Zaouia	p.85
R. Ibtouen	p.21-33-39-49-73	M. Zizi	p.200

# Workshop sur la Modélisation En Electrotechnique et en Mécanique



## MEM'05

ENP-Alger 13-14 Avril 2005



ENP  
LRE  
LGMD  
ADEP  
CMEP (TASSILI)  
MESRS



AMBASSADE de FRANCE à Alger



Groupe ELSECOM

